MAT 206 2018-2019 Corrigé du DM 2

Exercice 43

1) Puisqu'un rapport se fait entre deux individus de sexe opposé, le nombre moyen de rapports par unité de temps est égal au nombre moyen de rapports des mâles par unité de temps.
Le sex ratio est 1:1 donc au temps t le nombre de mâles est $\frac{1}{2}x(t)$.
Puisque chaque mâle a en moyenne $\bar{m}$ rapports par unité de temps, on en déduit $s(t) = \frac{1}{2}\bar{m}x(t)$.

2) Chaque rapport donne naissance en moyenne à φ individus, donc le nombre de naissances par unité de temps vaut $\varphi \cdot s(t) = \frac{1}{2}\varphi\bar{m}x(t)$.

3) Pendant une unité de temps δt, le nombre de naissances vaut $\varphi \cdot s(t) \cdot \delta t$ et le nombre de morts vaut $\theta \cdot x(t) \cdot \delta t$. Donc la variation de population est $x(t+\delta t) - x(t) = \varphi \cdot s(t) \cdot \delta t - \theta \cdot x(t) \cdot \delta t = \left(\frac{1}{2}\varphi\bar{m} - \theta\right)x(t)\delta t$. Or si δt est petit on a $\frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} \approx x'(t)$. On en déduit que la population évolue selon le modèle de Malthus $x'(t) = ax(t)$ où $a = \frac{1}{2}\varphi\bar{m} - \theta$.

4) On a un modèle de Malthus donc la population survit si et seulement si $a \geq 0$, c'est-à-dire $\varphi\bar{m} \geq 2\theta$. Or $\varphi\bar{m}$ est égal au nombre moyen de descendants engendrés par un individu par unité de temps, c'est-à-dire le taux de natalité par unité de temps. Donc la population survit si et seulement si le taux de natalité est supérieur au double du taux de mortalité.

Exercice 44

1) On raisonne comme dans l'exercice précédent. En moyenne, il y a $\frac{x(t)}{C}$ individus par case. Le sex ratio est 1:1 donc en moyenne il y a $\frac{x(t)}{2C}$ femelles par case. Donc chaque mâle a en moyenne $\frac{x(t)}{2C} \cdot p$ rapports par unité de temps. Puisqu'il y a $\frac{1}{2}x(t)$ mâles, on en déduit que le nombre moyen total de rapports par unité de temps vaut $\frac{1}{2}x(t) \cdot \frac{x(t)}{2C} \cdot p$.

2) On a donc $x'(t) = \frac{1}{2}x(t)\frac{x(t)}{2C}p\varphi - \theta x(t) = \beta x^2(t) - ax(t)$ où $a = \theta$ et $\beta = \frac{p\varphi}{4C}$.