Algèbre L3 B 2018-2019 CC3

Exercice 1

1) Le neutre e est bien un élément de $Z(G)$. Soient g et g' dans $Z(G)$. Alors pour $h \in G$ on a $(gg')h = ghg' = h(gg')$ donc $gg' \in Z(G)$. De plus $hg = gh$ donc en multipliant à gauche et à droite par g^{-1} on obtient $g^{-1}h = hg^{-1}$, donc $g^{-1} \in Z(G)$. Donc $\boxed{Z(G) \text{ est un sous-groupe de } G}$.

2) a- Le cardinal de S_n vaut $\boxed{n!}$.

b- Les groupes S_1 et S_2 sont de cardinal respectivement 1 et 2. Ils sont donc commutatifs, donc $\boxed{Z(S_1) = S_1 = \{id\} \text{ et } Z(S_2) = S_2}$.

3) a- L'image de i_1 par $(i_1\, i_2)$ est i_2 et i_2 n'est dans le support d'aucune des transpositions $(i_1\, i_3), \dots, (i_1\, i_p)$, donc l'image de i_1 par le produit est i_2. L'image de i_2 par $(i_1\, i_2)$ est i_1, l'image de i_1 par $(i_1\, i_3)$ est i_3 et i_3 n'est dans le support d'aucune des autres transpositions apparaissant dans le support. L'image de i_p par le produit est i_1. Aucun entier différent de $i_1, \dots, i_p$ n'est dans le support du produit. On en déduit que $\boxed{(i_1\, i_p) \circ \dots \circ (i_1\, i_2) \text{ est le } p\text{-cycle } (i_1\, i_2 \cdots i_p)}$.

On a donc montré que $\boxed{\text{toute permutation s'écrit comme produit de transpositions}}$, car toute permutation s'écrit comme produit de cycles et tout cycle s'écrit comme produit de transpositions.

b- On a $(\sigma \circ (ij) \circ \sigma^{-1})(\sigma(i)) = (\sigma \circ (ij))(i) = \sigma(j)$ et de même $(\sigma \circ (ij) \circ \sigma^{-1})(\sigma(j)) = \sigma(i)$. De plus, pour $1 \leq k \leq n$, si $k \notin \{\sigma(i), \sigma(k)\}$ alors $\sigma^{-1}(k) \notin \{i, j\}$ donc $(ij)(\sigma^{-1}(k)) = \sigma^{-1}(k)$, donc $(\sigma \circ (ij) \circ \sigma^{-1})(k) = k$. Donc $\boxed{\sigma \circ (ij) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i)\ \sigma(j))}$.

c- Soit $\sigma \in Z(S_n)$. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soient j et k dans $[\![1, n]\!]$ tels que i, j et k soient deux à deux distincts (ce qui est possible car $n \geq 3$). La permutation σ commute avec les transpositions (ij) et (ik) donc, d'après la question précédente on a $(\sigma(i)\ \sigma(j)) = (i\ j)$ et $(\sigma(i)\ \sigma(k)) = (i\ k)$. Donc $\{\sigma(i), \sigma(j)\} = \{i, j\}$ et $\{\sigma(i), \sigma(k)\} = \{i, k\}$, donc $\sigma(i) \in \{\sigma(i), \sigma(j)\} \cap \{\sigma(i), \sigma(k)\} = \{i, j\} \cap \{i, k\} = \{i\}$, donc $\sigma(i) = i$. Donc $\sigma = Id$. Réciproquement on a bien $Id \in Z(S_n)$. Donc $\boxed{Z(S_n) = \{Id\}}$

Exercice 2

1) • Montrons le résultat par récurrence sur n. Celui-ci est trivial pour $n=1$. Soit maintenant $n \geq 1$ tel que $\forall x \in A$, $x^n \in \{x, x^2\}$. Soit $x \in A$. Si $x^n = x$ alors $x^{n+1} = x^2 \in \{x, x^2\}$, si $x^n = x^2$ alors $x^{n+1} = x^3 = x \in \{x, x^2\}$. Donc $x^{n+1} \in \{x, x^2\}$. Donc si le résultat est vrai au rang n alors il est aussi vrai au rang $n+1$.

On a donc bien $\boxed{\forall x \in A, \forall n \geq 1, x^n \in \{x, x^2\}}$.

• L'élément 0 est bien nilpotent. Soit $x \in A$ un élément nilpotent. Soit $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$. D'après la question précédente on a $x^n \in \{x, x^2\}$. Si $x^n = x$ alors $x = 0$; si $x^n = x^2$ alors $x = x^3 = x^n x = 0$. Donc $x = 0$.

Donc $\boxed{0 \text{ est l'unique élément nilpotent de } A}$.

2) a- On a $(1-y)y = y - y^2 = 0$ et $y(1-y) = 0$ car y est idempotent. Donc $b^2 = ya\underbrace{(1-y)y}a(1-y) = \underline{0}$ et $c^2 = (1-y)ay\underbrace{(1-y)}ay = \underline{0}$.

Donc b et c sont nilpotents. D'après la question précédente, on a $b = c = 0$.

Or $b = ya - yay$ et $c = ay - yay$ donc $ya = yay = ay$. Donc $\boxed{y \in C(A)}$.

b- Pour $x \in A$ on a $(x^2)^2 = x^4 = x^3 x = xx = x^2$ donc x^2 est idempotent, donc d'après la question précédente $\boxed{x^2 \in C(A)}$.

c- On a $0 \in C(A)$ car $\forall a \in A$, $0 \cdot a = 0 = a \cdot 0$.

Soient x et x' dans $C(A)$. Pour $a \in A$, on a $(-x) \cdot a = -(xa) = -(ax) = a \cdot (-x)$ et $(x+x')a = (xa) + (x'a) = (ax) + (ax') = a(x+x')$ donc $-x \in C(A)$ et $x + x' \in C(A)$.

Donc $\boxed{C(A) \text{ est un sous-groupe de } A}$

d- Soit $x \in A$. On a $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ or $1 \in C(A)$ et, d'après la question 2)b-, on a $(x+1)^2 \in C(A)$ et $x^2 \in C(A)$. Donc, d'après la question précédente, $\boxed{2x \in C(A)}$

3) On a $\boxed{(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$. Par hypothèse on a $(x+1)^3 = x+1$ et $x^3 = x$. On a donc $\boxed{3x^2 + 3x = 0}$. Or $x^2 \in C(A)$ donc $3x^2 \in C(A)$, donc $\boxed{3x \in C(A)}$.

4) Donc pour $x \in A$ on a $x = 3x - 2x \in C(A)$. Donc $C(A) = A$, c'est-à-dire que $\boxed{A \text{ est commutatif}}$.

Problème, première partie

1) L'orbite est $\boxed{\mathrm{Orb}(x) = \{g\cdot x \mid g\in G\}} \subseteq X$ et le stabilisateur est $\boxed{\mathrm{Stab}(x) = \{g\in G \mid g\cdot x = x\}} \subseteq G$.

2) Pour $g'\in G$, on a les équivalences $g'\in \mathrm{Stab}(g\cdot x) \Leftrightarrow g'\cdot(g\cdot x) = g\cdot x \Leftrightarrow (g^{-1}g'g)x = x$
$\Leftrightarrow g^{-1}g'g \in \mathrm{Stab}(x) \Leftrightarrow g' \in g\,\mathrm{Stab}(x)\,g^{-1}$. Donc $\boxed{\mathrm{Stab}(g\cdot x) = g\,\mathrm{Stab}(x)\,g^{-1}}$.

3) Par définition de l'orbite de x, l'application $f : \begin{array}{l} G \longrightarrow \mathrm{Orb}(x) \\ g \longmapsto g\cdot x \end{array}$ est surjective.
Pour $g\in G$, on a $f^{-1}(\{g\cdot x\}) = \{g'\in G \mid f(g') = g\cdot x\} = \{g'\in G \mid g'x = gx\} = \{g'\in G \mid g^{-1}g' \in \mathrm{Stab}(x)\}$
$= g\,\mathrm{Stab}(x)$ donc $|f^{-1}(\{g\cdot x\})| = |\mathrm{Stab}(x)|$.
Donc $G = \bigsqcup_{y\in \mathrm{Orb}(x)} f^{-1}(\{y\})$ donc $|G| = \sum_{y\in\mathrm{Orb}(x)} |f^{-1}(\{y\})| = \sum_{y\in\mathrm{Orb}(x)} |\mathrm{Stab}(x)|$ donc $\boxed{|G| = |\mathrm{Orb}(x)|\cdot|\mathrm{Stab}(x)|}$

4) Soit $x\in X$. Alors $e\cdot x = x$ donc $(e,x)\in E$ et on a $p(e,x) = x$. Donc $\boxed{p \text{ est surjective}}$

5) On a $p^{-1}(\{x\}) = \{(g,x')\in E \mid p(g,x') = x\} = \{(g,x) \mid g\in G,\ g\cdot x = x\} = \{(g,x) \mid g\in \mathrm{Stab}(x)\}$
donc l'application $\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{Stab}(x) \longrightarrow p^{-1}(\{x\}) \\ g \longmapsto (g,x) \end{array} \text{ est une bijection}}$. Comme précédemment

$E = \bigsqcup_{x\in X} p^{-1}(\{x\})$ donc $\boxed{|E| = \sum_{x\in X} |p^{-1}(\{x\})| = \sum_{x\in X} |\mathrm{Stab}(x)|}$.

6) Donc $|E| = \sum_{\omega\in\Omega}\sum_{x\in\omega} |\mathrm{Stab}(x)|$ or pour $\omega\in\Omega$, d'après la question 2) les ensembles $\mathrm{Stab}(x)$ pour $x\in\omega$ ont tous le même cardinal, et d'après la question 3) ce cardinal vaut $\frac{|G|}{|\omega|}$, donc $|E| = \sum_{\omega\in\Omega}\sum_{x\in\omega} \frac{|G|}{|\omega|} = \sum_{\omega\in\Omega} |\omega|\cdot\frac{|G|}{|\omega|} = \boxed{|\Omega|\cdot|G|}$

7) Soit $q : \begin{array}{l} E \longrightarrow G \\ (g,x) \longmapsto g \end{array}$ (qui n'est pas nécessairement surjective). Pour $g\in G$, si $g\in \mathrm{Im}(q)$ alors l'application $\begin{array}{l} \mathrm{Fix}(g) \longrightarrow q^{-1}(\{g\}) \\ x \longmapsto (g,x) \end{array}$ est bijective. Donc comme précédemment

$\boxed{|E| = \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|}$. Donc $|\Omega|\cdot|G| = \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|$, donc $\boxed{|\Omega| = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|}$.

Problème, deuxième partie

1) Les éléments de G sont $id, r, r^2, \dots, r^8$. Or pour $g \in G$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $o(g^k) = \frac{o(g)}{o(g) \wedge k}$.

On a donc le tableau suivant

élément	Id	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8
ordre	1	9	9	3	9	9	3	9	9

2) On numérote les sommets de 1 à 9 dans le sens trigonométrique. Le coloriage entièrement blanc et le coloriage entièrement noirs sont bien fixes par r (et même par tous les éléments de G). Réciproquement, soit $x \in X$ un coloriage fixe par r. Supposons par exemple que le sommet 1 de x soit blanc. Par définition de l'action, le sommet 2 de $r \cdot x$ est blanc ; or $r \cdot x = x$, donc le sommet 2 de x est blanc. De même, en considérant successivement les sommets $3, \dots, 9$ on constate que tous les sommets sont blancs. Par symétrie, si le sommet 1 de x est noir alors tous les sommets sont noirs.

Donc $\boxed{\text{les points fixes de } r \text{ sont le coloriage entièrement blanc et le coloriage entièrement noir}}$

3) - Si $g = Id$ alors tous les coloriages sont fixes.

- Soit $k \in \{2,4,5,7,8\}$. Si un coloriage est fixe par r alors il est fixe par r^k. Comme $k \wedge 9 = 1$, il existe m et n dans $\mathbb{Z}$ tels que l'on ait une relation de Bezout $km + 9n = 1$, donc $r = r^{km+9n} = (r^k)^m \cdot (r^9)^n = (r^k)^m$ donc si un coloriage est fixe par r^k alors il est fixe par r. Donc les points fixes de r^k sont ceux de r.

- Un coloriage est fixe par r^3 (resp. par $r^6 = r^{-3}$) si et seulement si les sommets 1, 4 et 7 ont la même couleur, les sommets 2, 5 et 8 ont la même couleur et les sommets 3, 6 et 9 ont la même couleur. Donc il y a autant de points fixes pour r^3 (resp. r^6) que de choix de couleurs pour les sommets 1, 2 et 3, c'est-à-dire $2^3 = 8$.

g	Id	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6	r^7	r^8
$\lvert Fix(g) \rvert$	2^9	2	2	2^3	2	2	2^3	2	2

4) D'après la formule de Burnside, le nombre cherché vaut
$\frac{1}{9}(512 + 2 + 2 + 8 + 2 + 2 + 8 + 2 + 2) = \frac{540}{9} = \boxed{60}$.

5) De même le nombre cherché vaut $\frac{1}{9}(3^9 + \underbrace{3+3}_{} + 3^3 + \underbrace{3}_{} + \underbrace{3+3}_{} + 3^3 + 3 + \underbrace{3}_{}) = 3^7 + 1 + 3 + 1 + 3 = \boxed{2195}$.

6) Il y a 3 colliers unicolores. Il y a $60 - 2 = 58$ colliers blancs et gris (resp. gris et noirs, resp. blancs et noirs) non unicolores. Donc le nombre cherché vaut $2195 - 58 - 58 - 58 - 3 = \boxed{2018}$.

remarque : Voir l'encyclopédie en ligne des suites d'entiers
https://oeis.org/A056283