Contrôle continu n° 3

lundi 3 décembre 2018
durée : 2 heures

Documents et calculatrices ne sont pas autorisés. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. Les exercices et le problème sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. **La deuxième partie du problème est facultative.**

Exercice 1 (5 points)
Pour tout groupe G, on appelle centre de G l'ensemble

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G, gh = hg\}.$$

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
2. Pour $n \geq 1$, on note S_n le groupe symétrique d'indice n.
   (a) Rappeler quel est le cardinal de S_n.
   (b) Déterminer $Z(S_1)$ et $Z(S_2)$.
3. On suppose désormais $n \geq 3$. Pour $1 \leq i, j \leq n$ et $i \neq j$, on note $(i\ j)$ la transposition qui échange i et j.
   (a) Pour $i_1, \ldots, i_\ell$ deux à deux distincts, calculer le produit $(i_1\ i_\ell) \circ (i_1\ i_{\ell-1}) \circ \cdots \circ (i_1\ i_2)$. En déduire que tout élément de S_n peut s'écrire comme un produit de transpositions.
   (b) Montrer que pour $\sigma \in S_n$, on a $\sigma \circ (i\ j) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i)\ \sigma(j))$.
   (c) En déduire que l'on a $Z(S_n) = \{\mathrm{Id}\}$.

Exercice 2 (8 points)
Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau qui vérifie $\forall x \in A, x^3 = x$. L'objectif de cet exercice est de montrer que A est commutatif. On note 0 et 1 le neutre additif et le neutre multiplicatif. On pose

$$C(A) = \{x \in A \mid \forall a \in A, ax = xa\}.$$

On rappelle qu'un élément $x \in A$ est dit nilpotent (respectivement idempotent) s'il existe $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$ (resp. si $x^2 = x$).

1. Montrer que l'on a $\forall x \in A, \forall n \geq 1, x^n \in \{x, x^2\}$. En déduire que 0 est l'unique élément nilpotent de A.
2. (a) Soit y un élément idempotent de A. Soit $a \in A$. On pose $b = ya(1-y)$ et $c = (1-y)ay$. Montrer que l'on a $b^2 = c^2 = 0$. En déduire $y \in C(A)$.
   (b) En déduire $\forall x \in A, x^2 \in C(A)$.
   (c) Montrer que $C(A)$ est un sous-groupe de $(A, +)$.
   (d) Montrer que $\forall x \in A, 2x \in C(A)$.
3. Soit $x \in A$. Développer $(x+1)^3$ et en déduire $3x^2 + 3x = 0$. En déduire $3x \in C(A)$.
4. Montrer que A est commutatif.

Problème
L'objectif de ce problème est de compter les colliers de 9 perles qui sont tricolores.

Première partie (8 points) Soient X un ensemble fini (non vide) et G un groupe fini qui agit sur X. On note Ω l'ensemble des orbites. Pour $g \in G$, on note

$$\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \cdot x = x\}$$

l'ensemble des points fixes de g (cet ensemble peut être vide). Les questions suivantes ont pour but de démontrer la formule de Burnside : le nombre d'orbites est

$$|\Omega| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)|.$$

1. Soit $x \in X$. Rappeler la définition de l'orbite $\operatorname{Orb}(x)$ et du stabilisateur $\operatorname{Stab}(x)$.
2. Soient $x \in X$ et $g \in G$. Démontrer $\operatorname{Stab}(g \cdot x) = g \operatorname{Stab}(x) g^{-1}$.
3. Soit $x \in X$. Énoncer et démontrer la formule reliant les cardinaux $|G|$, $|\operatorname{Orb}(x)|$ et $|\operatorname{Stab}(x)|$.
4. On considère l'ensemble

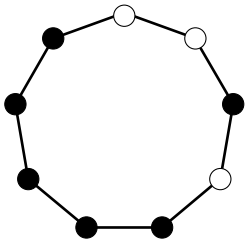
$$E = \{(g, x) \in G \times X \mid g \cdot x = x\}.$$

   Montrer que l'application $p : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & X \\ (g,x) & \longmapsto & x \end{array} \right.$ est surjective.
5. Pour $x \in X$, montrer que l'ensemble $p^{-1}(\{x\})$ est en bijection avec $\operatorname{Stab}(x)$. En déduire $|E| = \sum_{x \in X} |\operatorname{Stab}(x)|$.
6. En déduire $|E| = |\Omega| \times |G|$.
7. Démontrer $|E| = \sum_{g \in G} |\operatorname{Fix}(g)|$ et en déduire la formule de Burnside.

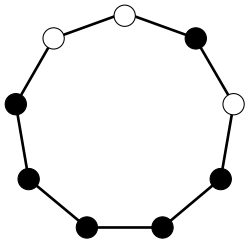
Deuxième partie (facultative) On considère un polygone régulier à 9 côtés centré en 0. Soient r la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{2\pi}{9}$, et G le sous-groupe de $\mathbf{O}(\mathbf{R}^2)$ engendré par r. Le groupe G est donc isomorphe à $\mathbf{Z}/9\mathbf{Z}$.

1. Déterminer l'ordre de chaque élément de G.

On colorie chaque sommet du polygone en blanc ou en noir (on autorise tous les sommets à avoir la même couleur). On note X l'ensemble des coloriages possibles. Par exemple X contient les deux éléments suivants :



et



On considère l'action naturelle de G sur X. Ainsi, en reprenant l'exemple précédent, r envoie le premier coloriage sur le deuxième.

2. Montrer que les seuls coloriages qui sont fixes par r sont le coloriage entièrement blanc et le coloriage entièrement noir.
3. Pour chaque $g \in G$, déterminer le cardinal de $\operatorname{Fix}(g)$. On rappelle que $2^9 = 512$.
4. On appelle « collier » (à au plus deux couleurs) le nombre d'orbites dans X. Montrer que le nombre de colliers à au plus deux couleurs est 60.

Cette fois-ci, on colorie chaque sommet en blanc, en gris ou en noir. On note Y l'ensemble des coloriages possibles et on considère l'action naturelle de G sur Y.

5. Déterminer le nombre de colliers à au plus trois couleurs. On rappelle que l'on a $3^7 = 2187$.
6. Montrer que le nombre de colliers qui contiennent chacune des trois couleurs est 2018.