Exercice 1 Dans les cas suivants, déterminer si on définit une action de G sur X :

1. $G = \mathbf{Z}$, $X = \mathbf{R}$, $n \cdot x = x + n$
2. $G = \mathbf{Z}$, $X = \mathbf{R}$, $n \cdot x = nx$
3. $G = \mathbf{Z}$, $X = \mathbf{R}$, $n \cdot x = 2^n x$
4. $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $X = \mathbf{Z}$, $\overline{k} \cdot x = (-1)^k x$
5. $G = \mathbf{Z}/6\mathbf{Z}$, $X = \mathbf{C}$, $\overline{k} \cdot z = \omega^k z$ où $\omega = e^{2i\pi/3}$
6. $G = \mathfrak{S}(E)$, $X = \mathcal{F}(E, \mathbf{R})$, $\sigma \cdot f = f \circ \sigma^{-1}$
7. $G = \mathfrak{S}(E)$, $X = \mathcal{F}(E, \mathbf{R})$, $\sigma \cdot f = f \circ \sigma$

Exercice 2 On considère l'application $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n) \times \mathbf{R}^n & \longrightarrow & \mathbf{R}^n \\ (f, x) & \longmapsto & f(x) \end{array} \right.$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une action de $\mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$ sur $\mathbf{R}^n$.
2. Décrire les orbites. L'action est-elle transitive ?
3. Pour $n = 2$, décrire le stabilisateur de $(1, 0)$ et le stabilisateur de $(1, 1)$.

Exercice 3 Décrire les orbites de l'action de $\mathrm{O}(\mathbf{R}^n)$ sur $\mathbf{R}^n$ définie par $f \cdot x = f(x)$.

Exercice 4 Dans $\mathbf{R}^2$, soit T un triangle équilatéral centré en 0, dont on note A, B et C les sommets. Soit G le sous-groupe des éléments de $\mathrm{O}(\mathbf{R}^2)$ qui laissent l'ensemble $\{A, B, C\}$ globalement invariant.

1. Rappeler quels sont les éléments de G. Donner un isomorphisme $G \simeq \mathfrak{S}_3$.
2. L'action naturelle de $\mathrm{O}(\mathbf{R}^2)$ sur $\mathbf{R}^2$ se restreint en une action de G. Décrire les orbites.

Exercice 5 Dans $\mathbf{R}^3$, soit T un tétraèdre régulier centré en 0, dont on note A, B, C et D les sommets. Soit G le sous-groupe des éléments de $\mathrm{O}(\mathbf{R}^3)$ qui laissent l'ensemble $X = \{A, B, C, D\}$ globalement invariant.

1. Montrer que l'action naturelle de G sur X est transitive.
2. Déterminer le stabilisateur d'un sommet.
3. En déduire que G est fini et déterminer son cardinal.
4. Montrer que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 6 Soit G un groupe agissant sur un ensemble X.

1. On suppose que G est d'ordre 156 et qu'il existe $x \in X$ dont le stabilisateur est d'ordre 12. Quel est le cardinal de l'orbite de x ?

2. On suppose que G est d'ordre 143 et que X est de cardinal 108. Montrer que G fixe au moins un point de X.

3. On suppose que G est d'ordre 15, que X est de cardinal 17 et que G agit sans point fixe. Déterminer le nombre d'orbites et leur cardinal.

4. On suppose que G est d'ordre 63 et que X est de cardinal 27. L'action de G peut-elle être transitive ?

Exercice 7 Soit G un groupe d'ordre p^k où p est un nombre premier et $k \geq 1$. On fait agir G sur lui-même par conjugaison. Démontrer que toute orbite non réduite à un singleton a un cardinal divisible par p. En déduire que le centre $Z(G) = \{g \in G \mid \forall g' \in G, gg' = g'g\}$ n'est pas trivial.

Exercice 8 Soit G un groupe d'ordre p^2 où p est un nombre premier.

1. Montrer que $Z(G)$ est d'ordre p ou p^2.

2. Supposons que $Z(G)$ soit d'ordre p. Soit $x \in G \setminus Z(G)$. On fait agir G sur lui-même par conjugaison.

   (a) Montrer que $x \in \mathrm{Stab}_G(x)$ puis que $Z(G)$ est un sous-groupe strict de $\mathrm{Stab}_G(x)$.

   (b) En déduire $\mathrm{Stab}_G(x) = G$ et trouver une contradiction.

3. Montrer que G est commutatif.

4. Montrer que G est isomorphe à $\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

Exercice 9 (petit théorème de Fermat et lemme de Cauchy) Soit G un groupe d'ordre $n \geq 1$. Soient p un nombre premier et $X = \{(g_1, \ldots, g_p) \in G^p \mid g_1 \cdots g_p = 1\}$.

1. Déterminer le cardinal de X.

2. Montrer que tout sous-groupe H de $\mathfrak{S}_p$ agit sur G^p par $\sigma \cdot (g_1, \ldots, g_p) = (g_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, g_{\sigma^{-1}(p)})$.

3. On considère le p-cycle $\sigma = (1\ 2 \cdots p)$ et le sous-groupe $H = \langle \sigma \rangle$. Vérifier que l'action de H sur G^p se retreint en une action sur X.

4. Quels sont les cardinaux possibles pour une orbite de X sous l'action de H ?

5. Décrire les orbites de cardinal 1. Montrer qu'il existe au moins une telle orbite.

6. On suppose $p \nmid n$. Montrer que G n'a pas d'élément d'ordre p et en déduire qu'il n'y a qu'une seule orbite de cardinal 1. En déduire $n^{p-1} \equiv 1 \mod p$.

7. On suppose $p \mid n$. Montrer qu'il y a au moins deux orbites de cardinal 1. En déduire que G possède au moins un élément d'ordre p.