Exercice 1 Déterminer si les structures suivantes sont des anneaux :

1. $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$
2. $(\mathbf{Q}, -, \cdot)$
3. $(\mathbf{Q}, +, \div)$
4. $(\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, +, \cdot)$
5. $(\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}), +, \cdot)$
6. $(\mathcal{F}(\mathbf{R}, \mathbf{R}), +, \circ)$
7. $(\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R}), +, \cdot)$
8. $(\mathrm{M}_n(\mathbf{C}), +, \cdot)$
9. $(\mathrm{GL}_n(\mathbf{C}), +, \cdot)$
10. $(\mathbf{C}[X], +, \cdot)$
11. $(\mathbf{C}[X], -, \cdot)$
12. $(\mathbf{C}[X], +, \circ)$

Exercice 2 Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\mathrm{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de groupe de G. On note encore $+$ la loi interne usuelle sur $\mathrm{End}(G)$: pour tous endomorphismes φ et ψ, on définit $\varphi + \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & \varphi(g) + \psi(g) \end{array} \right.$. Montrer que $(\mathrm{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 3 Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-anneaux de $\mathbf{Z}[X]$:

1. $\{P \in \mathbf{Z}[X] \mid \deg P \leq n\}$, $n \in \mathbf{N}$ fixé
2. $\{P \in \mathbf{Z}[X] \mid \deg P \text{ pair}\}$
3. $\{XQ \mid Q \in \mathbf{Z}[X]\}$
4. $\{Q(X^2) \mid Q \in \mathbf{Z}[X]\}$

Exercice 4 Déterminer si les anneaux suivants sont intègres : $\mathbf{Q}$, $A \times A$ où A est un anneau intègre, $\mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$.

Exercice 5 Déterminer les inversibles et les diviseurs de zéro de l'anneau $\mathcal{C}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$.

Exercice 6 1. Soit A un anneau intègre. Démontrer $A[X]^\times = A^\times$.

2. En considérant l'anneau $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, montrer que cela n'est pas vrai si A n'est pas intègre.

Exercice 7 1. Soit A un anneau fini. Montrer que tout élément $a \in A$ est soit inversible, soit nul, soit un diviseur de zéro. On pourra considérer la multiplication à gauche par a.

2. Est-ce vrai si A est infini ?

Exercice 8 1. Soient B un anneau, A un sous-anneau de B et $\omega \in B$. On pose

$$A[\omega] = \{a_n\omega^n + \cdots + a_1\omega + a_0 \mid n \geq 0, a_i \in A\}.$$

Montrer que $A[\omega]$ est le plus petit sous-anneau de B contenant A et ω.

2. Montrer que $\mathbf{Z}[\omega]$ est le plus petit sous-anneau de $\mathbf{C}$ contenant ω.

3. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{Z}[X]$ unitaire de degré $d \geq 1$ tel que $P(\omega) = 0$. Montrer que l'on a $\mathbf{Z}[\omega] = \{a_{d-1}\omega^{d-1} + \cdots + a_1\omega + a_0 \mid a_i \in \mathbf{Z}\}$. Cela est-il vrai si on ne suppose plus que P est unitaire ?

4. On suppose qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{Q}[X]$ de degré $d \geq 1$ tel que $P(\omega) = 0$. Montrer que l'on a $\mathbf{Q}[\omega] = \{a_{d-1}\omega^{d-1} + \cdots + a_1\omega + a_0 \mid a_i \in \mathbf{Q}\}$. Montrer que $\mathbf{Q}[\omega]$ est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension finie et en déduire que c'est un sous-corps de $\mathbf{C}$.

Exercice 9 (entiers d'Eisenstein) Soient $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$ et $A = \mathbf{Z}[j]$.

1. Montrer que l'on a $A = \{a + bj \mid a \in \mathbf{Z}, b \in \mathbf{Z}\}$. Montrer que l'écriture d'un élément de A sous la forme $a + bj$ est unique.

2. Pour $z \in \mathbf{C}$, on pose $N(z) = |z|^2$. Montrer que si $z \in A$ alors $N(z) \in \mathbf{Z}$.

3. Soit $z \in A$. Montrer que z est inversible (dans A) si et seulement si $N(z) = 1$.

4. En déduire le groupe $A^\times$. Déterminer ses éléments d'ordre 3.

Exercice 10 Soit A un anneau commutatif. Déterminer les morphismes d'anneaux $\mathbf{Z} \to A$.

Exercice 11 1. Soient $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux et $\omega \in B$. Montrer que l'application $\varphi_{f,\omega} : \left\{ \begin{array}{ccc} A[X] & \longrightarrow & B \\ \sum_{i=0}^{d} a_i X^i & \longmapsto & \sum_{i=0}^{d} f(a_i)\omega^i \end{array} \right.$ est un morphisme d'anneaux.

2. Soit $\varphi : A[X] \to B$ un morphisme d'anneaux. Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneaux $f : A \to B$ et un unique élément $\omega \in B$ tel que $\varphi = \varphi_{f,\omega}$.

Exercice 12 Soit f un automorphisme de corps de $\mathbf{R}$.

1. Montrer que $f_{|\mathbf{Q}} = \mathrm{id}_{\mathbf{Q}}$.
2. Montrer que f est une application strictement croissante.
3. En déduire $f = \mathrm{id}_{\mathbf{R}}$.

Exercice 13 Montrer que $\mathbf{Q}(\sqrt{2}) = \{a+b\sqrt{2} \mid a \in \mathbf{Q}, b \in \mathbf{Q}\}$ est un sous-corps de $\mathbf{R}$. Déterminer ses automorphismes de corps.