Fiche méthode

Suites arithmético-géométriques

Rappel : On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est *arithmético-géométrique* s'il existe des réels r et s tels que pour tout n on ait $\boxed{x_{n+1} = rx_n + s}$. On suppose dans la suite que l'on a $\boxed{r \neq 1}$ (si $r = 1$ alors $x_{n+1} = x_n + s$ donc on a une suite arithmétique de raison s, donc $x_n = x_0 + ns$).

On a $x_{n+1} = f(x_n)$ où f est la fonction affine définie par $f(x) = rx + s$. Comme la fonction f est continue, si la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers une limite ℓ alors on a $f(\ell) = \ell$, c'est-à-dire que ℓ est un point fixe de f.

Attention ! Il ne suffit pas de trouver un point fixe ℓ de f pour pouvoir conclure directement que la suite converge vers ℓ. Par exemple si $r = 2$ et $s = -1$ alors l'unique point fixe de f est 1. Mais si $x_0 = 2$ alors on peut vérifier que l'on a $x_n = 2^n + 1$, qui ne tend pas vers 1 mais vers $+\infty$.

Pour trouver l'expression de x_n, ou pour déterminer si la suite converge, on utilisera la méthode suivante.

Étape 1. On cherche les points fixes de la fonction f. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(\ell) = \ell &\iff r\ell + s = \ell \\ &\iff s = (1-r)\ell \\ &\iff \ell = \frac{s}{1-r} \text{ car } 1 - r \neq 0. \end{aligned}$$

Donc f possède un unique point fixe, qui est $\boxed{\ell = \dfrac{s}{1-r}}$.

Étape 2. On utilise une suite auxiliaire pour se ramener au cas d'une suite géométrique. On pose $\boxed{y_n = x_n - \ell = x_n - \dfrac{s}{1-r}}$ et on veut exprimer y_{n+1} en fonction de y_n. On a :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= x_{n+1} - \frac{s}{1-r} \text{ (on utilise la définition de } y_{n+1}) \\ &= rx_n + s - \frac{s}{1-r} \text{ (on utilise la relation de récurrence)} \\ &= rx_n + s\left(1 - \frac{1}{1-r}\right) = rx_n + s\frac{-r}{1-r} \\ &= r\left(x_n - \frac{s}{1-r}\right) = ry_n. \end{aligned}$$

Étape 3. Donc $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison r. Donc pour tout n on a $y_n = r^n y_0 = r^n(x_0 - \ell)$. Comme $x_n = y_n + \ell$, on en déduit $\boxed{x_n = r^n(x_0 - \ell) + \ell}$. Si $|r| < 1$ alors la suite géométrique $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, donc $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge bien vers ℓ. En revanche, si $|r| > 1$ alors $|y_n|$ tend vers $+\infty$: il y a « explosion » (c'est ce qui se passe dans l'exemple précédent, où $x_{n+1} = 2x_n - 1$ et $x_0 = 2$).

Remarque : La fonction f est dérivable et on a $f'(x) = r$, donc $|f'(\ell)| = |r|$. Donc le point fixe ℓ est attractif si $|r| < 1$ et répulsif si $|r| > 1$, ce qui correspond bien au comportement que l'on vient de décrire.

Exercice 19 *Une cellule contient des nutriments en concentration c_n au temps n. De nouveaux nutriments entrent dans la cellule en quantité constante $q = 1,7$ par unité de temps, et des nutriments déjà présents dans la cellule en sortent proportionnellement à la concentration, en quantité pc_n avec $p = 10\%$. La dynamique s'écrit donc $c_{n+1} - c_n = q - pc_n$. Préciser si, d'après ce modèle, la concentration c_n va tendre vers un équilibre c^* et, si c'est le cas, calculer la valeur de c^*.*

On a $c_{n+1} = c_n + q - pc_n = f(c_n)$ où la fonction f est définie par $f(x) = (1-p)x + q = (1-0,1)x + 1,7 = 0,9x + 1,7$. La suite $(c_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est arithmético-géométrique.

La fonction f est continue donc si c_n tend vers un équilibre c^* alors c^* est un point fixe de f, c'est-à-dire que l'on a $f(c^*) = c^*$. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} f(c^*) = c^* &\iff 0,9c^* + 1,7 = c^* \\ &\iff 1,7 = (1-0,9)c^* \\ &\iff c^* = \frac{1,7}{0,1} = 17. \end{aligned}$$

On pose $y_n = c_n - c^* = c_n - 17$. On a :

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= c_{n+1} - 17 = 0,9c_n + 1,7 - 17 \\ &= 0,9c_n - 0,9 \times 17 \\ &= 0,9(c_n - 17) = 0,9y_n. \end{aligned}$$

Donc $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison $0,9$. Puisque $|0,9| < 1$, on en déduit que y_n tend vers 0. Donc $c_n = y_n + c^*$ tend bien vers c^*.

En conclusion, la concentration c_n tend vers un équilibre qui vaut $c^* = 17$.