Licence L1-SV Sciences du vivant 2018-2019

MAT206 : Introduction à la biologie mathématique et à la dynamique des populations

Second fascicule : Modèles en temps continu

Table des matières du second fascicule

Modèles en temps continu, sujets d'examen

11. Introduction aux systèmes dynamiques en temps continu 55
12. Modèles de Malthus en temps continu 61
13. TD sur les modèles de Malthus en temps continu 65
14. Systèmes dynamiques 1D en temps continu 71
15. TD sur les systèmes dynamiques 1D en temps continu 78
16. Systèmes dynamiques linéaires 2D en temps continu 82
17. TD sur les systèmes dynamiques linéaires 2D en temps continu 92
18. Sujets d'examen 99

À retenir

– Système dynamique en temps continu : $X'(t) = F(X(t))$, avec $X(t)$ état au temps t, X_0 état initial, F champ de vecteurs du système, $(X(t))_{t\geqslant 0}$ trajectoire.
– Chaque état $X(t)$ est entièrement déterminé par X_0 et F.
– Exemple 1D : $f(x) = b(x) - d(x) + a(x) - c(x)$, avec $b(x)$, $d(x)$, $a(x)$ et $c(x)$ taux de naissances, morts, immigrations, et émigrations par unité de temps dans une population de x individus.
– Analyse qualitative vs. analyse quantitative.

Comme mentionné dans le chapitre 2, les modèles de dynamique des populations qui utilisent une échelle de temps continu « vise(nt) à étudier l'évolution au cours du temps t de l'effectif $x(t)$ d'une population ou les effectifs $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, ..., de plusieurs populations en interaction » en considérant que « le temps t appartient à un intervalle, borné ou non, de la droite réelle ». L'outil mathématique principal de cette approche s'appelle le calcul différentiel, ce qui rattache l'étude de l'évolution de populations à la quasi-totalité de la physique post-newtonienne, que celle-ci s'intéresse aux phénomènes de vibration, aux tremblements de terre, ou aux mouvements des corps célestes pour ne donner que quelques exemples.

11.1. **Équations différentielles.** Chaque modèle en temps continu étudié dans ce cours aboutit à une équation différentielle du premier ordre, c'est-à-dire une relation entre le temps t, la ou les valeurs d'une ou plusieurs fonctions au temps t, et la ou les valeurs de leurs dérivées au temps t.

Dans le cas d'une seule quantité, résoudre une équation différentielle du premier ordre, c'est déterminer une fonction $x : t \mapsto x(t)$ à valeurs réelles, définie sur un intervalle I de la droite réelle $\mathbb{R}$ (avec éventuellement $I = \mathbb{R}$ tout entier), dérivable sur I, et telle que, pour une fonction $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times I \to \mathbb{R}$ donnée,

$$g(x', x, t) = 0$$

c'est-à-dire, pour tout t dans I,

$$g(x'(t), x(t), t) = 0$$

De même, dans le cas où on s'intéresse à plusieurs quantités en interaction, on cherche une fonction $X : t \mapsto X(t)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, définie sur un intervalle I de la droite réelle $\mathbb{R}$ (avec éventuellement $I = \mathbb{R}$ tout entier), dérivable sur I, et telle que, pour une fonction G définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times I$ donnée,

$$G(X', X, t) = 0$$

c'est-à-dire, pour tout t dans I,

$$G(X'(t), X(t), t) = 0$$

L'inconnue mathématique qui dans le cas du temps discret, était une suite $(x_n)_n$ ou $(X_n)_n$ indexée par les entiers, devient, dans le cas du temps continu, une fonction $x : t \mapsto x(t)$ ou $X : t \mapsto X(t)$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Dans ce cours, on ne s'intéressera qu'à des équations autonomes, c'est-à-dire de la forme

$$x' = f(x) \qquad \text{ou} \qquad X' = F(X)$$

donc à des fonctions $x : t \mapsto x(t)$ à valeurs réelles ou $X : t \mapsto X(t)$ à valeurs vectorielles, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (avec éventuellement $I = \mathbb{R}$ tout entier) et telles que, pour tout t dans I, pour des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ou $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ données,

$$x'(t) = f(x(t)) \qquad \text{ou} \qquad X'(t) = F(X(t))$$

Quelques exemples 1D.

Exemple 11.1. *L'équation $x' + 5x = 0$ peut s'écrire $x' = f(x)$ avec*

$$f(x) = -5x$$

Une solution de cette équation différentielle est la fonction

$$x : t \mapsto e^{-5t}$$

définie sur $I = \mathbb{R}$, puisque $x'(t) = -5e^{-5t} = -5x(t)$ pour tout t dans $\mathbb{R}$. Une autre solution, également définie sur $I = \mathbb{R}$, est la fonction

$$x : t \mapsto 42e^{-5t}$$

puisque $x'(t) = -42 \cdot 5e^{-5t} = -5x(t)$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.

Exemple 11.2. *L'équation $x' + 5x = 1$ peut s'écrire $x' = f(x)$ avec*

$$f(x) = -5x + 1$$

Une solution de cette équation différentielle est la fonction $x : t \mapsto \frac{1}{5}$, définie sur $I = \mathbb{R}$, puisque $x'(t) = 0 = -5x(t) + 1$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.

Exemple 11.3. *L'équation $x' - 3x = x^3 + \sin x$ peut s'écrire $x' = f(x)$ avec*

$$f(x) = 3x + x^2 + \sin x$$

Une solution de cette équation différentielle est la fonction $x : t \mapsto 0$, définie sur $I = \mathbb{R}$, puisque $x'(t) = 0 = 3x(t) + x^2(t) + \sin x(t)$ pour tout t dans $\mathbb{R}$.

On verra que les exemples 11.1 et 11.2 sont entièrement résolubles, au sens où on peut écrire explicitement leurs solutions, et que l'exemple 11.3 ne l'est pas, mais qu'on pourra tout de même collecter des renseignements très complets sur le comportement de ses solutions, par des méthodes qualitatives.

11.2. **Systèmes dynamiques en temps continu.**

Définition 11.4. *Un système dynamique en temps continu (autonome) est une équation différentielle (autonome)*

$$X'(t) = F(X(t))$$

La fonction $X : t \mapsto X(t)$, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (avec éventuellement $I = \mathbb{R}$ tout entier), à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, s'appelle une solution (ou une trajectoire) du système dynamique. La fonction $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ s'appelle le champ de vecteurs du système.

On voit que, pour déterminer la trajectoire future $(X(s))_{s>t}$, il est inutile de connaître t ou la trajectoire passée $(X(s))_{s<t}$, ..., ou d'autres quantités auxiliaires. Au contraire, la position $X(t)$ au temps présent et le champ de vecteurs F suffisent pour connaître toutes les valeurs futures $X(s)$ pour $s > t$.

Remarque 11.5. Lorsqu'on s'intéresse au nombre $N(t)$ d'individus présents au temps t dans une population donnée, on peut chercher à déterminer une équation différentielle satisfaite par $N(t)$. Malheureusement, $N(t)$ est toujours un entier donc, stricto sensu, $N(t)$ ne peut évoluer de façon différentiable mais seulement par sauts. Afin de tout de même bénéficier de la puissance des outils du calcul différentiel, on considère une quantité $x(t)$ à valeurs réelles, qui évolue de façon différentiable, et dont on estime que son évolution reflète celle de $N(t)$. Typiquement, $N(t)$ est grand donc on fixe une grande constante C et on considère l'évolution de la quantité

$$x(t) \approx \frac{N(t)}{C}$$

Ensuite, on retrouvera $N(t)$ à partir de $x(t)$ par la relation

$$N(t) \approx C \cdot x(t)$$

11.3. **Quelques rappels sur le processus de modélisation.** Dans chaque situation concrète : l'évolution d'une ou plusieurs populations dans un milieu donné, le comportement de réactifs chimiques placés dans une éprouvette, l'expansion d'une tumeur ou d'une épidémie, la désintégration d'atomes radio-actifs dans un morceau de bois, le comportement d'un gaz dans un récipient, etc., modéliser la situation consiste à réaliser au moins chacune des opérations **i.** à **iv.** ci-dessous.

i. Sélectionner un certain nombre d'observables : nombre d'individus, nombre de molécules, concentration en réactifs, nombre de cellules ou d'individus malades, nombre d'atomes radio-actifs, pression et température, ou d'autres.

Cette étape repose sur une abstraction, souvent violente, car en choisissant certains observables, on en ignore d'autres et on simplifie, souvent drastiquement, la situation réelle. Par exemple on peut dans un premier temps négliger l'âge des individus d'une population et les considérer tous identiques.

ii. Postuler une structure sous-jacente au phénomène et des relations satisfaites par la ou les quantités observables.

Ainsi, la décomposition de matériaux radioactifs comme le Radon obéit à la dynamique

$$x'(t) = -ax(t)$$

où $x(t)$ désigne la concentration de Radon à l'instant t et a est une constante positive. Pour une mesure réelle du phénomène, voir la figure 32.

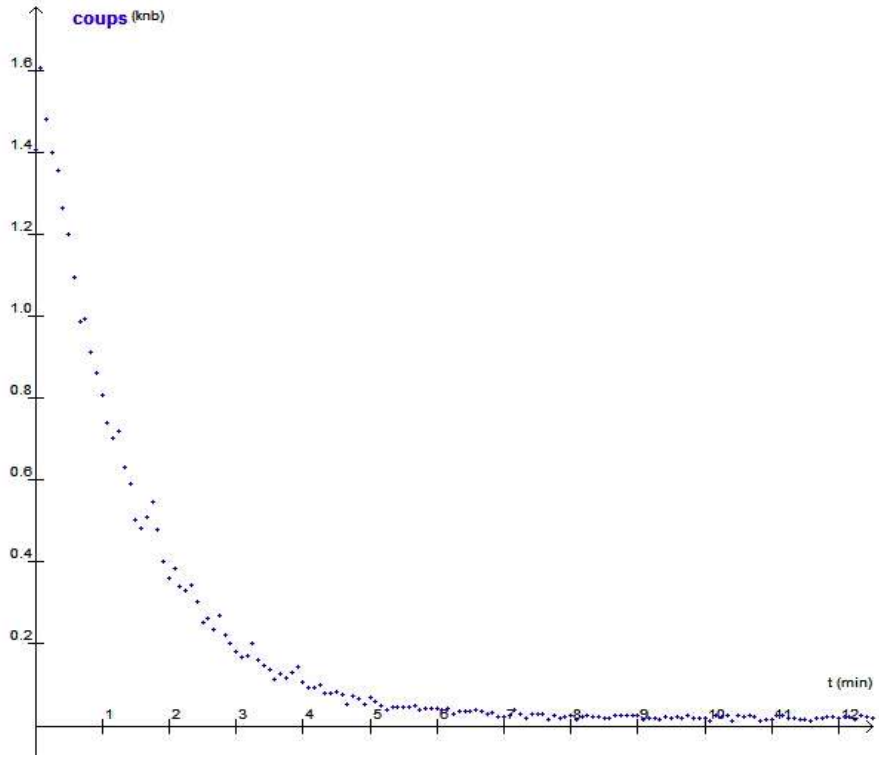

FIGURE 32. Acquisition de données de désintégration de Radon 220 par compteur-logiciel Jeulin^{TM}

.

Autre exemple, pour un système masselotte-ressort placé en position horizontale et sans frottement, le principe fondamental de la dynamique (appelé aussi deuxième loi de Newton) postule que la position $x(t)$ de la masselotte vérifie

$$mx''(t) = -kx(t)$$

où m désigne la masse de la masselotte et k la raideur du ressort. Il s'agit d'une équation différentielle du second ordre et non du premier ordre mais, en s'inspirant d'une technique vue dans le cas discret, on se ramènera à une équation différentielle du premier ordre en considérant le vecteur

$$X(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{pmatrix}$$

et en vérifiant que $X'(t) = F(X(t))$ pour le champ de vecteurs

$$F(v, x) = \begin{pmatrix} -(k/m)x \\ v \end{pmatrix}$$

... Mais si on considère qu'il est impossible d'ignorer les frottements, par exemple parce que l'ensemble a été placé dans un liquide visqueux, l'évolution de $x(t)$ sera plutôt décrite

par

$$mx''(t) = -kx(t) - \mu x'(t)$$

où μ désigne le coefficient de viscosité du milieu. Pour l'allure des solutions $(x(t))$ pour différentes valeurs de la viscosité, voir la figure 33.

On retrouve une équation différentielle du premier ordre $X'(t) = F(X(t))$ pour le même vecteur $X(t)$ vitesse-position, et pour le champ de vecteurs

$$F(v, x) = \begin{pmatrix} -(k/m)x - (\mu/m)v \\ v \end{pmatrix}$$

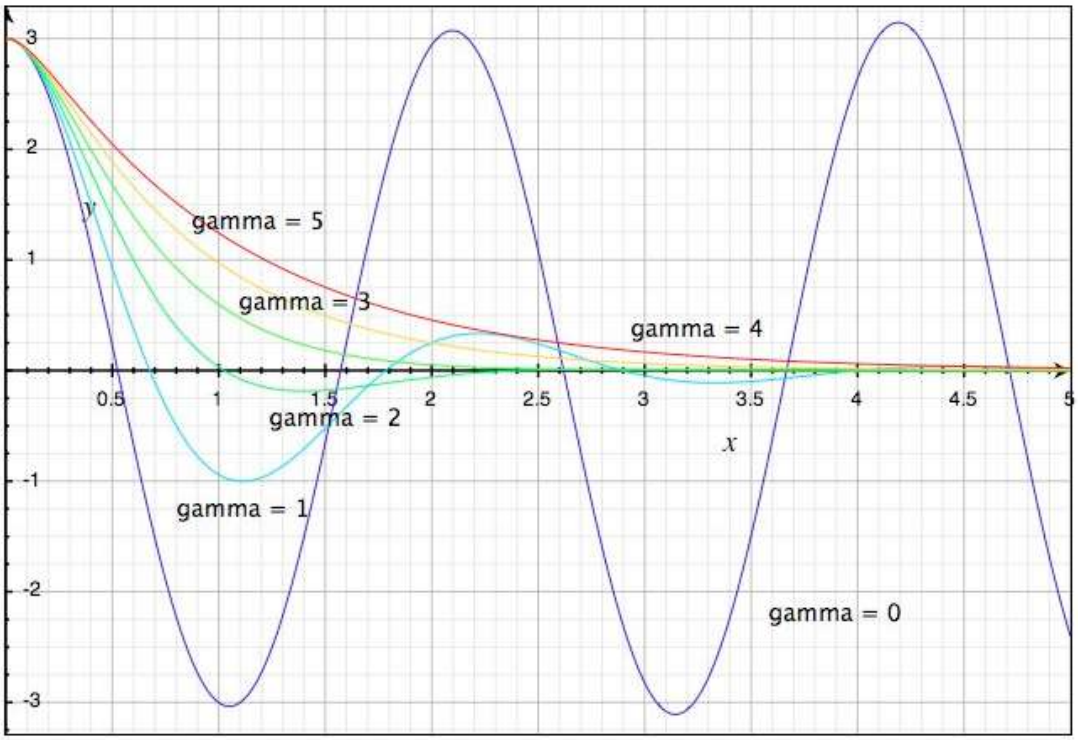

FIGURE 33. Trajectoires (position vs temps) d'un système masselotte-ressort : pas d'amortissement pour $\gamma = 0$, sous-amortissements pour $\gamma = 1$ et $\gamma = 2$, amortissement critique pour $\gamma = 3$, sur-amortissements pour $\gamma = 4$ et $\gamma = 5$

.

iii. Étudier mathématiquement ou numériquement le modèle : si possible, résoudre l'équation différentielle, sinon simuler ses solutions et recourir à leur étude qualitative. L'exploration du modèle mathématique peut faire apparaître des phénomènes imprévus, qui seront alors susceptibles de tests.

iv. Procéder à un retour a posteriori sur le modèle : c'est-à-dire comparer les valeurs théoriques (prévues par le modèle) aux données expérimentales et estimer la validité du modèle.

Cette partie est cruciale si on veut utiliser le modèle pour faire des prévisions dans des cas non mesurés. Notons qu'il n'y a pas en la matière de critère absolu de validation : une série d'expériences positives peut conférer un certain degré de plausibilité à un modèle donné mais elle ne démontre pas qu'il est « vrai ». En revanche, une expérience négative peut suffire à invalider un modèle donné. Dans ce cas, on doit examiner à nouveaux frais les observables choisies et/ou la relation postulée.

Au total, on considèrera avant tout les modèles mathématiques comme des outils pour penser. Certes, ils peuvent parfois être utilisés à des fins de prédiction, mais le plus souvent, ils servent en réalité à explorer les conséquences d'une hypothèse particulière à l'intérieur d'un système donné, à identifier les éléments clés du système, des liens entre variables ou entre des variables et des paramètres importants.

12. Modèles de Malthus en temps continu

À retenir

– Modèle de Malthus de paramètre a : champ de vecteurs $f(x) = ax$.
– Applicabilité, solution $x(t) = x_0 e^{at}$, extinction (si $a < 0$) vs. explosion (si $a > 0$).
– Comparaison de deux trajectoires $x(t) = x_0 e^{at}$ vs. $\bar{x}(t) = \bar{x}_0 e^{\bar{a}t}$ pour $a \neq \bar{a}$.
– Identification de a à partir de deux valeurs $x(t)$ et $x(s)$ pour $t \neq s$.
– Modèles affines : fonction de mise à jour $f(x) = ax + b$.
– Applicabilité, attractivité quand $a < 0$.
– Résolution des modèles affines pour $a \neq 0$: $y(t) = x(t) + (b/a)$, alors $(y(t))$ modèle de Malthus de paramètre a.

12.1. **Formulation mathématique.** Reprenons l'hypothèse de Malthus stipulant que « le nombre de naissances et de décès pendant une courte période sont tous deux proportionnels à l'effectif de la population au début de cette période et à la durée de celle-ci. » Si la population au temps t vaut $x(t)$ en temps continu, cette hypothèse signifie que les variations « instantanées » de $x(t)$ sont proportionnelles à la valeur de $x(t)$, c'est-à-dire,

$$\frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} = a \cdot x(t)$$

pour une constante a réelle donnée, au moins si δt est petit. En considérant la limite $\delta t \to 0$, le membre de gauche tend vers la dérivée $x'(t)$ donc on obtient le modèle suivant.

Définition 12.1. *Pour tout nombre réel a fixé, on appelle modèle de Malthus en temps continu de paramètre a le système dynamique en temps continu de dynamique*

$$f(x) = ax$$

correspondant à l'équation différentielle

$$x'(t) = ax(t)$$

Théorème 12.2. *Pour toute valeur de x_0, la solution x du modèle de Malthus de paramètre a telle que $x(0) = x_0$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et vaut*

$$x(t) = x_0 e^{at}$$

Plus généralement, pour tous temps t_0 et t,

$$x(t) = x(t_0) e^{a(t-t_0)}$$

Pour montrer le théorème, on considère la fonction auxiliaire

$$y(t) = e^{-at} x(t)$$

et on remarque que

$$y'(t) = e^{-at}(x'(t) - ax(t)) = 0$$

donc $y(t) = y(0)$ pour tout temps t, ce qui est équivalent au résultat cherché.

On peut remarquer que si x et $\bar{x}$ sont des solutions du modèle de Malthus de paramètre a alors

$$(x+\bar{x})' = x' + \bar{x}' = ax + a\bar{x} = a(x+\bar{x})$$

donc $x+\bar{x}$ est également une solution. De même, si x est une solution, alors

$$(cx)' = cx' = c(ax) = a(cx)$$

donc cx est également une solution, pour tout nombre c. On dit que le modèle de Malthus est un modèle linéaire.

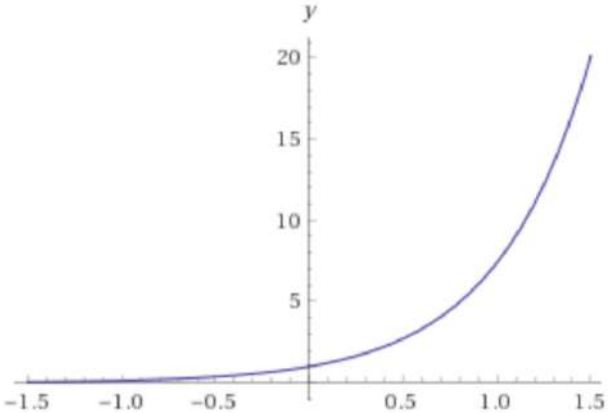

FIGURE 34. Une fonction exponentielle croissante : $y(t) = e^{2t}$

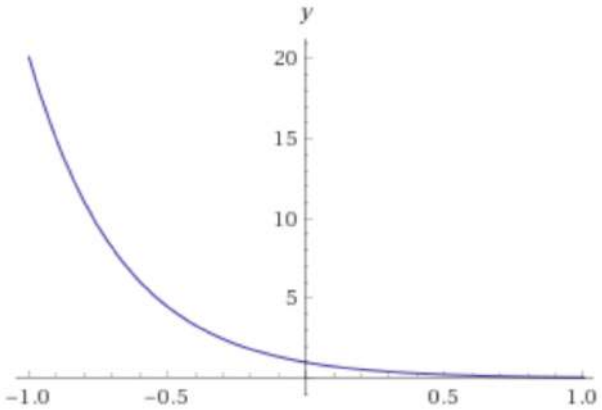

FIGURE 35. Une fonction exponentielle décroissante : $y(t) = e^{-3t}$

12.2. **Contexte.** Historiquement, Robert Malthus développe le modèle de la section 12.1 en 1796, en réaction à une proposition de loi de William Pitt le premier ministre britannique de l'époque. Pitt proposait de fournir une aide financière aux familles nombreuses les plus pauvres afin d'améliorer leurs conditions de vie. Dans la première version de son livre :

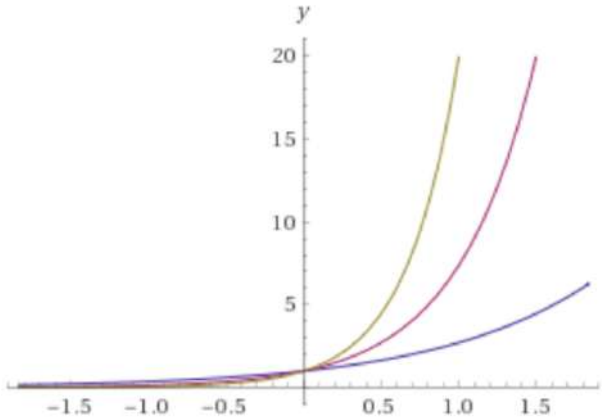

FIGURE 36. Croissances comparées des fonctions exponentielles $y(t) = e^t, e^{2t}, e^{3t}$

> *An essay on the Principle of Population, as It Affects the Future Improvement of the Society, With remarks on the speculations of Mr Godwin, Mr Condorcet and Other Writers*

publié de manière anonyme, Malthus s'oppose à cette mesure car il pense qu'elle va encourager un accroissement de la population selon une progression géométrique alors que la production de nourriture n'augmentera que de façon arithmétique, et qu'il en résultera famines et épidémies.

L'œuvre de Malthus sera reprise par de nombreux auteurs. Par exemple en 1859, dans l'introduction de son livre *L'origine des espèces au moyen de la sélection naturelle ou la préservation des races favorisées dans la lutte pour la vie*, Darwin écrit :

> *In the next chapter, the Struggle for Existence amongst all organic beings throughout the world, which inevitably follows from their high geometrical powers of increase, will be treated of. This is the doctrine of Malthus, applied to the whole animal and vegetable kingdoms. As many more individuals of each species are born than can possibly survive ; and as, consequently, there is a frequently recurring struggle for existence, it follows that any being, if it vary however slightly in any manner profitable to itself, under the complex and sometimes varying conditions of life, will have a better chance of surviving, and thus be naturally selected. From the strong principle of inheritance, any selected variety will tend to propagate its new and modified form.* [8]

Les idées de Malthus inspireront également Verhulst et beaucoup d'autres, qui développeront, comme nous le verrons plus tard, d'une part des modèles échappant au grand inconvénient de la croissance sans limite des modèles de Malthus, et d'autre part des modèles avec interactions entre espèces, afin de tenir compte par exemple des relations de compétition.

8. `https://www.theguardian.com/science/2008/feb/09/darwin.introduction`

Pour plus de détails, on se reportera sans hésiter au petit livre, très abordable et excellent, *Histoires de mathématiques et de populations* de Nicolas Bacaër (Cassini).

Au total, la dynamique de Malthus en temps continu n'est qu'une version tout à fait simpliste d'une classe de modèles plus élaborés visant à mieux rendre compte des situations concrètes. Une idée féconde, déjà explorée dans le cas des modèles en temps discret, sera de reprendre la forme générale des dynamiques de Malthus

$$x'(t) = \alpha(x(t)) \cdot x(t)$$

mais avec un facteur « malthusien » $\alpha(x(t))$ dépendant de la population $x(t)$ au temps t. Typiquement, on s'intéressera à des cas où la fonction α est décroissante, par exemple le modèle logistique correspond au choix

$$\alpha(x) = a - bx$$

Cependant, la compréhension de tous ces modèles plus élaborés reposant avant tout sur celle du « modèle zéro » dû à Malthus, on se tourne d'abord vers... les exercices !

13. TD sur les modèles de Malthus en temps continu

Exercice 43. On considère le processus de reproduction d'une population dense et sans contrainte. On note $x(t)$ la taille de la population au temps t, et n_i le nombre de rapports sexuels de l'individu i avec des individus de sexe opposé de cette population, par unité de temps. On fait les hypothèses suivantes.

a) La valeur moyenne des n_i reste constante et égale à $\bar{n}$.
b) Le sex ratio de la population reste constant et égal à 1:1.
c) Le taux de fécondité moyen d'un rapport sexuel reste constant et égal à φ.
d) Le taux de mortalité, égal au ratio du nombre de morts par unité de temps par la population totale $x(t)$, reste constant et égal à ϑ.

1. Montrer que le nombre $s(t)$ de rapports sexuels par unité de temps vaut en moyenne

$$s(t) = \frac{1}{2}\bar{n}x(t)$$

2. Exprimer le nombre de naissances par unité de temps en fonction de $s(t)$.

3. En déduire que la population $x(t)$ évolue selon un modèle de Malthus $x'(t) = ax(t)$ pour une valeur de a que l'on calculera en fonction de $(\bar{n}, \varphi, \vartheta)$.

4. En déduire une condition portant sur les paramètres $(\bar{n}, \varphi, \vartheta)$ pour que la population survive. ///

Exercice 44. On reprend le modèle de l'exercice 43, mais pour une population raréfiée et sans contraintes. Les hypothèses b), c) et d) sont toujours valides mais l'hypothèse a) est remplacée par :

e) Pour modéliser la rareté de la population, on considère que le territoire est divisé en C cases d'aire égale avec $C \gg x(t)$, et que les individus sont répartis aléatoirement sur le territoire dans chacune de ces cases. De plus, des individus situés dans des cases différentes ne se rencontrent pas et des individus situés dans la même case se rencontrent avec une probabilité p indépendante de la case et constante dans le temps.

On considère donc que chaque individu rencontre en moyenne une proportion p des individus de sexe opposé situés dans la même case que cet individu et que toute rencontre d'individus de sexes opposés donne lieu à un rapport sexuel.

1. Montrer qu'alors le nombre moyen total de rapports sexuels par unité de temps vaut

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x(t)}{2C} \cdot x(t) \cdot p$$

2. En déduire que la population $x(t)$ évolue selon un modèle quadratique

$$x'(t) = bx(t)^2 - ax(t)$$

pour des valeurs de a et b que l'on calculera en fonction de $(C, p, \varphi, \vartheta)$.

(On verra plus tard que, sous ce modèle, pour toute condition initiale $x(0) < a/b$, la population s'éteint au sens où $x(t) \to 0$.) ///

Exercice 45 (D'après le partiel de MAT127 en 2011)**.** Après une injection intraveineuse de glucose, le taux de glycémie d'un individu (c'est à dire son taux de glucose dans le sang) décroît selon la loi

$$g' + Kg = 0$$

Le temps t est mesuré en minutes, $g(t)$ désigne le taux de glycémie excédentaire (la différence entre le taux de glycémie observé et le taux de glycémie du sujet à l'état normal), mesuré en grammes par litre, et K est une constante appelée coefficient d'assimilation glucidique, qui dépend des sujets. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, juste après l'injection, le taux de glycémie d'un sujet vaut 3 grammes par litre alors que son taux de glycémie normal vaut 1 gramme par litre, donc $g(0) = 2$.

1) Préciser le signe de K (à justifier avec soin).

2) Déterminer l'expression de $g(t)$ puis donner l'allure de la courbe représentative de g.

3) On considère un sujet pour lequel $K = 1,5 \cdot 10^{-2}$ min^{-1}. Calculer le temps nécessaire pour que son taux de glycémie excédentaire ait diminué de 1%.

4) Déterminer la formule donnant le coefficient K en fonction de $g_1 = g(t_1)$, g_1 étant le taux de glycémie excédentaire à l'instant $t_1 > 0$ donné.

5) La valeur moyenne de K chez un individu normal est comprise entre $1,06 \cdot 10^{-2}$ min^{-1} et $2,42 \cdot 10^{-2}$ min^{-1}. Préciser si les résultats d'un sujet présentant un taux de glycémie excédentaire de $1,20$ grammes par litre 30 minutes après l'injection sont normaux. ///

Exercice 46. Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction $y : t \mapsto y(t)$ à valeurs réelles de la variable t. La vitesse de prolifération des microbes à l'instant t est la dérivée $y'(t)$ de cette fonction. On a constaté que

$$y'(t) = ky(t)$$

où k est un coefficient réel strictement positif. On désigne par y_0 le nombre de microbes à l'instant $t = 0$ et on suppose qu'au bout de 2 heures, le nombre de microbes a quadruplé.

1) Calculer en fonction de y_0 le nombre de microbes au bout de 3 heures.

2) Calculer la valeur de y_0 si la culture contient 6400 microbes au bout de 5 heures. ///

Exercice 47 (D'après le partiel de MAT127 en 2010)**.** L'uranium et ses isotopes sont des éléments radioactifs lourds qui ont été créés lors de l'explosion des étoiles (super novae). Le but de cet exercice est de déterminer l'époque à laquelle l'uranium présent sur Terre a été créé.

On note $x_8(t)$ et $x_5(t)$ le nombre d'atomes des éléments radio-actifs ^{238}U et ^{235}U dans un échantillon d'uranium donné. La demi-vie de l'uranium 238 vaut $\tau_8 = 4,51.10^9$ années, celle de l'uranium 235 vaut $\tau_5 = 0,707.10^9$ années. On rappelle que la demi-vie d'un modèle exponentiel décroissant désigne le temps nécessaire pour que la population initiale soit réduite de moitié. On suppose que l'uranium a été créé au temps $t = 0$.

1) Calculer $x_8(t)$ et $x_5(t)$ en fonction de t, $x_8(0)$ et $x_5(0)$.

2) En 1946, le ratio ${}^{238}U/{}^{235}U$ valait $137,8$ dans n'importe quel échantillon d'uranium. En supposant que ce ratio valait 1 au moment de la création de l'uranium, montrer que l'âge de l'uranium est d'environ $5,96 \cdot 10^9$ années environ.

3) Sachant que l'uranium est présent de l'écorce jusqu'au noyau même de notre planête (il participe à maintenir la chaleur du coeur métallique), en déduire une borne inférieure de l'âge de la Terre. ///

Exercice 48. On suppose qu'une population suit la loi de Malthus $y'(t) = ay(t)$, où $y(t)$ est le nombre d'individus à l'instant t et a est une constante réelle positive.

On constate que cette population a augmenté de 50% entre le 1er janvier 1990 et le 1er janvier 2015.

a) Calculer la constante a correspondant à cette population, l'unité de temps étant l'année.

b) On note y_0 le nombre d'individus dans cette population le 1er janvier 1990. Calculer en fonction de y_0 le nombre d'individus au 1er janvier 2015, au 1er janvier 2040, au 1er janvier 2090, et enfin, au 1er janvier 2100.

c) Calculer le temps de doublement de cette population et préciser si ce temps de doublement dépend de la population initiale et/ou de l'instant inital. ///

Exercice 49. On suppose qu'une population double de taille en 100 ans et triple en 200 ans. Préciser s'il est raisonnable de modéliser l'évolution de cette population en utilisant une loi de Malthus. ///

Exercice 50. On admet que la population mondiale suit une loi de Malthus $x' = ax$, et on observe que cette population a doublé entre 1928 et 1970.

a) Calculer la constante a, l'unité de temps étant l'année.

b) Imaginez que vous viviez en 1970 et que vous désirez prévoir l'évolution de la population mondiale dans les années suivantes en vous basant sur la population mondiale en 1970, évaluée à 3,696 milliards d'individus. Vous ne connaissez que le modèle de Malthus et vous adoptez la valeur de la constante a calculée à la question précédente.

Calculez la population que vous prévoyez pour la fin de l'année 1980, puis pour la fin de l'année 1990, puis pour la fin de l'annde 2000, puis pour la fin de l'année 2005.

Comparez vos prédictions avec les statistiques a posteriori de 4,442 milliards d'individus pour l'année 1980, de 5,279 milliards d'individus pour l'année 1990, de 6,085 milliards d'individus pour l'année 2000, et de 6,500 milliards d'individus pour l'année 2005.

Précisez si ces résultats semblent satisfaisants. Précisez si on observe une déviation systématique.

c) Calculez la population prévue par votre modèle pour 2650.

Sachant que la superficie des terres émergées est d'environ $1,494 \cdot 10^{14}$ m^2, calculez la surface au sol dont disposerait chaque individu en 2650.

Précisez si on doit en déduire qu'il est mathématiquement prouvé que cette catastrophe arrivera et que les humains finiront entassés les uns sur les autres, ou bien que votre modèle n'est pas valable pour des prévisions à long terme. ///

Exercice 51 (Synthèse des exercices précédents)**.** On considère une population dont le nombre d'individus au temps 0 vaut n et qui suit une loi de Malthus de paramètre $k > 0$.

1) Déterminer le temps t_2 après lequel la population aura doublé. Préciser si t_2 dépend de n.

2) Déterminer le temps t_3 après lequel la population aura triplé. Préciser si t_3 dépend de n.

3) Soit $k \geqslant 1$ un entier. Déterminer le temps t_k après lequel la population aura été multipliée par k. Préciser si t_k dépend de n. ///

Exercice 52 (Demi-vie du radium)**.** L'atome de radium, en se désintégrant, donne de l'hélium et du radon, lui-même radioactif. La masse $m(t)$ d'un échantillon de radium est une fonction décroissante du temps. La vitesse de désintégration $m'(t)$ est proportionnelle à la masse de l'échantillon à l'instant t donc $m' = -km$ où k est une constante réelle.

1) Calculer $m(t)$.

2) On observe que la masse de radium diminue de $0,043\%$ par an. Calculer k.

3) Montrer qu'il existe un temps $t_{1/2}$ tel que, pour tout temps t,

$$m(t + t_{1/2}) = \tfrac{1}{2}m(t)$$

Calculer la valeur de $t_{1/2}$ en fonction de k. Le nombre $t_{1/2}$ s'appelle la demi-vie du radium. ///

Exercice 53 (Datation au carbone 14)**.** Le carbone contenu dans la matière vivante contient une infime proportion de l'isotope radioactif ^{14}C. Ce carbone radioactif provient du rayonnement cosmique de la haute atmosphère. Grâce à un processus d'échanges complexe, toute matière vivante maintient une proportion constante de ^{14}C au sein du carbone qu'elle contient, essentiellement constitué de l'isotope stable ^{12}C. Après la mort de l'organisme, les échanges cessent et la quantité de carbone radio-actif diminue puisque celle-ci perd 1/8000 de sa masse chaque année. Ce phénomène permet de déterminer la date de la mort d'un individu.

1) Des fragments de squelette humain de type Néanderthal sont retrouvés dans une caverne en Palestine. L'analyse montre que la proportion de ^{14}C n'est que $6,24\%$ de ce qu'elle serait dans les os d'un être vivant. Déterminer la date de la mort de l'individu.

2) Calculer la demi-vie du carbone ^{14}C, c'est à dire le temps au bout duquel la moitié du carbone ^{14}C est desintégrée.

3) En 1868, lors de la construction d'une voie ferrée devant relier Périgueux à Agen, on découvrit des restes humains dans une caverne située à Cro-Magnon (Dordogne, commune des Eyzies-de-Tayac). Philip van Doren, dans son livre *Prehistoric Europe, from Stone Age to the early greeks*, estime que cet homme vivait entre 30 000 ans et 20 000 ans avant J.-C. Calculer la fourchette dans laquelle se situe le rapport entre les proportions de ^{14}C présent dans ce squelette et dans les os d'un être vivant. ///

Exercice 54. Dans les exercices qui suivent, on considère des équations différentielles de la forme

$$(*) \qquad x' = ax + b$$

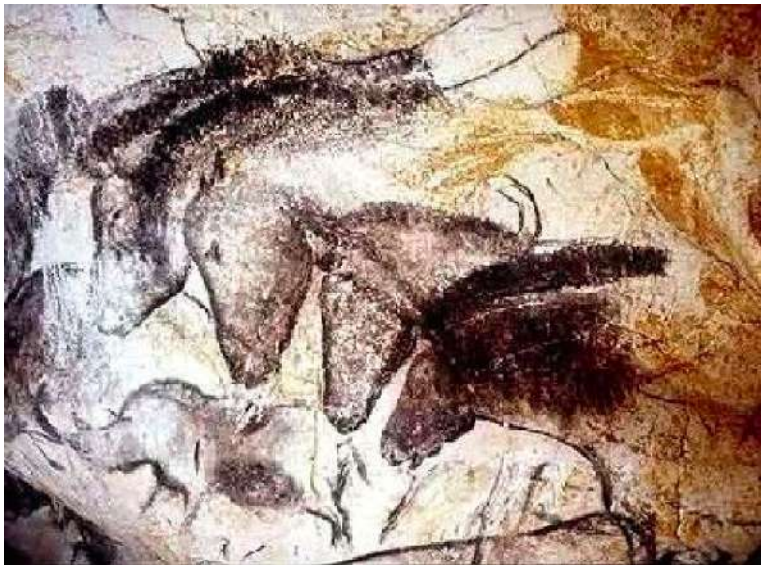

FIGURE 37. Une des premières datations par la méthode du carbone 14 a été effectuée en 1950 sur des morceaux de charbon de bois trouvés dans la Grotte de Lascaux (Dordogne, commune de Montignac)

où a et b sont des constantes réelles. Le but de cet exercice est résoudre de telles équations.

1) Montrer que $(*)$ admet une solution constante, que l'on notera x^* et qu'on appellera un équilibre du système.

2) Montrer que si x et $\bar{x}$ sont des solutions de $(*)$, alors $x - \bar{x}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$. Résoudre cette équation.

3) En déduire que toutes les solutions de $(*)$ sont de la forme $x(t) = x^* + Ce^{at}$.

4) Enfin, donner une expression de C en fonction de x^* et x_0. ///

Exercice 55. Une citerne calorifugée est chauffée par une résistance. La température $\Theta(t)$ de la citerne au temps vérifie l'équation différentielle

$$\Theta' = a - b\Theta$$

avec $a = 2,088 \cdot 10^{-2}$ et $b = 2,32 \cdot 10^{-4}$ lorsque t est exprimé en secondes et $\Theta(t)$ en degrés Celsius. On suppose que la température initiale de la citerne vaut 20 degrés Celsius.

1. Calculer le temps au bout duquel la température de la citerne atteint 80 degrés Celsius.

2. Calculer le temps au bout duquel la température de la citerne atteint 92 degrés Celsius. ///

Exercice 56 (Nutriments dans une cellule)**.** Des nutriments sont absorbés par une cellule à la vitesse constante de r molécules par unité de temps et en sont éliminés à une vitesse proportionnelle à leur concentration $c(t)$ dans la cellule à l'instant t. Ce processus se traduit par l'équation

$$c'(t) = r - kc(t)$$

Résoudre cette équation. Préciser si $c(t)$ va tendre vers un équilibre c^* et si c'est le cas, calculer la valeur de c^*. ///

Exercice 57 (Refroidissement d'un solide)**.** Un solide dont la température est de 70 degrés Celsius est placé dans une pièce dont la température est de 20 degrés Celsius. Les dimensions du solide sont très faibles par rapport à celles de la pièce. On désigne par $\Theta(t)$ la température du solide mesurée en degrés Celsius à l'instant t mesuré en minutes. La loi de refroidissement des corps stipule que la vitesse de refroidissement $\Theta'(t)$ est proportionnelle à la différence entre la température du corps $\Theta(t)$ et la température ambiante.

1) Sachant qu'au bout de $t_1 = 5$ minutes, $\Theta(t_1) = 60$ degrés Celsius, déterminer $\Theta(t)$ pour tout temps t. On rappelle que $\Theta(0) = 70$ degrés Celsius.

2) Calculer la température du solide au bout de 20 minutes.

3) Tracer le graphe de Θ.

4) Préciser si la température du solide peut atteindre celle de la pièce. ///

Exercice 58 (Température d'un bloc de céramique)**.** Un bloc de céramique est placé dans un four maintenu à une température constante de 1000 degrés Celsius. Les variations de la température $x(t)$ du bloc au temps t sont données par l'équation différentielle

$$x' = k \cdot (1000 - x)$$

où k désigne une constante.

1) Résoudre cette équation.

2) Le bloc initialement à température 40 degrés Celsius est placé dans le four au temps $t = 0$. Calculer la température du bloc au temps $t = 3$ si sa température au temps $t = 1$ vaut 160 degrés Celsius. ///

À retenir

– Modèle logistique : $f(x) = ax(1 - x/K)$ avec $a > 0$ et $K > 0$.
– Comportement du modèle logistique pour $x_0 < 0$ (explosion future), pour $0 < x_0 < K$ (convergence vers 0 et vers K en temps infini) et pour $x_0 > K$ (explosion passée en temps fini).
– (En toute dimension) Théorème de Cauchy-Lipschitz : condition d'existence et unicité des solutions, intervalle temporel maximal d'existence.
– (En toute dimension) Des solutions différentes ne se croisent pas, même valeur seulement en cas de solutions décalages temporels, aucune solution ne passe par un point fixe à part la solution stationnaire égale à ce point.
– (En 1D) Théorème de la monotonie (4 cas)
– (En 1D) Pour toute condition initiale située entre deux points fixes la trajectoire est définie pour tout temps et admet les points fixes pour limites passée et future.
– (En 1D) Diagrammes de phase.

En 1828, inspiré par les travaux de son compatriote Adolphe Quételet, le mathématicien belge Pierre-François Verhulst propose d'étudier l'évolution de la taille $x(t)$ d'une population en utilisant le modèle logistique

$$x'(t) = ax(t)\left(1 - \frac{x(t)}{K}\right)$$

pour des paramètres a et K strictement positifs donnés. Dans son article *Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement*, Verhulst écrit :

> *On sait que le célèbre Malthus a établi comme principe que la population humaine tend à croître en progression géométrique, de manière à se doubler après une certaine période, par exemple, tous les vingt-cinq ans. Cette proposition est incontestable si on fait abstraction de la difficulté croissante de se procurer des subsistances (...). L'accroissement virtuel de la population trouve donc une limite dans l'étendue et la fertilité du pays, et la population tend, par conséquent, de plus en plus à devenir stationnaire.*

Verhulst cherche donc avant tout à remédier au défaut que les modèles de Malthus ne menant pas à l'extinction prédisent une croissance illimitée. Le même article donne, pour le modèle logistique, une formule explicite pour t en fonction de $x(t)$ et des paramètres $(a, K, x(0))$ (voir la section 14.1 ci-dessous) et fait la remarque que trois observations du système en des temps dont les écarts sont connus suffisent à déterminer ces paramètres (voir l'exercice 71 ci-dessous). Verhulst s'intéresse également à diverses autres corrections du modèle de Malthus de la forme

$$x'(t) = ax(t) - g(x(t))$$

pour $g(x) = cx^3$, pour $g(x) = cx^4$ et, de façon plus surprenante, pour $g(x) = c \log x$.

Pour plus de détails, on se reportera comme d'habitude à l'excellent petit livre de Nicolas Bacaër, *Histoires de mathématiques et de populations* (Cassini).

Dans ce chapitre, on résout le modèle logistique puis on étudie le problème de l'existence et de l'unicité des solutions d'équations différentielles autonomes non linéaires, enfin on déduit de ces résultats théoriques des propriétés qualitatives générales des solutions.

14.1. **Résolution du modèle logistique.** Soit $(x(t))$ une solution du système dynamique $x' = f(x)$ pour

$$f(x) = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

avec condition initiale $x(t_0) = x_0$. On voit que $f(0) = f(K) = 0$ donc, si $x_0 = 0$ ou $x_0 = K$, alors $x(t) = x_0$ pour tout t. Supposons désormais que $x_0 > 0$ et considérons la fonction

$$y(t) = \frac{1}{x(t)} - \frac{1}{K}$$

Au moins pour t assez proche de t_0, $x(t) \neq 0$ par continuité donc $y(t)$ est bien définie. De plus,

$$y'(t) = -\frac{x'(t)}{x^2(t)} = -\frac{a}{x(t)} + \frac{a}{K} = -ay(t)$$

donc y est la solution d'un modèle de Malthus de paramètre a. On en déduit

$$y(t) = y(t_0)e^{-a(t-t_0)}$$

ce qui, une fois retranscrit en termes de $x(t)$, donne

$$x(t) = \frac{x_0 K}{x_0 + (K - x_0)e^{-a(t-t_0)}}$$

Quelques conséquences de cette formule explicite :

— Si $x_0 = 0$, et même si on a dû supposer que $x_0 \neq 0$ pour obtenir la formule explicite, celle-ci prédit correctement que $x(t) = 0$ pour tout t dans $I = \mathbb{R}$.

— Si $x_0 = K$, la formule explicite prédit correctement que $x(t) = K$ pour tout t dans $I = \mathbb{R}$.

— Si $0 < x_0 < K$, alors la fonction x est croissante et définie sur $I = \mathbb{R}$, $x(t) \to 0$ quand $t \to -\infty$ et $x(t) \to K$ quand $t \to \infty$.

— Si $x_0 > K$, alors la fonction x est décroissante, de nouveau $x(t) \to K$ quand $t \to +\infty$, mais la fonction x n'est définie que sur $I =]t_-, +\infty[$, pour une valeur finie $t_- < t_0$ dépendant des conditions initiales (x_0, t_0), et $x(t) \to +\infty$ quand $t \to t_-$.

  On peut même calculer t_- puisque le temps t_- correspond au temps qui annule le dénominateur de la formule donnant $x(t)$, c'est-à-dire $t_- = \tau(x_0, t_0)$ avec, pour tout $z > K$ et pour tout s,

$$\tau(z, s) = s + \frac{1}{a}\log\left(1 - \frac{K}{z}\right)$$

— Même si le cas n'a pas de signification pour modéliser des populations, on peut également considérer les valeurs initiales $x_0 < 0$. Alors la fonction x est décroissante, $x(t) \to 0$ quand $t \to -\infty$ et la fonction x n'est définie que sur $I =]-\infty, t_+[$, pour une valeur finie $t_+ > t_0$ dépendant des conditions initiales (x_0, t_0), donnée de nouveau par la formule $t_+ = \tau(x_0, t_0)$, qui, quand $x_0 < 0$, fournit bien une valeur $t_+ > t_0$.

On remarque qu'en toute généralité, les solutions d'un système dynamique en temps continu peuvent être définies sur $I = \mathbb{R}$ tout entier, ou seulement sur un intervalle borné inférieurement $I =]t_-, +\infty[$ ou seulement sur un intervalle borné supérieurement $I =]-\infty, t_+[$. On verra même des cas où la solution n'existe que sur un intervalle borné inférieurement et supérieurement $I =]t_-, t_+[$, pour des valeurs finies $t_- < t_0 < t_+$ dépendant de (t_0, x_0).

Une autre propriété des solutions du modèle logistique que l'on va retrouver en toute généralité est que chaque solution $(x(t))$, définie sur un intervalle I, est ou bien constante sur I tout entier (et dans ce cas, $I = \mathbb{R}$), ou bien strictement croissante sur I tout entier, ou bien strictement décroissante sur I tout entier, et que les limites de $x(t)$ aux bords de l'intervalle de définition I sont $+\infty$ ou $-\infty$ ou un point fixe de f.

Rappelons que les solutions des modèles de Malthus vérifient également ces propriétés, mais pour l'intervalle de définition $I = \mathbb{R}$ et le seul point fixe 0.

Enfin, on mentionne que, même si le modèle de Malthus est résoluble et si on a su résoudre explicitement le modèle logistique grâce à une astuce de calcul, on va développer dans le reste du chapitre des outils qualitatifs redonnant directement dans le cas logistique à peu près toutes les conséquences énumérées ci-dessus sans recourir à des formules explicites. Ainsi, on pourra appliquer ces outils aux cas innombrables où l'équation différentielle n'est pas résoluble explicitement.

On commence par éliminer les cas pathologiques, en en donnant un exemple classique.

14.2. **Un « mauvais » cas.** Les modèles de Malthus et les modèles logistiques, pour toute condition initiale, admettent une solution unique. Dans cette partie, on montre que cette propriété cruciale peut ne pas être satisfaite. Pour cela, on considère l'équation différentielle

$$x' = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$$

avec condition initiale

$$x(0) = 0$$

Une simple vérification permet de montrer que, pour tous $u \leqslant 0 \leqslant v$, la fonction $x_{u,v}$ définie par

$$x_{u,v}(t) = \begin{cases} (t-u)^3 & \text{si} \quad t < u \\ 0 & \text{si} \quad u \leqslant t \leqslant v \\ (t-v)^3 & \text{si} \quad t > v \end{cases}$$

est bien solution. La figure 38 donne le graphe des fonctions $x_{-1,3}$ et $x_{-2,2}$.

Cette situation, à la rigueur excitante mathématiquement parlant, constitue une vraie catastrophe dans une perspective de modélisation puisque, en pratique, on se retrouve

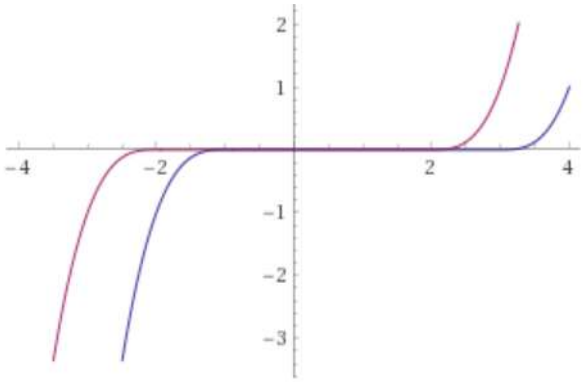

FIGURE 38. Solutions $x_{-1,3}$ et $x_{-2,2}$ de la « mauvaise » équation différentielle

incapable de prédire le comportement du système étudié. On va donc s'empresser de délimiter un cadre où ce genre de « plaisanterie » ne peut pas se produire.

14.3. **Cauchy-Lipschitz et comment s'en servir.** Le résultat théorique qui permet de s'assurer de l'existence des solutions d'une équation différentielle et de leur unicité est valide sous des conditions de régularité de la dynamique appelées conditions de Cauchy-Lipschitz.

Définition 14.1 (Conditions de Cauchy-Lipschitz)**.** *Si U est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ (avec éventuellement $U = \mathbb{R}$ tout entier), on dit que $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^1 sur U si f est continue sur U, dérivable sur U, et si f' est elle-même continue sur U.*

De même, si U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ (avec éventuellement $U = \mathbb{R}^2$ tout entier), on dit que $F : U \to \mathbb{R}^2$ est de classe C^1 sur U si F est continue sur U, différentiable sur U, et si ses dérivées partielles $\partial F/\partial x$ et $\partial F/\partial y$ sont continues sur U.

Théorème 14.2 (Cauchy-Lipschitz)**.** *En 1D, soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 sur U, où U est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout temps t_0 dans $\mathbb{R}$ et tout x_0 dans U, le système dynamique $x' = f(x)$ de condition initiale $x(t_0) = x_0$ admet une solution unique définie sur un intervalle ouvert maximal $I(t_0, x_0)$ de $\mathbb{R}$ pouvant dépendre de (t_0, x_0) et contenant t_0.*

De même, en 2D, soit $F : U \to \mathbb{R}^2$ une fonction de classe C^1 sur U, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Alors, pour tout temps t_0 dans $\mathbb{R}$ et tout X_0 dans U, le système dynamique $X' = F(X)$ avec condition initiale $X(t_0) = X_0$ admet une solution unique définie sur un intervalle ouvert maximal $I(t_0, X_0)$ de $\mathbb{R}$ pouvant dépendre de (t_0, X_0) et contenant t_0.

On notera $I(t_0, x_0)$ et $I(t_0, X_0)$ l'intervalle ouvert maximal contenant t_0 fourni par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

On prendra garde à ne pas confondre les intervalles « temporels » $I(t_0, x_0)$ et $I(t_0, X_0)$, avec les ouverts « spatiaux » U, contenus dans l'espace des conditions initiales $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^d$. Par exemple, en 1D, la solution $x(t)$ existe pour tout temps t dans un intervalle $I(t_0, x_0)$ contenant t_0 et, pour tout temps t dans $I(t_0, x_0)$, la position $x(t)$ appartient à l'ouvert U contenant x_0.

On déduit du théorème de Cauchy-Lipschitz les conséquences importantes rassemblées dans le corollaire 14.3.

On rappelle qu'un point x^* de $\mathbb{R}$ est dit stationnaire pour la dynamique f si $f(x^*) = 0$. De même, un point X^* de $\mathbb{R}^2$ est dit stationnaire pour la dynamique F si $F(X^*) = 0$.

Corollaire 14.3 (Des solutions différentes ne se croisent pas)**.** *1) En 1D, sous les conditions de Cauchy-Lipschitz, des solutions différentes $(x(t))$ et $(\bar{x}(t))$ de l'équation différentielle $x' = f(x)$ ne se croisent pas, au sens où, si $x(t_1) \neq \bar{x}(t_1)$ pour un temps donné t_1, alors $x(t) \neq \bar{x}(t)$ pour tout temps t.*

2) En 1D, ses solutions $(x(t))$ et $(\bar{x}(t))$ qui prennent une même valeur s'obtiennent par une translation temporellle au sens où, si $x(t_1) = \bar{x}(t_2)$ pour des temps donnés t_1 et t_2, alors $x(t) = \bar{x}(t + t_2 - t_1)$ pour tout temps t.

3) En 1D, une solution ne passe pas par un point stationnaire (sauf si cette solution est constante et tout le temps égale au point stationnaire).

4) Les résultats de 1), 2) et 3) sont encore vrais en 2D (et en toute dimension).

Le théorème suivant est spécifique aux modèles 1D.

Théorème 14.4 (Théorème de la monotonie : en 1D, les solutions non stationnaires sont strictement monotones)**.** *Sous les conditions de Cauchy-Lipschitz, soit $(x(t))$ une solution maximale de l'équation différentielle $x' = f(x)$ avec condition initiale $x(t_0) = t_0$, définie sur l'intervalle maximal $I(t_0, x_0) =]t_-, t_+[$ où t_- et t_+ dépendent de (t_0, x_0) et peuvent être finis ou infinis. On suppose que x_0 n'est pas un point stationnaire de la dynamique, donc $f(x_0) \neq 0$.*

Alors $(x(t))$ est strictement monotone et $x(I(t_0, x_0)) =]x_-, x_+[$ est un intervalle, avec x_- et x_+ finis ou infinis. La dynamique f ne s'annule pas et garde un signe constant sur $]x_-, x_+[$. De plus :

Cas croissant depuis un point fixe :
Si $f(x_0) > 0$, alors x est croissante sur tout l'intervalle $I(t_0, x_0)$, et, si x_- est fini, alors x_- est une position d'équilibre, $t_- = -\infty$, et $\lim_{t \to -\infty} x(t) = x_-$.

Cas croissant vers un point fixe :
Si $f(x_0) > 0$, alors x est croissante sur tout l'intervalle $I(t_0, x_0)$, et, si x_+ est fini, alors x_+ est une position d'équilibre, $t_+ = +\infty$, et $\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_+$.

Cas décroissant vers un point fixe :
Si $f(x_0) < 0$, alors x est décroissante sur tout l'intervalle $I(t_0, x_0)$, et, si x_- est fini, alors x_- est une position d'équilibre, $t_+ = +\infty$, et $\lim_{t \to +\infty} x(t) = x_-$.

Cas décroissant depuis un point fixe :
Si $f(x_0) < 0$, alors x est décroissante sur tout l'intervalle $I(t_0, x_0)$, et, si x_+ est fini, alors x_+ est une position d'équilibre, $t_- = -\infty$, et $\lim_{t \to -\infty} x(t) = x_+$.

En résumé, le théorème de la monotonie assure que si $x(t)$ converge quand t converge vers un bord de l'intervalle $I(t_0, x_0)$, alors $x(t)$ ne peut pas converger vers une limite finie en un temps fini (mais toutes les autres combinaisons temps fini/infini et limite finie/infinie

sont possibles). Également, les solutions sont toujours monotones et ne peuvent converger vers une limite finie non stationnaire.

Le corollaire 14.5 énonce un cas important du théorème de la monotonie.

Corollaire 14.5 (Cas borné 1D)**.** *Sous les conditions de Cauchy-Lipschitz, si x_- et x_+ sont deux points stationnaires finis tels que $x_- < x_0 < x_+$ et si $f(x) \neq 0$ pour tout $x_- < x < x_+$, alors $I(t_0, x_0) = \mathbb{R}$, et $x(t)$ admet pour limites x_- et x_+ quand $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$, le signe de $f(x_0)$ indiquant lequel des points $x_\pm$ correspond à chaque limite $t \to \pm\infty$.*

Exercice 59. Classer dans les catégories décroissant/croissant depuis un point fixe/vers un point fixe, chacune des solutions de la figure 39. ///

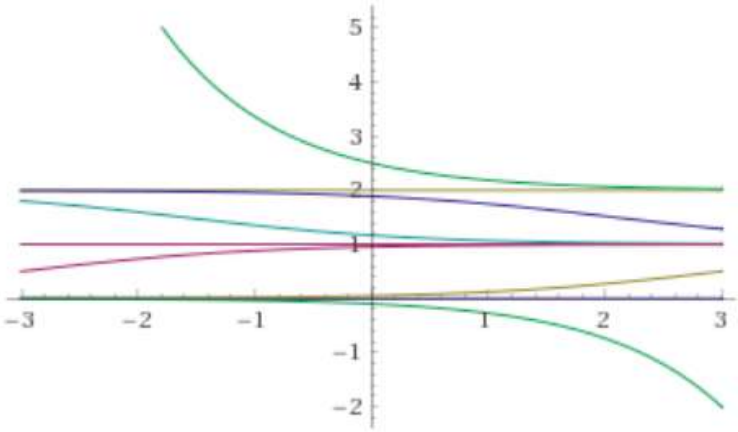

FIGURE 39. Solutions à classer pour l'exercice 59

Exercice 60. Classer dans les catégories décroissant/croissant depuis un point fixe/vers un point fixe, chacun des trois intervalles délimités par les points stationnaires 0 et K de l'équation logistique $x' = ax(1 - x/K)$. ///

Exercice 61. Expliquer pourquoi les conclusions du théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'appliquent pas au système dynamique $x' = 3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$ étudiée dans la section 14.2, quand $x_0 = 0$. Montrer que si $x_0 \neq 0$, on peut tout de même obtenir des renseignements sur les solutions de ce système dynamique. ///

14.4. **Diagrammes de phase 1D.** On introduit dans le cas 1D un outil qualitatif puissant.

Définition 14.6. *Le diagramme de phase du système dynamique 1D $x' = f(x)$ sous condition de Lipschitz, est la figure indiquant l'intervalle de définition de la fonction f, chacun des points fixes du système, et le signe de f sur chaque intervalle entre deux points fixes ou entre un point fixe et l'infini, sous la forme d'une flèche orientée selon le signe de f.*

Quelques exemples simples de diagrammes de phase 1D.

Diagramme de phase sur $\mathbb{R}_+$ du modèle logistique $x' = ax(1-x/K)$ de paramètres $a > 0$ et $K > 0$:

$$\underset{\otimes}{0} \xrightarrow{\quad\quad} \underset{\otimes}{K} \xleftarrow{\quad\quad}$$

Diagramme de phase sur $\mathbb{R}$ du modèle de Malthus $x' = ax$ de paramètre $a > 0$:

$$\xleftarrow{\quad\quad} \underset{\otimes}{0} \xrightarrow{\quad\quad}$$

Diagramme de phase sur $\mathbb{R}$ du modèle de Malthus $x' = ax$ de paramètre $a < 0$:

$$\xrightarrow{\quad\quad} \underset{\otimes}{0} \xleftarrow{\quad\quad}$$

Pour déduire l'allure des solutions du diagramme de phase, *on suit les flèches*... avec la convention qu'on ne s'arrête jamais au milieu d'un intervalle et qu'on ne passe jamais par un point fixe.

15. TD sur les systèmes dynamiques 1D en temps continu

Exercice 62. 1. Tracer le diagramme de phase sur $\mathbb{R}_+$ du modèle logistique avec effet Allee

$$x' = ax\left(\frac{x}{L} - 1\right)\left(1 - \frac{x}{K}\right)$$

pour $a > 0$ et $K > L > 0$. En déduire le sens de variation des solutions et leur limite éventuelle, en fonction de la condition initiale $x_0 \geqslant 0$.

2. Trouver les positions d'équilibre et dessiner des solutions stationnaires et des solutions non stationnaires du système dynamique $x' = f(x)$ sur $\mathbb{R}$ si le graphe de f correspond à la figure 40. Calculer la limite de $x(t)$ quand $t \to +\infty$, selon la condition initiale $x(0) = x_0$.

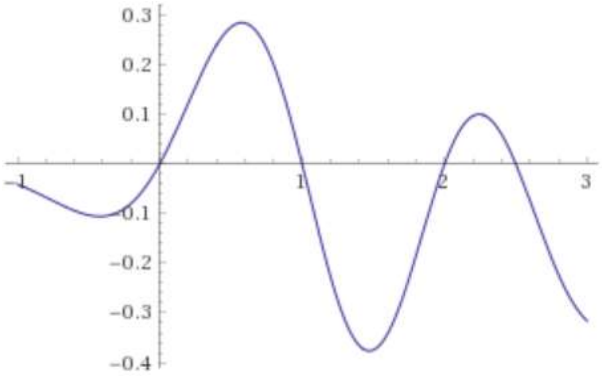

Figure 40. Dynamique pour l'exercice 62

3. Mêmes questions qu'en 2., pour le système dynamique $x' = x - x^3$ sur $\mathbb{R}$. ///

Exercice 63. On considère le système dynamique $x' = ax^2 - bx$ avec $a > 0$ et $b > 0$, qui peut être utilisé pour modéliser la taille d'une population raréfiée. Préciser s'il existe une taille critique de population x_c en dessous de laquelle la population s'éteint et si c'est le cas, calculer la valeur de x_c en fonction des paramètres (a, b) du modèle. ///

Exercice 64. On considère le système dynamique $x' = f_h(x)$ où

$$f_h(u) = u(1 - u) - h$$

avec $h > 0$. Il s'agit d'un modèle logistique modifié où le terme h peut représenter une récolte, de taille constante. Par exemple, si $x(t)$ représente une population de poissons dans un lac, h mesure la quantité de poissons qui sont pêchés par unité de temps, quantité supposée constante. On veut savoir s'il existe des valeurs de h qui ne conduisent pas à l'extinction de la population, et si oui, calculer la plus grande valeur $h_{\max}$.

1. Tracer le graphe de f_h sur $\mathbb{R}_+$ pour $h = \frac{1}{5}$, $h = \frac{1}{4}$ et $h = \frac{1}{3}$ et en déduire le diagramme de phase du système dynamique pour chacune de ces trois valeurs.

2. Déterminer le comportement de $x(t)$ lorsque $t \to \infty$, selon les valeurs de h et de la condition initiale $x(0) = x_0$, et en déduire la valeur de $h_{\max}$.

3. Si l'on admet que toute population est l'objet de fluctuations aléatoires, préciser le comportement réel du stock de poissons auquel on peut s'attendre pour $h = h_{\max}$. ///

Exercice 65. Sans chercher à les résoudre, dresser le diagramme de phase de chacun des systèmes dynamiques (SD1) à (SD3) En déduire le comportement de leurs solutions en fonction de la condition initiale $x(0) = x_0$.

$$\text{(SD1) } x' = 2 \qquad \text{(SD2) } x' = 3x + 1 \qquad \text{(SD3) } x' = x^2 + 2$$

///

Exercice 66. Sans chercher à les résoudre, attribuer à chacun des systèmes dynamiques (SD4) à (SD8) l'allure de ses solutions, à choisir parmi les figures 41, 42, 43, 44 et 45.

$$\text{(SD4) } x' = -x^2 + 1 \qquad \text{(SD5) } x' = -x^2 + x \qquad \text{(SD6) } x' = x + 4$$
$$\text{(SD7) } x' = -2x + 5 \qquad \text{(SD8) } x' = x^3 - x$$

///

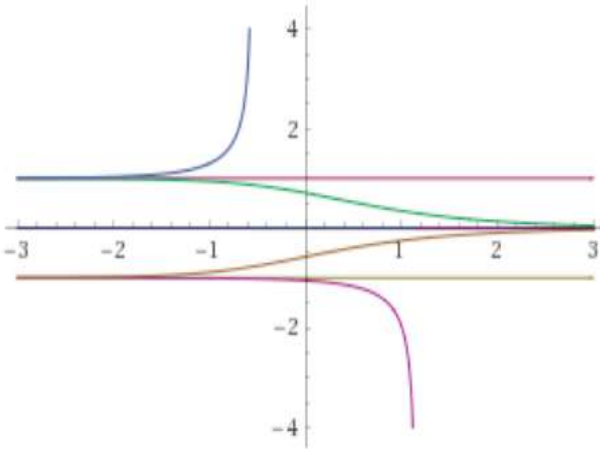

FIGURE 41. Graphes de solutions pour l'exercice 66

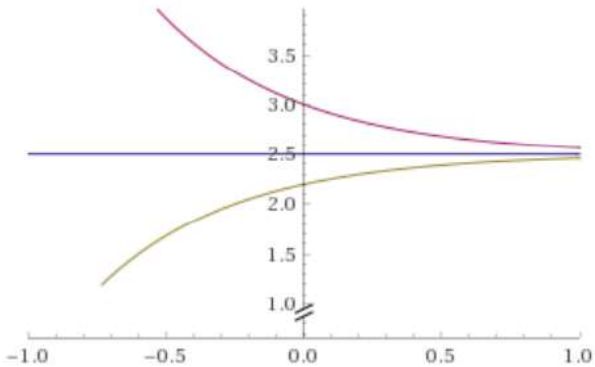

FIGURE 42. Graphes de solutions pour l'exercice 66

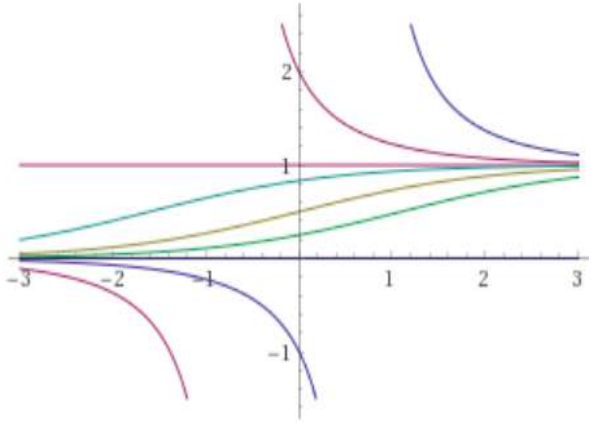

FIGURE 43. Graphes de solutions pour l'exercice 66

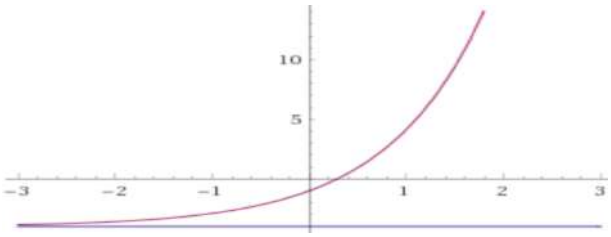

FIGURE 44. Graphes de solutions pour l'exercice 66

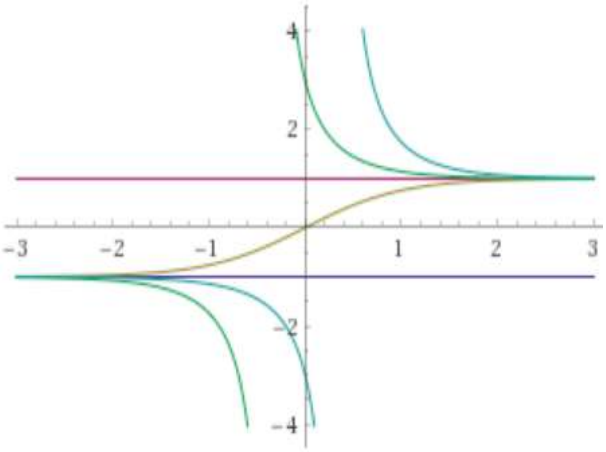

FIGURE 45. Graphes de solutions pour l'exercice 66

Exercice 67. Utiliser la formule explicite de la section 14.1 pour montrer que, dans tout modèle logistique, le temps nécessaire pour passer d'une population égale à 10% de la population limite K à une population égale à la moitié de K coïncide avec le temps

nécessaire pour passer d'une population égale à la moitié de K à une population égale à 90% de K. Généraliser ce résultat. ///

Exercice 68. On considère un modèle logistique $x' = ax - bx^2$ avec $a > 0$ et $b > 0$, on suppose que la population-limite vaut $5 \cdot 10^8$ individus et on observe que, quand la population $x(t)$ est très petite (de l'ordre du millier d'individus), $x(t)$ double toutes les 40 minutes.

1. Dans cette question, on considère que l'unité de temps est la minute.

a) Calculer les constantes a et b lorsque la population est décomptée en nombre d'individus.

b) Calculer les constantes a et b lorsque la population est décomptée en millions d'individus.

2. Mêmes questions qu'en 1. si on considère que l'unité de temps est l'heure.

3. Calculer la taille de la population au bout de 2 heures : a) si la population initiale est de 10^8 individus, b) si la population initiale est de 10^9 individus. ///

Exercice 69. Une population dont la taille $x(t)$ évolue selon un modèle logistique $x' = ax - bx^2$ atteint 10% de sa valeur limite au temps t_0. Calculer $x(t)$ pour tout $t \geqslant t_0$ en fonction de (a, b, t_0) et t. ///

Exercice 70. Une population dont la taille $x(t)$ mesurée en milliers d'individus évolue selon un modèle logistique $x' = ax - bx^2$. La population limite vaut 100, la population initiale vaut 50 et la population après 5 ans vaut 60. L'unité de temps étant l'année, calculer (a, b). ///

Exercice 71 (Formule des trois points de Verhulst (facultatif))**.** On décompte une population dont la taille $x(t)$ évolue selon un modèle logistique, en trois temps également espacés t_1, $t_2 = t_1 + \tau$ et $t_3 = t_1 + 2\tau$ et on obtient les tailles x_1, x_2 et x_3 respectivement. Montrer qu'alors, la capacité K du modèle vaut

$$K = \frac{1/x_1 + 1/x_3 - 2/x_2}{1/(x_1 x_3) - 1/x_2^2}$$

Retrouver ainsi le résultat de l'exercice 67. ///

16. Systèmes dynamiques linéaires 2D en temps continu

À retenir

– Transcription d'un système dynamique linéaire 2D : $X'(t) = MX(t)$.
– Solution dans le cas réel : $X(t) = uUe^{\lambda t} + vVe^{\mu t}$ avec (λ, μ) valeurs propres, (U, V) vecteurs propres associés et $X_0 = uU + vV$.
– Solution dans le cas complexe : $X(t) = e^{\nu t}(\cos(\omega t)X_0 + \sin(\omega t)W)$ avec $\nu = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(M)$ et $\nu^2 + \omega^2 = \det(M)$.
– Typologie dans le cas réel : puits, sources, selles/cols.
– Typologie dans le cas complexe : foyers stables, foyers instables, centres.
– Traduction d'une évolution 1D du second ordre $x''(t) = ax'(t) + bx(t)$ en une évolution 2D du premier ordre $X'(t) = MX(t)$.

On souhaite modéliser l'évolution en temps continu de deux populations qui s'influencent l'une l'autre. Les motivations sont identiques à celles du chapitre 7 mais à présent, on doit étudier des systèmes de deux équations différentielles impliquant chacune la quantité décrite par l'autre. Un exemple célèbre, qu'on décrit maintenant mais qu'on n'étudiera pas dans ce chapitre, concerne les populations de proies et de prédateurs en interaction.

Dans une version élémentaire du modèle, on considère la taille $x(t)$ d'une population de proies et la taille $y(t)$ d'une population de prédateurs à l'instant t et on fait les hypothèses simplificatrices suivantes.

— En isolation, c'est-à-dire en l'absence de prédateurs, les proies ont tendance à pulluler. On modélise cette composante de leur évolution par une dynamique malthusienne $x'(t) = ax(t)$ avec $a > 0$.
— Par contre, en isolation, c'est-à-dire en l'absence de proies, les prédateurs ont tendance à s'éteindre. On modélise cette composante de leur évolution par une dynamique malthusienne $y'(t) = -cy(t)$ avec $c > 0$.
— Quant aux interactions entre les proies et les prédateurs quand ces deux populations sont présentes, il est bien difficile de les décrire précisément, mais le mathématicien et physicien (et militant antifasciste) italien Vito Volterra et le mathématicien et statisticien américain Alfred James Lotka ont suggéré à peu près simultanément en 1925-1926, de les modéliser en ajoutant aux équations donnant $x'(t)$ et $y'(t)$ des termes proportionnels au produit des deux populations $x(t)$ et $y(t)$, comptés négativement pour les proies et positivement pour les prédateurs.

Tout ceci aboutit au modèle dit « proies-prédateurs de Lotka-Volterra », correspondant, pour (a, b, c, d) tous positifs, au système d'équations différentielles

$$x'(t) = ax(t) - bx(t)y(t) \qquad y'(t) = -cy(t) + dx(t)y(t)$$

Une des raisons de la popularité de ce modèle est qu'il a permis de rendre compte de données fluctuantes a priori surprenantes, dont l'exemple le plus fameux concerne les populations de lynx et de lièvres des neiges, deux espèces de la baie d'Hudson au Canada chassées pour leur fourrure au XIXème siècle, sur lesquelles on dispose de nombreuses données de terrain. Il se trouve que ces données font apparaître des fluctuations de la

taille de chaque population, qui sont bien expliquées par les solutions du modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra, voir les figures 46 (données réelles) et 48 et 49 (solutions théoriques).

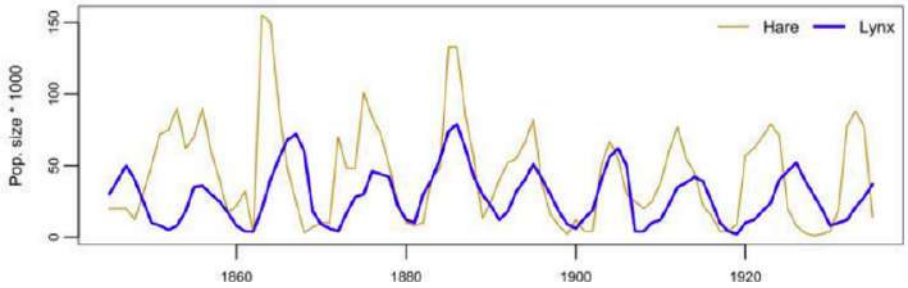

FIGURE 46. Abondance annuelle de lynx et de lièvres des neiges, estimée grâce au nombre de fourrures collectées par la Hudson Bay Company chaque année de 1845 à 1935, d'après MacLulich (1937)

FIGURE 47. Interaction entre un lynx et un lièvre des neiges

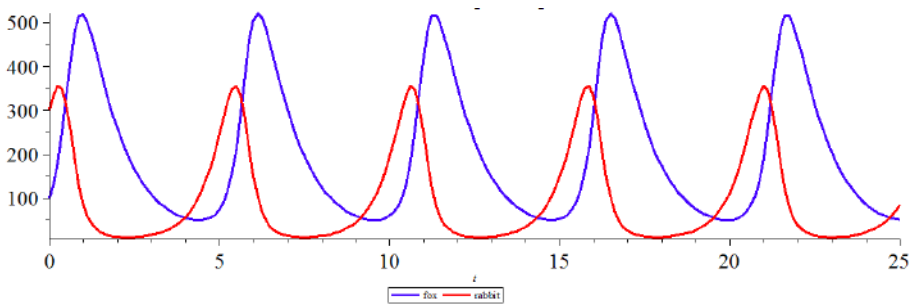

FIGURE 48. Solution d'un modèle de Lotka-Volterra (temps vs proies, en rouge, et prédateurs, en bleu)

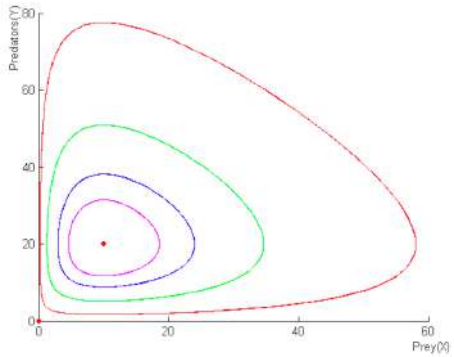

FIGURE 49. Solution d'un modèle de Lotka-Volterra (proies, en abscisse, vs prédateurs, en ordonnée)

Dans ce chapitre, on va s'intéresser aux systèmes dynamiques linéaires 2D en temps continu. Ils constituent une classe limitée de modèles 2D (dont le modèle de Lotka-Volterra, quadratique et non pas linéaire, ne fait pas partie) mais l'objectif sera de complètement les comprendre. Ainsi, une version « linéarisée » du modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra pourrait s'écrire

$$x'(t) = ax(t) - by(t) \qquad y'(t) = -cy(t) + dx(t)$$

avec (a, b, c, d) tous positifs, et on va déterminer le comportement asymptotique de $(x(t), y(t))$, selon les valeurs des paramètres (a, b, c, d).

On sait depuis le chapitre 7 traduire un couple de dynamiques 1D en une dynamique 2D, à savoir $X'(t) = MX(t)$ avec

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

pour une matrice M dont le calcul est laissé en exercice. Plus généralement :

Définition 16.1. *Pour tout vecteur X_0 dans $\mathbb{R}^2$ et toute matrice M réelle de taille 2×2, on appelle système dynamique linéaire 2D en temps continu de paramètres (X_0, M) le système dynamique en temps continu de dynamique $X'(t) = MX(t)$ et de condition initiale $X(0) = X_0$.*

On note souvent

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

Un système dynamique linéaire 2D en temps continu équivaut donc à deux équations différentielles 1D couplées

$$x'(t) = ax(t) + by(t) \qquad y'(t) = cx(t) + dy(t)$$

avec conditions initiales

$$x(0) = x_0 \qquad y(0) = y_0$$

16.1. **Deux cas particuliers.** En guise de premier cas particulier, on suppose d'abord que la matrice M est diagonale, c'est-à-dire que

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

pour λ et μ des nombres réels fixés. Alors chaque population $x(t)$ et $y(t)$ évolue en fait indépendamment de l'autre puisque $X'(t) = MX(t)$ signifie dans ce cas que

$$x'(t) = \lambda x(t) \qquad y'(t) = \mu y(t)$$

dont on connaît la solution

$$x(t) = x_0 e^{\lambda t} \qquad y(t) = y_0 e^{\mu t}$$

Les figures 50, 51 et 52 illustrent le cas diagonal, selon les signes de λ et μ.

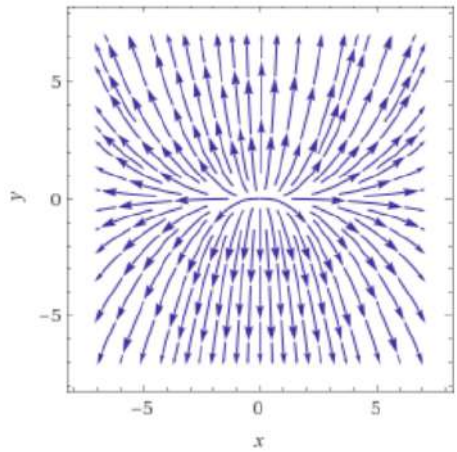

FIGURE 50. Cas diagonal $(\lambda, \mu) = (2, 5)$

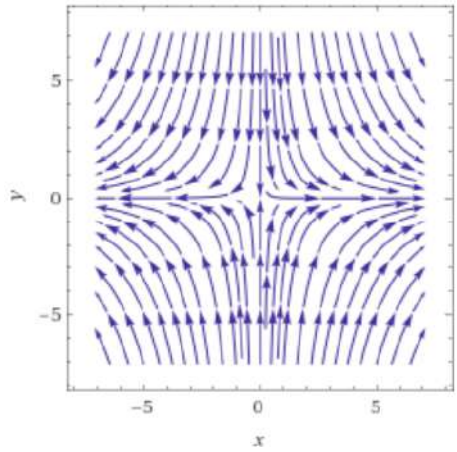

FIGURE 51. Cas diagonal $(\lambda, \mu) = (2, -5)$

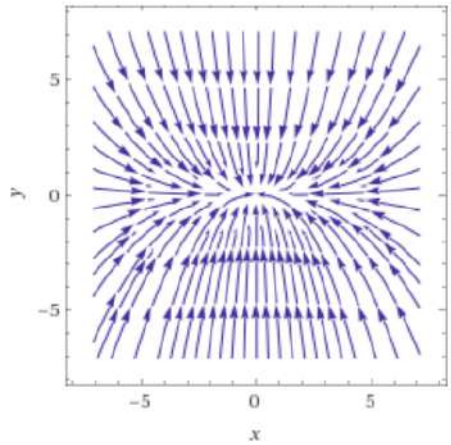

FIGURE 52. Cas diagonal $(\lambda, \mu) = (-2, -5)$

Exercice 72. Donner une équation dans le plan (x, y) des courbes solutions dessinées dans les figures 50, 51 et 52. On pourra d'abord exprimer $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de x_0, y_0 et t, puis éliminer t entre les deux équations obtenues. ///

En guise de second cas particulier, on considère des matrices de la forme

$$M = \begin{pmatrix} \nu & -\omega \\ \omega & \nu \end{pmatrix}$$

pour ν et ω des nombres réels fixés, donc le système dynamique s'écrit

$$x'(t) = \nu x(t) - \omega y(t) \qquad y'(t) = \omega x(t) + \nu y(t)$$

Ce cas est plus difficile à résoudre que le précédent, puisque les populations $x(t)$ et $y(t)$ s'influencent l'une l'autre, mais on peut avoir l'idée de considérer la quantité auxiliaire

$$z(t) = x(t)^2 + y(t)^2$$

Un calcul sans aspérités (à faire) donne

$$z'(t) = 2\nu z(t)$$

donc on sait que, pour tout temps t,

$$x(t)^2 + y(t)^2 = e^{2\nu t} r_0^2$$

avec

$$r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$$

En d'autres termes, $(x(t), y(t))$ se trouve quelque part sur le cercle centré en $(0, 0)$ de rayon $r_0 e^{\nu t}$. Pour tout t, il existe donc un angle $\vartheta(t)$ tel que

$$x(t) = r_0 e^{\nu t} \cos \vartheta(t) \qquad y(t) = r_0 e^{\nu t} \sin \vartheta(t)$$

Pour déterminer les variations de la fonction ϑ, on calcule

$$x'(t) = -r_0 \vartheta'(t) e^{\nu t} \sin \vartheta(t) + r_0 \nu e^{\nu t} \cos \vartheta(t)$$

et

$$y'(t) = r_0\vartheta'(t)e^{\nu t}\cos\vartheta(t) + r_0\nu e^{\nu t}\sin\vartheta(t)$$

et on réutilise ces deux expressions dans le système initial. Après un nouveau calcul sans aspérités, on obtient le couple d'identités

$$-r_0\vartheta'(t)\sin\vartheta(t) = -\omega r_0\sin\vartheta(t) \qquad r_0\vartheta'(t)\cos\vartheta(t) = \omega r_0\cos\vartheta(t)$$

c'est-à-dire en réalité, l'unique condition

$$\vartheta'(t) = \omega$$

Tout ceci montre que, pour tout t,

$$\vartheta(t) = \omega t + \vartheta_0$$

et donc finalement,

$$x(t) = r_0e^{\nu t}\cos(\omega t + \vartheta_0) \qquad y(t) = r_0e^{\nu t}\sin(\omega t + \vartheta_0)$$

Ces dernières formules peuvent paraître compliquées mais, géométriquement parlant, la trajectoire est facile à comprendre : le point $(x(t), y(t))$ décrit une spirale qui « tourne » autour de l'origine $(0, 0)$ à la vitesse angulaire ω tout en s'en rapprochant ou en s'en éloignant, selon le signe de ν.

Les figures 53, 54, 55 et 56 illustrent ce cas en spirale.

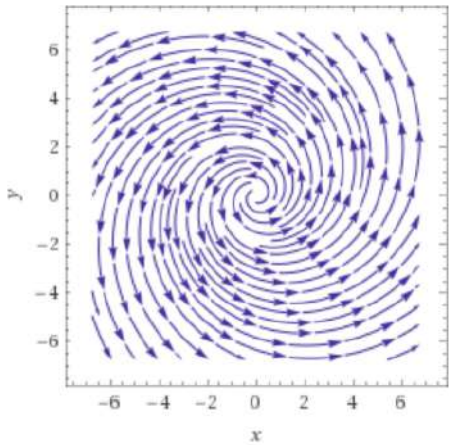

FIGURE 53. Cas $(\nu, \omega) = (1, 3)$

On va voir que tous les systèmes dynamiques linéaires 2D en temps continu se comportent essentiellement comme l'un ou l'autre de ces deux cas particuliers, et on va expliquer comment « extraire » de la dynamique considérée les couples (λ, μ) ou (ν, ω). Comme dans le cas des systèmes dynamiques en temps discret, le signe du discriminant $\Delta(M)$ permet de... discriminer entre ces deux situations.

On peut synthétiser le contenu des parties ci-dessous par la remarque que la forme des solutions dans le cas continu se déduit de la forme des solutions dans le cas discret en remplaçant les suites (λ^n) et (μ^n) du cas discret, par les fonctions $t \mapsto e^{\lambda t}$ et $t \mapsto e^{\mu t}$, et

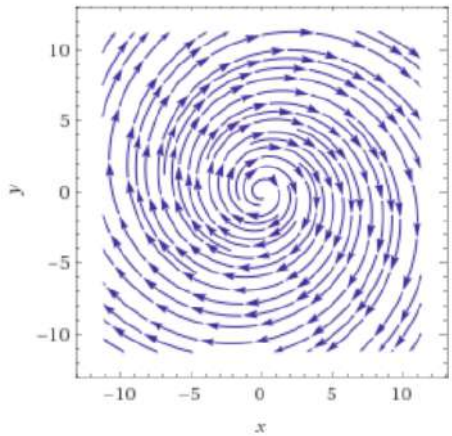

FIGURE 54. Cas $(\nu, \omega) = (1, -5)$

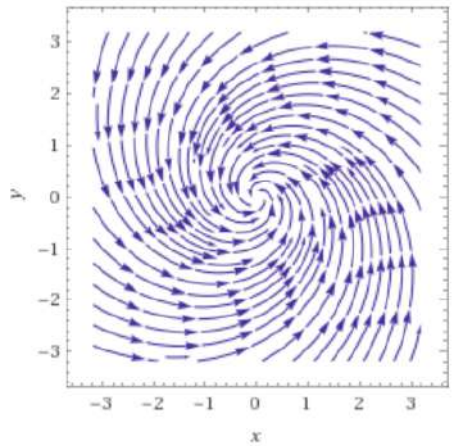

FIGURE 55. Cas $(\nu, \omega) = (-1, 2)$

les suites $(\varrho^n \cos(n\vartheta))$ et $(\varrho^n \sin(n\vartheta))$ du cas discret, par les fonctions $t \mapsto e^{\nu t}\cos(\omega t)$ et $t \mapsto e^{\nu t}\sin(\omega t)$ (et de nouveau, on passera sous silence le cas dégénéré $\Delta(M) = 0$).

16.2. **Discriminant strictement positif.** Dans ce cas, le polynôme caractéristique χ_M admet deux racines réelles λ et μ, associées à des vecteurs propres U et V, avec

$$U = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

Tout vecteur de conditions initiales X_0 peut se décomposer en

$$X_0 = uU + vV$$

pour des nombres réels (u, v) bien choisis, solutions du système d'équations

$$x_0 = uu_x + vv_x \qquad y_0 = uu_y + vv_y$$

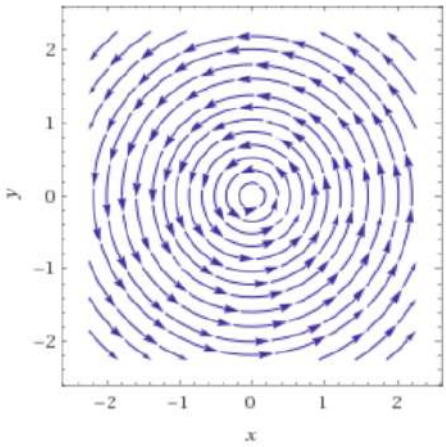

FIGURE 56. Cas $(\nu, \omega) = (0, 1)$

Alors, pour tout t,

$$X(t) = ue^{\lambda t}U + ve^{\mu t}V$$

c'est-à-dire

$$x(t) = uu_x e^{\lambda t} + vv_x e^{\mu t} \qquad y(t) = uu_y e^{\lambda t} + vv_y e^{\mu t}$$

16.3. **Discriminant strictement négatif.** Dans ce cas, le polynôme caractéristique χ_M admet deux racines complexes conjuguées λ et μ que l'on peut décomposer en

$$\lambda = \nu + i\omega \qquad \mu = \nu - i\omega$$

Attention : cette décomposition des valeurs propres complexes en leurs parties réelles et imaginaires n'est pas la décomposition utilisée dans le cas discret, qui était basée sur le module et l'argument.

Pour trouver ν et ω rapidement, on peut utiliser les identités

$$\nu = \tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(M) \qquad \nu^2 + \omega^2 = \det(M) \qquad \omega = \tfrac{1}{2}\sqrt{-\Delta(M)}$$

Alors il existe un vecteur W tel que, pour tout t,

$$X(t) = e^{\nu t}\left(\cos(\omega t)X_0 + \sin(\omega t)W\right)$$

On peut en général en rester là, mais s'il s'avère nécessaire de fournir la valeur exacte de W, on peut utiliser la formule

$$W = \omega^{-1}(M - \nu I)X_0$$

qui indique que, si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$x(t) = e^{\nu t}\left(\cos(\omega t)x_0 + \sin(\omega t)\omega^{-1}((a-\nu)x_0 + by_0)\right)$$

et

$$y(t) = e^{\nu t}\left(\cos(\omega t)y_0 + \sin(\omega t)\omega^{-1}(cx_0 + (d-\nu)y_0)\right)$$

16.4. **Typologie des systèmes dynamiques linéaires 2D en temps continu.** Le point $(0,0)$ est un point fixe de la dynamique $X'(t) = MX(t)$.

Quand les valeurs propres sont réelles, on appelle le point $(0,0)$:

— Un puits si $\lambda < 0$ et $\mu < 0$, voir la figure 52.
— Une source si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, voir la figure 50.
— Une selle ou un col si $\lambda > 0$ et $\mu < 0$, voir la figure 51.

Dans le cas réel, on rappelle que les signes de λ et μ se déduisent des signes de leur somme $\lambda + \mu = \mathrm{tr}(M)$ et de leur produit $\lambda\mu = \det(M)$.

Quand les valeurs propres sont complexes non réelles, on appelle le point $(0,0)$:

— Un foyer stable si $\nu < 0$, voir la figure 55.
— Un foyer instable si $\nu > 0$, voir les figures 53 et 54.
— Un centre si $\nu = 0$, voir la figure 56.

Dans le cas complexe, on rappelle que le signe de ν se déduit du signe de $\mathrm{tr}(M)$ puisque $2\nu = \mathrm{tr}(M)$.

La figure 57 récapitule les types possibles du système dynamique $X'(t) = MX(t)$ en fonction des valeurs de $\mathrm{tr}(M)$ et $\det(M)$. Les axes sont les droites d'équation $\mathrm{tr}(M) = 0$ et $\det(M) = 0$. La courbe séparatrice est la parabole d'équation $\mathrm{tr}(M)^2 = 4\det(M)$. Enfin, on notera que « nœud stable » est un synonyme de « puits » et « nœud instable » un synonyme de « source ».

16.5. **Remarques.** Comme dans le cas discret, toute équation différentielle linéaire 1D du second ordre de la forme

$$x''(t) = ax'(t) + bx(t)$$

est équivalente à une équation différentielle linéaire 2D du premier ordre

$$X'(t) = MX(t)$$

à condition de considérer

$$X(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Réciproquement, si $X'(t) = MX(t)$ avec $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, alors les deux fonctions x et y sont des solutions de l'équation différentielle 1D du second ordre

$$z''(t) - \mathrm{tr}(M)z'(t) + \det(M)z(t) = 0$$

Enfin, si X_0 est un vecteur propre de M, alors on sait directement que le discriminant est positif donc, en appelant λ la valeur propre concernée, on obtient directement

$$X(t) = e^{\lambda t} X_0$$

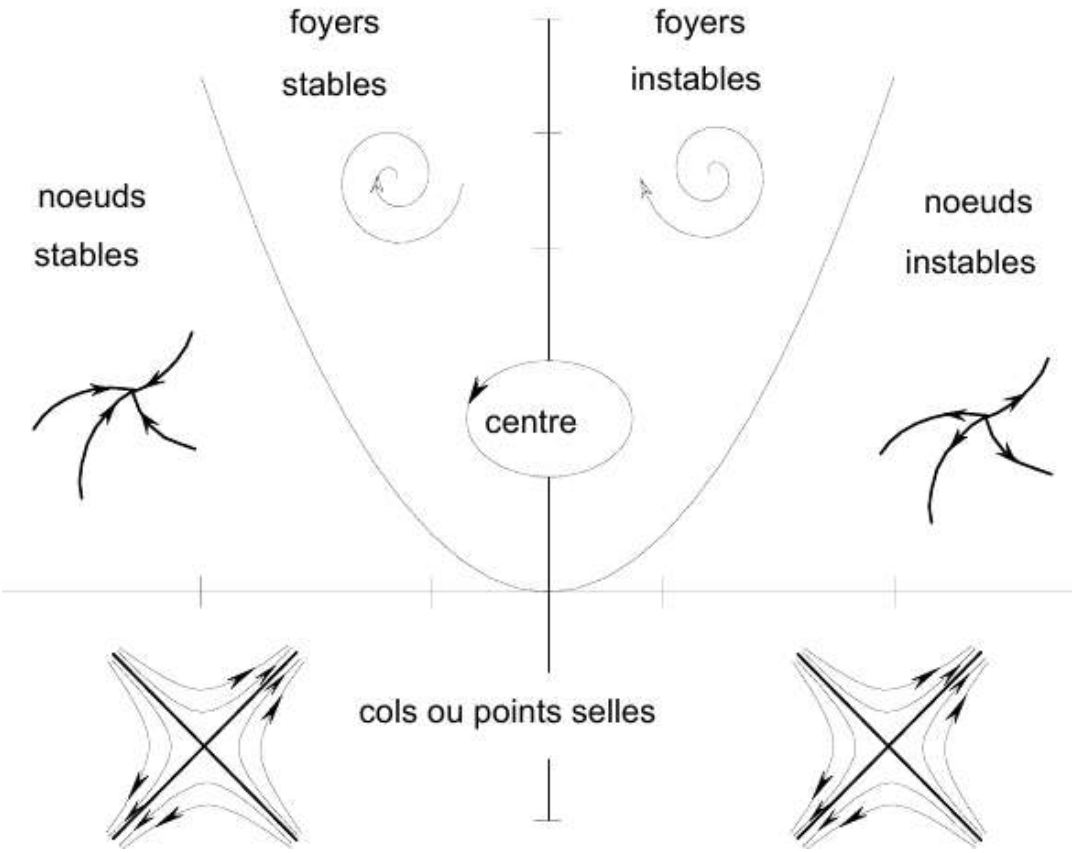

FIGURE 57. Type du système dynamique $X'(t) = MX(t)$ en fonction de $\mathrm{tr}(M)$ (en abscisse) et $\det(M)$ (en ordonnée)

17. TD sur les systèmes dynamiques linéaires 2D en temps continu

Exercice 73. Identifier le type du point fixe $(0,0)$ sur chaque diagramme des figures 58, 59, 60 et 61, puis vérifier la réponse en calculant les valeurs propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ pour les valeurs de (a,b,c,d) indiquées. ///

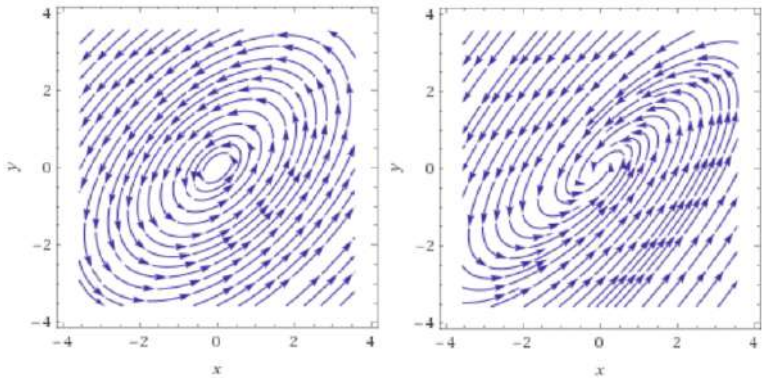

Figure 58. Pour l'exercice 73, $(a,b,c,d) = (1,-2,2,-1)$ (à gauche) et $(a,b,c,d) = (1,-2,2,-2)$ (à droite)

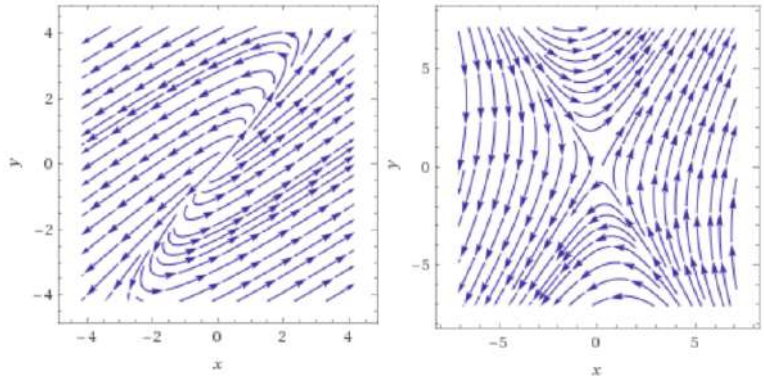

Figure 59. Pour l'exercice 73, $(a,b,c,d) = (3,-2,2,-1)$ (à gauche) et $(a,b,c,d) = (1,2,5,1)$ (à droite)

Exercice 74. Identifier le champ de vecteurs de la figure 62 qui correspond à chacune des matrices ci-dessous, dont on déterminera les valeurs propres et les vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

///

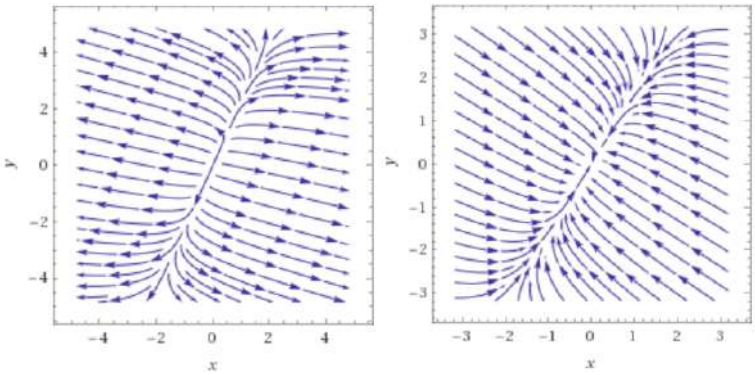

FIGURE 60. Pour l'exercice 73, $(a, b, c, d) = (5, -2, -1, 1)$ (à gauche) et $(a, b, c, d) = (-2, 1, 1, -1)$ (à droite)

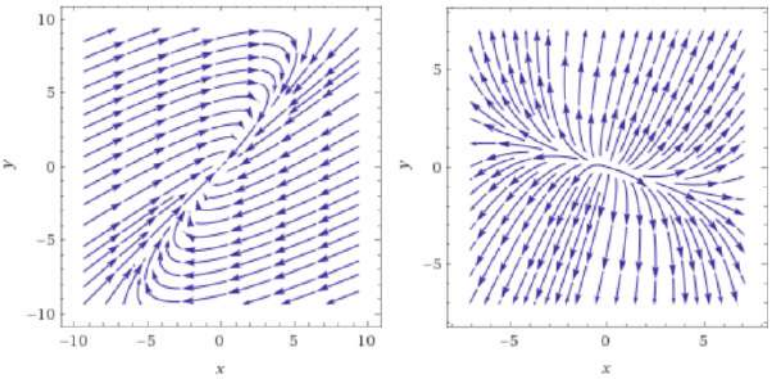

FIGURE 61. Pour l'exercice 73, $(a, b, c, d) = (-6, 4, -3, 1)$ (à gauche) et $(a, b, c, d) = (2, 1, 1, 5)$ (à droite)

Exercice 75. Déterminer le type de chacun des systèmes dynamiques suivants, tracer son portrait de phase et, parmi les figures 63, 64 et 65, identifier le diagramme qui donne l'allure de ses solutions.

$$(a) \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad (b) \quad \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad \begin{cases} x' = -2y \\ y' = -2x \end{cases} \qquad (d) \quad \begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -x + 4y \end{cases} \qquad (e) \quad \begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$$

$$(f) \quad \begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = -4x - 3y \end{cases} \qquad (g) \quad \begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = x - 3y \end{cases}$$

///

Exercice 76 (Ruraux, urbains, migrants)**.** On considère que la population d'un pays se compose de ruraux en nombre $R(t)$ au temps t et d'urbains en nombre $U(t)$ au temps t. On note r le taux annuel d'exode rural et u le taux annuel d'exode urbain. Le taux de

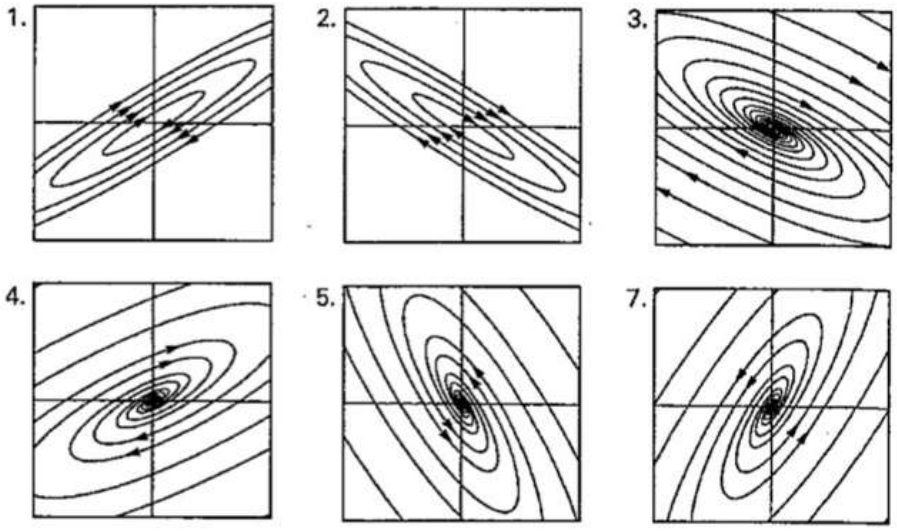

FIGURE 62. Allure des solutions pour l'exercice 74

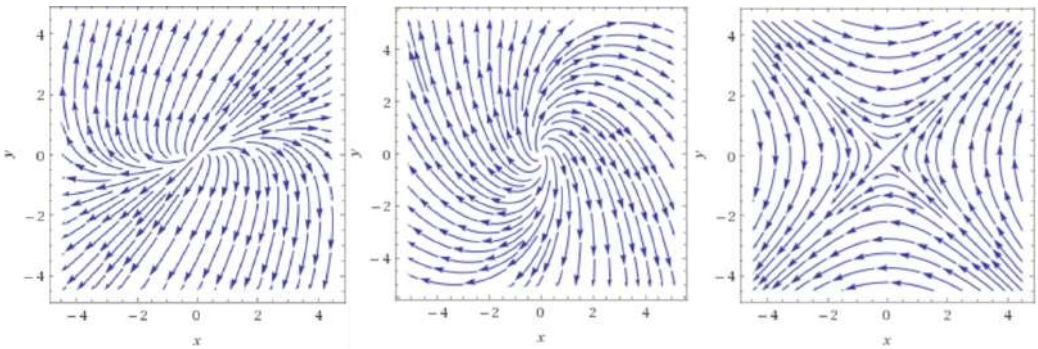

FIGURE 63. Diagrammes pour l'exercice 75

natalité de chacune de ces populations se trouve en dessous du taux de renouvellement. On note m le taux de décroissance de $R(t)$ et de $I(t)$ en isolation. Enfin, les villes reçoivent l'apport d'un flux migratoire en provenance de l'étranger au taux (absolu) i.

Montrer que cette situation correspond au système différentiel

$$R'(t) = -rR(t) - mR(t) + uU(t) \qquad U'(t) = rR(t) - uU(t) - mU(t) + i$$

On suppose désormais que $r = 2\%$ année^{-1}, $u = 1\%$ année^{-1} et $m = 0,1\%$ année^{-1}. Décrire le comportement des populations $R(t)$ et $U(t)$ quand $t \to \infty$. ///

Exercice 77 (Créatine[9])**.** On s'intéresse à la diffusion d'un traceur dans l'organisme, organisme que l'on réduit à deux compartiments, correspondant au sang et aux muscles respectivement. Le modèle de Sapirstein et al. correspond aux hypothèses suivantes :

9. Référence : L. A. Sapirstein, D. G. Vidt, M. J. Mandel, G. Hanusek (1955), *Volume of distribution and clearances of intravenously injected creatine in the dog*, American J. of Physiology 181, 330-336.

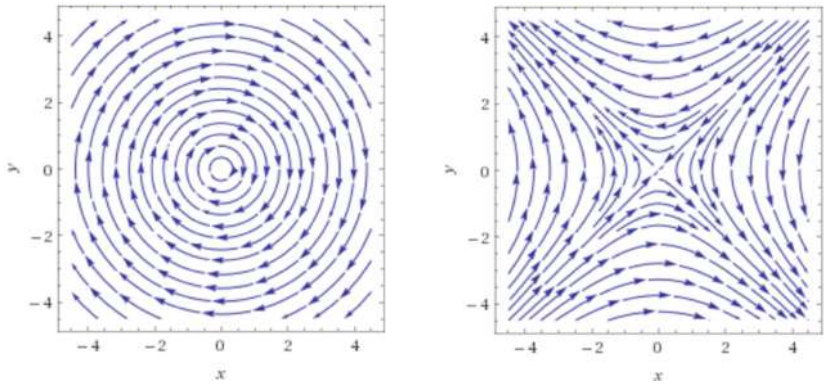

FIGURE 64. Diagrammes pour l'exercice 75

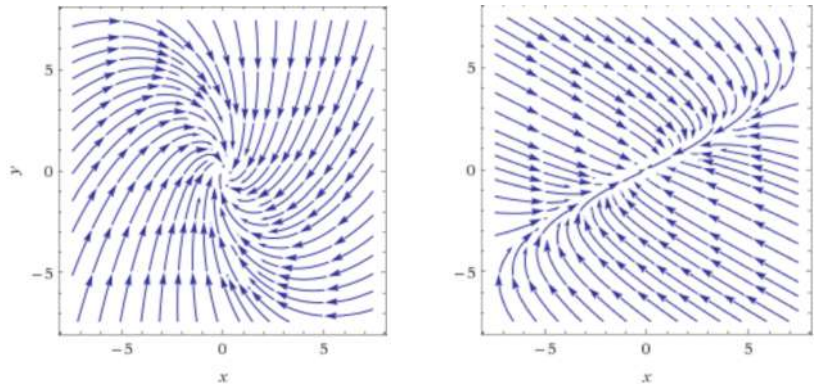

FIGURE 65. Diagrammes pour l'exercice 75

— On injecte au temps $t = 0$ une quantité c de produit dans le sang.
— Les muscles ne contiennent pas de produit au temps $t = 0$.
— Le produit est échangé entre le sang et les muscles à un taux proportionnel à la différence de ses concentrations dans le sang et dans les muscles.
— Le produit est évacué du sang à un taux proportionnel à sa concentration dans le sang.
— Le produit ne peut être évacué des muscles qu'à travers les échanges avec le sang.

On note k le taux des échanges du produit entre le sang et les muscles, e le taux d'évacuation du produit du sang, $S(t)$ la concentration de produit dans le sang et $M(t)$ la concentration de produit dans les muscles au temps t.

1. Écrire le système différentiel linéaire correspondant au bilan de masse décrit ci-dessus et qui décrit l'évolution des concentrations $S(t)$ et $M(t)$.

2. On s'intéresse à la matrice $L = \begin{pmatrix} -k-e & k \\ k & -k \end{pmatrix}$. Montrer que les valeurs propres de L sont réelles et négatives.

3. On suppose désormais que $k = 2$ et $e = 3$. Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres de L dans ce cas.

4. En déduire des formules explicites pour $S(t)$ et $M(t)$ en fonction de c et t.

5. Calculer enfin la valeur maximale $M_{\max}$ prise par la concentration de produit dans le muscle au cours du temps. On montrera que $M_{\max} = p_{\max} \cdot c$ pour une valeur de $p_{\max}$ indépendante de c, que l'on calculera explicitement et dont on donnera une valeur numérique approchée. ///

Exercice 78 (Dynamique 2D affine)**.** On considère un modèle pharmacocinétique à deux compartiments : M représentant les muscles et S représentant le sang, et on souhaite modéliser la diffusion dans M et S d'un produit injecté dans M à débit constant et éliminé de S à taux constant. Le débit (absolu) des apports depuis l'extérieur dans M vaut a. Le taux des échanges de M vers S vaut b. Le taux des échanges de S vers M vaut c. Le taux des échanges de S vers l'extérieur vaut d.

1. Dessiner un schéma du modèle et montrer que les concentrations $M(t)$ et $S(t)$ du produit au temps t dans les compartiments M et S respectivement, obéissent à la dynamique

$$M'(t) = a - bM(t) + cS(t) \qquad S'(t) = bM(t) - cS(t) - dS(t)$$

2. On suppose qu'au temps $t = 0$, $M(0) = m$ et $S(0) = s$. Montrer qu'un régime permanent s'établit, au sens où $M(t)$ et $S(t)$ convergent vers des valeurs M^* et S^* que l'on calculera en fonction des paramètres (a, b, c, d, m, s) du modèle. ///

Exercice 79. Partie I : Temps discret

Une population d'animaux sauvages se divise en deux classes, les jeunes, en nombre J_n au temps n, et les vieux, en nombre V_n au temps n. On appelle f_J et f_V les taux de natalité de chaque classe, m_J et m_V les taux de mortalité de chaque classe, et a la proportion d'individus jeunes devenant vieux, par unité de temps.

1. Montrer que les vecteurs des populations $P_n = \begin{pmatrix} J_n \\ V_n \end{pmatrix}$ après n étapes vérifient les relations

$$P_{n+1} = LP_n, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 + f_J - m_J - a & f_V \\ a & 1 - m_V \end{pmatrix}.$$

2. On considère désormais que $f_J = 0$, $a = 0,2$, $m_J = 0,1$, $f_V = 0,5$ et $m_V = 0,2$. Calculer P_n en fonction de n, J_0 et V_0.

3. Montrer que, pour toutes données initiales (J_0, V_0) telles que $J_0 \neq 0$ ou $V_0 \neq 0$, J_n et V_n deviennent de plus en plus grands et que la proportion de jeunes

$$\frac{J_n}{J_n + V_n}$$

se stabilise sur une valeur, indépendante de (J_0, V_0), que l'on calculera. Pour cela on pourra déterminer les valeurs propres de L et le vecteur propre associé à l'une de ces valeurs propres.

4. On suppose que tous les paramètres restent fixés comme auparavant, à part le taux de fécondité f_V. Montrer qu'il existe une valeur critique f_V^* de f_V au sens où, pour tout

$f_V < f_V^*$ la population s'éteint et pour tout $f_V > f_V^*$ la population explose, et calculer f_V^*.

Partie II : Temps continu

1. On reprend le modèle précédent, mais en temps continu. Rappeler pourquoi désormais les vecteurs des populations $P(t) = \begin{pmatrix} J(t) \\ V(t) \end{pmatrix}$ au temps t vérifient les relations

$$P'(t) = KP(t), \qquad K = \begin{pmatrix} f_J - m_J - a & f_V \\ a & -m_V \end{pmatrix}.$$

2. Exprimer K en fonction de L et en déduire sans nouveau calcul les valeurs propres et les vecteurs propres de K.

3. Montrer que les résultats en temps discret concernant la proportion de jeunes

$$\frac{J(t)}{J(t) + V(t)}$$

quand $t \to \infty$ en I.3, et l'existence d'un taux critique de fécondité, séparant l'extinction de l'explosion, en I.4, restent valables. ///

Exercice 80. On souhaite modéliser les conséquences de l'administration d'un médicament à un patient, soit par perfusion (en continu), soit par injection (ponctuelle). On considère un modèle à deux compartiments, le sang et les tissus musculaires, et on note $S(t)$ et $M(t)$ les concentrations respectives de médicament dans le sang et dans les tissus au temps t. Le sang est alimenté à un taux constant c. Le produit passe du sang vers les tissus au taux a et des tissus vers le sang au taux b. Enfin le produit est évacué du sang au taux e.

1. Montrer que la dynamique du système est décrite par les équations

$$S'(t) = -(a+e)S(t) + bM(t) + c, \qquad M'(t) = aS(t) - bM(t).$$

Expliquer pourquoi la perfusion est décrite par un paramètre $c > 0$ et les conditions initiales $S(0) = M(0) = 0$ tandis que l'injection correspond à $c = 0$, $S(0) = s_0 > 0$ et $M(0) = 0$.

2. On suppose désormais que $a = e = 0,04$ min^{-1} et $b = 0,06$ min^{-1}. Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres de la matrice

$$L = \begin{pmatrix} -(a+e) & b \\ c & -b \end{pmatrix}.$$

3. En déduire les deux résultats suivants :
   (i) Dans le cas de la perfusion, un régime permanent s'établit au sens où $S(t) \to s_\infty$ et $M(t) \to m_\infty$, pour des valeurs de s_∞ et m_∞ que l'on calculera. Pour cela on cherchera d'abord un point fixe (s^*, m^*) de la dynamique puis on décrira l'évolution des quantités $\bar{S}(t) = S(t) - s^*$ et $\bar{M}(t) = M(t) - m^*$.
   (ii) Dans le cas de l'injection, la concentration de médicament dans les tissus musculaires $M(t)$ passe par un maximum $M_{\max}$, dont on calculera la valeur.

///

Exercice 81. On s'intéresse à une réaction chimique réversible $A \underset{\ell}{\overset{k}{\rightleftharpoons}} B$. On note $a(t)$ et $b(t)$ les concentrations de A et de B à l'instant t, et $c = a(0) + b(0)$ la quantité totale de A et B au temps $t = 0$. La dynamique de cette réaction s'écrit

$$a'(t) = -ka(t) + \ell b(t) \qquad b'(t) = ka(t) - \ell b(t)$$

1. Rappeler comment l'observation du fait que $a(t) + b(t) = c$ en tout temps t permet de ramener l'étude de ce système à celle d'une équation scalaire et d'en déduire le comportement de $a(t)$ et $b(t)$ quand $t \to \infty$.

2. On veut désormais retrouver et affiner ce résultat en résolvant directement le système. On considère donc la matrice

$$M = \begin{pmatrix} -k & \ell \\ k & -\ell \end{pmatrix}.$$

Calculer les valeurs propres et des vecteurs propres de M et en déduire $a(t)$ et $b(t)$ en fonction de (a_0, b_0, k, ℓ), pour tout temps t.

3. Retrouver enfin le comportement asymptotique de $a(t)$ et $b(t)$ déjà expliqué et décrire le paramètre régissant la vitesse de convergence de la réaction vers son équilibre. ///

18. Sujets d'examen

18.1. **Examen de mai 2018.** Durée : deux heures. Calculatrices, documents et téléphones portables interdits. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications des réponses. Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Applications numériques : On pourra utiliser les valeurs numériques suivantes :

$$\ln 2 \approx 0,693 \qquad \sqrt{11,56} = 3,4 \qquad 5730/1430 \approx 4 \qquad 2^{-1/4} \approx 84\%$$

Exercice 1 (Radioactivité) La désintégration des atomes de carbone ^{14}C produit des atomes d'azote ^{14}N et des électrons e^- selon la réaction élémentaire $^{14}C \xrightarrow{k} {}^{14}N + e^-$. On note $x(t)$ la quantité d'atomes de ^{14}C présents au temps t et on rappelle que la notation $\xrightarrow{k}$ signifie que l'évolution de $x(t)$ obéit à une loi de Malthus de paramètre $(-k)$.

1) Écrire l'équation différentielle reliant $x'(t)$, $x(t)$ et le paramètre k de la réaction.

2) En déduire une expression de $x(t)$ en fonction de $x(0) = x_0$, k et t.

3) On appelle demi-vie du carbone radioactif le temps nécessaire pour diviser par 2 la quantité de carbone ^{14}C présente au départ. Montrer que la demi-vie $t_{1/2}$ ne dépend pas de x_0 et calculer sa valeur en fonction de k.

4) On observe que $t_{1/2} = 5730$ années. Calculer la quantité de carbone ^{14}C encore présente après 1430 années, en fonction de la quantité initiale.

Exercice2 En 1937, 8 faisans furent introduits sur l'île de Protection au large de l'état de Washington, un environnement presque sans prédateur pour eux. On suppose que le nombre de faisans x_n présents sur l'île n années après leur introduction évolue selon un modèle de Beverton-Holt $x_{n+1} = f(x_n)$ avec

$$f(x) = \frac{4x}{1 + (x/600)}$$

1) Étudier la fonction f sur le domaine $[0, +\infty)$. En particulier, on demande de déterminer le sens de variation de f, de calculer ses points fixes et de déterminer le signe de $f(x) - x$ selon la position de x par rapport aux points fixes.

2) En déduire le comportement de x_n quand n tend vers l'infini, sous ce modèle.

Les faisans ont été recensés en 1939, en 1941 et en 1943, pour des populations de 100, 620 et 1900 individus respectivement.

3) Calculer une expression de $f(f(x))$ en fonction de x, puis expliquer comment on pourrait utiliser cette formule pour déterminer si le modèle considéré rend compte des données observées (ce que l'on ne demande de faire).

Exercice 3 (Tumeur) Le volume $v(t)$ d'une tumeur cancéreuse au temps t obéit à une dynamique de type logistique $v'(t) = rv(t)\left(1 - \dfrac{v(t)}{K}\right)$, pour certains paramètres $r > 0$ et $K > 0$ dépendant du patient.

1) Montrer que, pour tout volume initial $v(0) > 0$, $v(t) \to v^*$ pour une valeur de v^* que l'on calculera en fonction de r et K. Pour cela, on suggère de dresser, puis d'utiliser, un diagramme de phase de l'équation différentielle sur $v \geqslant 0$, et on demande de dessiner l'allure des solutions $t \mapsto v(t)$ pour diverses valeurs initiales $v(0)$.

On applique maintenant au patient un traitement anti-tumoral d'intensité $i > 0$ dont l'effet est de modifier la dynamique en $v'(t) = rv(t)\left(1 - \dfrac{v(t)}{K}\right) - iv(t)$.

2) Montrer que, pour tout volume initial $v(0) > 0$, si $i \geqslant r$, la tumeur disparaît.

On suppose désormais que $0 < i < r$.

3) Montrer que, pour tout volume initial $v(0) > 0$, le volume de la tumeur se stabilise sur une valeur $v_i^* < v^*$ que l'on calculera en fonction des paramètres (r, i, K).

4) Préciser l'intensité i nécessaire pour garantir que le traitement divise le volume de la tumeur d'un facteur au moins 3, c'est-à-dire que $v_i^* \leqslant \frac{1}{3}v^*$.

Exercice 4 (Jeunes et vieux) Une population est structurée en individus juvéniles (non fertiles), en nombre $x(t)$ au temps t, et individus matures (fertiles), en nombre $y(t)$ au temps t. On note j le taux de mortalité des individus juvéniles, m le taux de mortalité des individus matures, f le taux de fécondité des individus matures, et v le taux de passage des individus juvéniles vers la classe des individus matures.

1) Montrer que l'évolution des populations $x(t)$ et $y(t)$ est décrite par le système dynamique

$$x'(t) = -(j+v)x(t) + fy(t) \qquad y'(t) = vx(t) - my(t)$$

et expliquer la signification de chacun des termes des membres de droite des deux équations.

On suppose désormais que $j = 0,1$, $m = 0,2$, $f = 4$ et $v = 0,7$.

2) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -0,8 & 4 \\ 0,7 & -0,2 \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres réelles, que l'on notera désormais λ et μ, et dont on calculera les valeurs en convenant que $\lambda > \mu$.

3) Donner le type du point fixe $(x, y) = (0, 0)$ pour la matrice A.

4) Calculer des vecteurs propres U_λ et U_μ de A pour les valeurs propres λ et μ.

5) En déduire la forme générale des solutions $x(t)$ et $y(t)$, en fonction de t et de deux paramètres u_λ et u_μ dépendant de (x_0, y_0) que l'on ne demande pas de calculer.

6) Dessiner l'allure des solutions dans le quart de plan $Q = (x > 0, y > 0)$. On demande en particulier de tracer la direction des solutions au passage des demi-droites $(x = 0, y > 0)$ et $(x > 0, y = 0)$, de déterminer le lieu H de Q où $y' = 0$, le lieu V de Q où $x' = 0$, et d'indiquer la direction des solutions en tout point de $Q \setminus (H \cup V)$.

18.2. **Examen de seconde session de juin 2018.** Durée : deux heures. Calculatrices, documents et téléphones portables interdits. La notation des copies tiendra compte de la qualité de la rédaction et des justifications des réponses. Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 On souhaite étudier une population dont l'effectif quadruple tous les ans. Pour cela, on va utiliser un modèle en temps discret puis un modèle en temps continu. Dans les deux cas, on suppose que la population au début de l'année 2000 comprend 50 individus.

On note u_n le nombre d'individus au début de l'année $2000 + n$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3. Calculer le nombre d'années nécessaire pour que la population soit égale ou supérieure à 5000 individus.

On note désormais $x(t)$ le nombre d'individus au temps t, mesuré en années, et on suppose que $x'(t) = kx(t)$, où k est un nombre réel que l'on va déterminer, et que $x(0) = 50$.

4. Exprimer $x(t)$ en fonction de k et t.

5. Déterminer la valeur de k qui assure que $x(1) = 4x(0)$. (On ne demande pas une valeur numérique de k, mais une formule donnant la valeur de k.)

6. Vérifier que selon ce modèle, la population quadruple bien tous les ans, c'est-à-dire que, pour tout t, on a effectivement $x(t + 1) = 4x(t)$.

Exercice 2 On considère une population composée de deux classes d'individus, des adultes en nombre A_n et des jeunes en nombre J_n au temps n, évoluant selon la dynamique

$$J_{n+1} = 1,4A_n \qquad A_{n+1} = 0,55J_n + 0,4A_n$$

1. Justifier soigneusement chacun des termes $1,4A_n$, $0,55J_n$ et $0,4A_n$ du modèle, en précisant le mécanisme qu'ils décrivent.

On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1,4 \\ 0,55 & 0,4 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les valeurs propres λ et μ de M. On utilisera la convention que $\lambda > \mu$.

3. Calculer un vecteur propre U pour la valeur propre λ et un vecteur propre V pour la valeur propre μ. On pourra utiliser le fait que $\sqrt{3,24} = 1,8$.

4. Écrire la forme générale des solutions J_n et A_n en fonction de λ, μ, U et V.

5. On suppose désormais que $J_0 > 0$ et $A_0 > 0$. Déduire de ce qui précède le comportement de J_n et de A_n, quand $n \to \infty$ (pour chacune, extinction, stabilisation, explosion, autre).

6. Le ratio jeunes/population totale vaut

$$R_n = \frac{J_n}{A_n + J_n}$$

Montrer que $R_n \to \varrho$ quand $n \to \infty$, pour une valeur ϱ indépendante de (J_0, A_0) que l'on calculera.

Exercice 3 L'acanthaster pourpre (*Acanthaster planci*) est une étoile de mer de couleurs vives, également appelée couronne du Christ ou coussin de belle-mère. La taille $A(t)$ d'une population d'acanthasters pourpres soumise à un effet Allee (fort) obéit à la dynamique

$$A'(t) = 3A(t)\left(1 - \frac{A(t)}{5}\right)\left(\frac{A(t)}{2} - 1\right)$$

1. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = 3x\left(1 - \frac{x}{5}\right)\left(\frac{x}{2} - 1\right)$$

Déterminer le signe de $f(x)$ pour chaque valeur de $x \geqslant 0$.

2. On note $A(0) = A_0$ et on suppose que $A_0 \geqslant 0$. Déduire de ce qui précède le sens de variation de la solution $A(t)$ et la limite éventuelle quand $t \to \infty$ de la taille d'une population d'acanthasters pourpres évoluant selon ce modèle, selon la valeur de A_0.

18.3. **Examen de mai 2017.** Durée : deux heures. Calculatrice et documents interdits.

Exercice 1. On souhaite étudier une population dont l'effectif double tous les ans. Pour cela, on va utiliser un modèle en temps discret puis un modèle en temps continu. Dans les deux cas, on suppose que la population au début de l'année 2000 comprend 100 individus.

On note u_n le nombre d'individus au début de l'année $2000 + n$.

1) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3) Calculer le nombre d'années nécessaires pour que la population soit multipliée par 32 (le calcul peut se faire simplement).

On note désormais $x(t)$ le nombre d'individus au temps t, mesuré en années. On suppose que $x'(t) = kx(t)$ où k est un nombre réel à choisir, et de nouveau que $x(0) = 100$.

4) Exprimer $x(t)$ en fonction de k et t.

5) Déterminer la valeur de k assurant que $x(1) = 2x(0)$ (on donnera k à l'aide d'une formule mathématique sans chercher à en donner une valeur approchée).

6) Vérifier qu'avec ce modèle, la population double bien tous les ans, c'est-à-dire que pour tout t, $x(t+1) = 2x(t)$ (on utilisera les propriétés élémentaires des fonctions logarithme et exponentielle).

Exercice 2. Les globules rouges présents dans le sang du corps humain sont constamment détruits et remplacés. Pour un individu donné, on note C_n la concentration de globules rouges, mesurée en millions par microlitre de sang, au temps n, compté en jours. On suppose que $C_0 = 5$. On va étudier l'évolution de C_n selon deux modèles différents.

Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I. Dans cette partie, on suppose que 1% des globules existants sont créés chaque jour et que $m = 0,04$ millions de globules par microlitre de sang disparaissent chaque jour.

1) Justifier que $C_{n+1} = 1,01 \cdot C_n - 0,04$ pour tout n.

2) Montrer que $C_n = (1,01)^n + 4$ pour tout n. On vérifiera que cette suite satisfait la relation de la question 1) ainsi que la condition initiale.

On appelle homéostasie les situations où C_n converge vers une limite C^* finie et strictement positive, quand n tend vers l'infini.

3) Préciser si ce modèle prédit l'homéostasie ou non.

Partie II. On suppose désormais que la rate filtre et détruit une fraction f des globules rouges par jour et que la moelle osseuse produit chaque jour un nombre de nouveaux globules proportionnel au nombre de globules détruits la veille. On note M_n la concentration de globules rouges, mesurée en millions par microlitre de sang, produits par la moelle osseuse au temps n, et on suppose que $M_0 = 0$.

4) Justifier les équations $C_{n+1} = (1-f)C_n + M_n$ et $M_{n+1} = pfC_n$, où p est une constante comprise entre 0 et 1.

5) On note $X_n = \begin{pmatrix} C_n \\ M_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1-f & 1 \\ pf & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.

On suppose désormais que $f = 0,01$ et $p = 1$.

6) Donner les formules pour les valeurs propres λ et μ de A.

7) On admet désormais que $\lambda = 1$ et $\mu = -0,01$ et que la solution du modèle est $C_n = 4,95 \cdot \lambda^n + 0,05 \cdot \mu^n$ pour tout n. Préciser si ce modèle prédit l'homéostasie ou non (on a défini la notion d'homéostasie dans la partie I). Expliquer pourquoi ce résultat était prévisible.

Exercice 3. On étudie l'évolution d'une population de lièvres. On note $x(t)$ le nombre de lièvres, compté en milliers d'individus, au temps t, compté en années. On suppose que $x(0) = x_0 > 0$ et que $x(t)$ suit la loi

$$(*) \qquad x'(t) = 3x(t) - x^2(t).$$

1) Justifier le membre de droite $3x(t) - x^2(t)$ de l'équation $(*)$. On décrira aussi précisément que possible les hypothèses écologiques que cette expression reflète.

2) Déterminer les positions d'équilibre de $(*)$. On justifiera les calculs.

3) Tracer le portait de phase de $(*)$ et en déduire l'allure des solutions.

4) Décrire l'évolution de la population de lièvres dans les cas suivants : (a) $x_0 = 1$, (b) $x_0 = 2$, (c) $x_0 = 3$, (d) $x_0 = 4$. Dans chaque cas, on précisera si la population augmente ou diminue, et on calculera sa limite si celle-ci existe.

5) Préciser dans chacun des cas précédents si la population peut doubler.

On considère désormais qu'en sus de l'évolution décrite ci-dessus, 290 lièvres sont tués chaque année à cause de la chasse. On rappelle que $x(t)$ dénombre la population de lièvres comptée en milliers d'individus.

6) Écrire la modification de l'équation $(*)$ qui permet de tenir compte de la chasse.

7) Déterminer les nouvelles positions d'équilibre, tracer le nouveau portrait de phase. On pourra utiliser la valeur numérique $\sqrt{7,84} = 2,8$.

8) Décrire l'évolution de la population de lièvres si $x(0) = 2,5$.

18.4. **Sujet blanc travaillé en 2016-2017.**

Exercice 1. Le but de cet exercice est de comparer les évolutions de deux populations données. Pour résoudre les questions ci-dessous, on pourra utiliser les valeurs numériques données à la fin de l'exercice. On donne les informations suivantes.

La population A triple tous les ans. La population A initiale (au début de l'année 2000) est de 100 individus. La population B double tous les ans. De plus, la population B accueille tous les ans 100 nouveaux individus qui migrent d'un territoire voisin. La population B initiale (au début de l'année 2000) est de 500 individus.

On note a_n et b_n le nombre d'individus de la population A et de la population B au début de l'année $2000 + n$.

1a) Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.

1b) En déduire pour tout n, la valeur de a_n en fonction de n.

2a) Exprimer b_{n+1} en fonction de b_n.

2b) On pose $u_n = b_n + 100$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique. En déduire pour tout n, la valeur de u_n en fonction de n.

2c) En déduire pour tout n, la valeur de b_n en fonction de n.

3) À partir de quelle année, la population A aura-t-elle été multipliée par 50 ?

4) Au bout de combien d'années, la population B comptera-t-elle plus de 10000 individus ?

5) Quelle population atteindra la première le nombre de 10000 individus ?

Pour les applications numériques, on pourra utiliser les valeurs approchées $\frac{\ln(0,2)}{\ln(0,9)} \approx 15,27$, $\frac{\ln(50)}{\ln(3)} \approx 3,56$, $\frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9)} \approx 6,57$, $\frac{\ln(9990/600)}{\ln(2)} \approx 4,04$, $\frac{\ln(0,3)}{\ln(0,8)} \approx 5,39$, $\frac{\ln(0,3)}{\ln(0,9)} \approx 11,42$, $\frac{\ln(0,25)}{\ln(0,9)} \approx 13,15$, $\frac{\ln(100)}{\ln(3)} \approx 4,19$.

Exercice 2. On considère une population qui évolue selon la loi $u_{n+1} = -u_n^2 + 3u_n$.

1) Déterminer les positions d'équilibre de ce sytème dynamique.

2) Soit $f(x) = -x^2 + 3x$.

2a) Étudier la fonction f.

2b) Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant x$.

2c) Représenter sur un même dessin le graphe de la fonction f ainsi que la droite d'équation $y = x$ en utilisant les résultats des questions précédentes.

3) Étudier graphiquement, en utilisant le dessin de la question 2c), les diverses évolutions possibles de la population en fonction du nombre initial u_0 d'individus.

4) Le système possède-t-il un point d'équilibre stable ? On justifiera la réponse à l'aide de la question 3.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

1a) Déterminer les valeurs propres de A.

1b) Pour chaque valeur propre, donner un vecteur propre.

2) On étudie une population dont on note u_n le nombre d'individus (en milliers) au temps n (en année) et on suppose que $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et pour tout n, $u_{n+2} = 3u_{n+1} + 2u_n$.

2a) On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$. Établir une relation entre X_{n+1} et X_n.

2b) Déduire des questions précédentes u_n en fonction de n.

2c) Comment va évoluer la population dans le futur ?

Exercice 4. Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution de la population du Mexique. On note $x(t)$ le nombre d'habitants (décomptés en millions) au temps t (décompté en années). On suppose qu'en 1950, la population mexicaine était d'environ 25 millions et qu'en 1970, elle était d'environ 50 millions.

1) On suppose que x suit une loi de Malthus $x' = ax$ $(*)$.

1a) Quel est le signe de a ? Justifier la réponse.

1b) On suppose que $a = 0,0346$. Résoudre $(*)$.

1c) On suppose que $a = 0,0415$. Résoudre $(*)$.

1d) Par rapport aux données fournies, choisir la valeur de a la plus réaliste parmi les deux valeurs proposées aux questions 1b) et 1c).

2) On suppose que $a = 0,0346$.

2a) En quelle année, la population du Mexique sera-t-elle de 75 millions d'habitants ?

2b) Par rapport à la population de 1950, quand la population du Mexique aura-t-elle doublé ? Si on prend comme référence l'année 1970, quand la population aura-t-elle doublé ? Que remarque-t-on ? Justifier la véracité de cette remarque par le calcul.

2c) Expliquer les limites du modèle de Malthus.

Exercice 5. La population de l'état d'Illinois aux USA a évolué entre les années 1900 et 1960 de la façon suivante :

Année	Population
1900	4 821 550
1910	5 638 541
1920	6 485 280
1930	7 630 054
1940	7 897 244
1950	8 712 176
1960	10 081 158

On note $N(t)$ le nombre d'habitants de l'Illinois au temps t (décompté en années) et on suppose que cette population suit une loi de Malthus de paramètre k.

1) Donner l'équation différentielle satisfaite par N. Donner la solution de cette équation (on prendra comme temps de référence $t_0 = 1900$).

2) En utilisant $N(1900)$ et $N(1960)$, estimer la valeur de k. On prendra $k = 0,0123$ dans la suite.

3) Comparer les données expérimentales aux valeurs théoriques pour les années indiquées par le tableau.

4) Au bout de combien de temps, la population aura-t-elle doublé ? Ce laps de temps vous paraît-il raisonnable par rapport aux données expérimentales ?

5) La superficie de l'Illinois est de 149 997 km^2. En 2013, la densité d'habitants est de 86 habitants/km^2. Quelle densité prédit le modèle de Malthus ?

6) Si le gouverneur de l'état d'Illinois vous demandait votre avis sur la fiabilité du modèle de Malthus pour décrire l'évolution de la population de cet état entre 1900 et nos jours, que lui répondriez-vous ? On justifiera la réponse en utilisant les questions précédentes.

Exercice 6. Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution d'une population de lièvres. On note $x(t)$ le nombre (décompté en milliers d'individus) de lièvres au temps t (décompté en années). On suppose que $x(t)$ suit la loi

$$x'(t) = 2x(t) - x^2(t) \qquad (*)$$

1) Comment justifier le terme en x ? et celui en x^2 ?

2) Déterminer les positions d'équilibre (en justifiant les calculs).

3) Tracer le portait de phase (c'est à dire l'allure des solutions).

4) On note $x(0) = x_0$. Décrire l'évolution de la population de lièvres dans les cas suivants :

4a) $x_0 = 2$; 4b) $x_0 = 1,5$; 4c) $x_0 = 4$.

4d) Préciser dans chacun des cas précédents si la population peut doubler.

5) On estime à 100 le nombre de lièvres tués par an à cause de la chasse.

5a) Comment modifier l'équation $(*)$ pour tenir compte de la chasse ?

5b) Déterminer les nouvelles positions d'équilibre et tracer le nouveau portrait de phase.

5c) Si on suppose que $x(0) = 2,5$, comment évolue la population de lièvres (dans le futur) ?

Alfred James Lotka (1880-1949)

Vito Volterra (1860-1940)