UN THÉORÈME DE KERCKHOFF, MASUR ET SMILLIE : UNIQUE ERGODICITÉ SUR LES SURFACES PLATES

par

Sébastien Gouëzel & Erwan Lanneau

Résumé. — Ces notes correspondent à un cours donné lors de l'école thématique de théorie ergodique au C.I.R.M. à Marseille en avril 2006. Nous présentons et démontrons un théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie sur l'unique ergodicité du flot directionnel sur une surface de translation dans presque toutes les directions.
La preuve suit essentiellement celle présentée dans un survol de Masur et Tabachnikov. Nous donnons une preuve complète et élémentaire du théorème.

Table des matières

Mots clefs. — Surface plate, feuilletage linéaire, métrique euclidienne.

1. Introduction

Le but de ce texte est de démontrer un théorème de Steven Kerckhoff, Howard Masur et John Smillie concernant un résultat de théorie ergodique sur les surfaces de translation ([**KMS86**]).

1.1. Le prototype d'une surface de translation est donné par le tore plat standard $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ muni de sa métrique plate (ou euclidienne) dz. On peut construire géométriquement $\mathbb{T}^2$ de la manière suivante. Un domaine fondamental pour l'action de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ par translation est donné par le carré unité $]0,1[^2$. Le tore s'obtient alors en identifiant les bords opposés de ce carré à l'aide de translations (voir figure 1a).

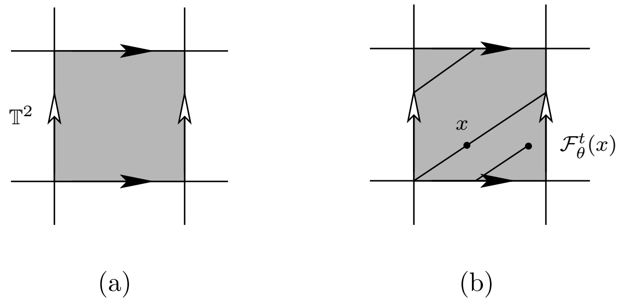

FIGURE 1. Le tore $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ muni de son flot directionnel $\mathcal{F}_\theta$.

1.2. On peut définir sur $\mathbb{T}^2$ un flot directionnel $\mathcal{F}_\theta$, pour $\theta \in \mathbb{S}^1$. C'est le flot linéaire de pente constante égale à θ : si $x \in \mathbb{T}^2$ et $t > 0$ alors $\mathcal{F}_\theta^t(x)$ est l'unique point de $\mathbb{T}^2$ à distance t de x et situé sur la géodésique (orientée positivement) de pente θ passant par x (voir figure 1b). On définit de manière équivalente $\mathcal{F}_\theta^t(x)$ pour $t < 0$.

Par construction il est clair que le flot $\mathcal{F}_\theta$ laisse invariant la mesure de Lebesgue notée Leb. On peut donc considérer le système dynamique $(\mathbb{T}^2, \mathrm{Leb}, \mathcal{F}_\theta)$; il vérifie le théorème classique suivant, dû à Hermann Weyl :

Théorème. — *Pour Lebesgue presque tout $\theta \in \mathbb{S}^1$, le système dynamique $(\mathbb{T}^2, \mathrm{Leb}, \mathcal{F}_\theta)$ est uniquement ergodique.*

Rappelons que cela signifie que $\mathcal{F}_\theta$ admet une seule mesure de probabilité invariante. De manière équivalente, toutes les orbites du flot sont denses dans le tore et uniformément distribuées par rapport à la mesure de Lebesgue. On dira aussi souvent dans la suite que le flot directionnel est uniquement ergodique dans presque toutes les directions. En fait, le théorème de Weyl est même plus précis que cela, puisqu'il donne l'unique ergodicité dans toutes les directions *irrationnelles* ; les directions exceptionnelles forment donc un ensemble dénombrable.

1.3. Une surface de translation est un triplet $(\mathcal{S}, \Sigma, \omega)$ où $\mathcal{S}$ est une surface compacte, connexe, sans bord, orientée, $\Sigma = \{P_1, \ldots, P_n\}$ est un ensemble fini de points $P_i \in \mathcal{S}$ et $\omega = \{(U_i, z_i)\}_i$ est un atlas de translation sur $\mathcal{S} \setminus \Sigma$. Par atlas de translation, nous demandons que les changements de cartes soient du type $z_i = z_j + cst$. On demandera de plus que, au voisinage de chaque singularité P_i, Σ soit isomorphe à un revêtement de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ avec un nombre fini $k_i + 1$ de feuillets. Par abus de langage nous dénoterons souvent $(\mathcal{S}, \Sigma, \omega)$ simplement par $(\mathcal{S}, \omega)$ ou juste $\mathcal{S}$ lorsque le contexte sera clair. La structure euclidienne sur $\mathcal{S}$ induit naturellement une mesure que l'on appellera encore mesure de Lebesgue Leb.

1.4. Comme précédemment, nous pouvons définir un flot directionnel $\mathcal{F}_\theta$ sur $\mathcal{S}$ laissant invariant la métrique euclidienne définie sur $\mathcal{S}$, via les cartes. Ce flot n'est en fait pas correctement défini sur Σ, ni même sur les trajectoires qui arrivent ou partent de Σ (il y en a un nombre fini). Ainsi, $\mathcal{F}_\theta$ est défini sur un sous-ensemble dense et de mesure pleine de $\mathcal{S}$ mais, par abus de langage, nous parlerons néanmoins du flot $\mathcal{F}_\theta$ sur $\mathcal{S}$. Comme le flot directionnel dans $\mathbb{R}^2$ préserve la mesure de Lebesgue, $\mathcal{F}_\theta$ préserve la mesure Leb sur $\mathcal{S}$.

On peut alors énoncer le théorème que nous allons démontrer dans ce texte et qui généralise le théorème de Weyl énoncé ci-dessus.

Théorème **(S. Kerckhoff, H. Masur, J. Smillie, 1986)**. — *Pour toute surface de translation $\mathcal{S}$ et pour Lebesgue presque tout $\theta \in \mathbb{S}^1$, le flot directionnel $\mathcal{F}_\theta$ sur $\mathcal{S}$ est uniquement ergodique.*

1.5. Remarque. — Le théorème ci-dessus reste vrai dans un cadre plus général. Nous pouvons étendre la définition de surfaces de translation aux surfaces de demi-translation en imposant que les changements de cartes soient de la forme $z_i = \pm z_j + cst$. L'objet naturel venant avec un atlas de translation est une forme différentielle abélienne. L'analogue pour les surfaces de demi-translation sont les formes différentielles quadratiques (voir [**HM79**] pour un exposé plus détaillé).

La preuve du théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie dans ce cadre étendu est simplement plus technique et ne nécessite pas d'idée nouvelle fondamentale. Par conséquent, nous nous restreindrons aux surfaces de translation.

1.6. Remarque. — Remarquons aussi que, contrairement au tore, il y a des exemples de surfaces de translation où il y a un nombre non dénombrable de directions minimales et non uniquement ergodiques ([**Vee68, Kea75**]). Une des différences essentielles avec le tore est que le flot linéaire sur un tore est une isométrie globale, i.e. la métrique plate ne possède pas de singularités.

1.7. Remarque. — Enfin on peut noter que le théorème KMS est un renforcement d'un théorème de H. Masur et W. Veech ([**Mas82, Vee82**]). Une section de Poincaré du flot directionnel sur un intervalle dans $\mathcal{S}$ produit un *échange d'intervalles*. Masur et Veech ont démontré que presque tout échange d'intervalles est uniquement ergodique.

1.8. Dans cette note, nous allons suivre une démarche un peu atypique : après avoir donné quelques exemples et propriétés basiques des surfaces de translation, et démontré une version faible du théorème KMS, nous exposerons une preuve complète et élémentaire du théorème KMS.
Ce n'est qu'ensuite que nous introduirons des outils conceptuels supplémentaires qui apporteront un autre éclairage sur la preuve. Nous espérons que la démonstration du théorème pourra être vue comme une justification *a priori* de l'introduction de ces outils.

2. Quelques définitions et exemples

2.1. Surfaces de translation. — Avant d'aller plus loin, donnons quelques propriétés utiles des surfaces de translation. Comme nous l'avons vu précédemment, $\mathcal{S} \setminus \Sigma$ possède un atlas de translation. Ceci permet de définir une métrique euclidienne via la forme différentielle globale $\omega = \mathrm{d}z_i$ sur U_i. Ainsi $\mathcal{S} \setminus \Sigma$ est localement isométrique à un plan $\mathbb{R}^2$, la courbure de la métrique étant nulle en tout point. La formule de Gauß-Bonnet implique alors que la courbure de la métrique sur $\mathcal{S}$ est concentrée dans les points P_i.

Par définition, il existe pour tout i une identification entre un voisinage épointé de P_i dans $\mathcal{S}$ et un revêtement de degré k_i+1 de $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. La surface $\mathcal{S}$ est ainsi isométrique à un cône d'angle $2(k_i+1)\pi$. Nous parlerons ainsi pour P_i de singularité conique d'angle $2(k_i+1)\pi$. Notons ici qu'au voisinage d'un point régulier, la surface est bien isométrique à un “cône plat” d'angle $2(k+1)\pi = 2\pi$ avec $k=0$. La courbure de Gauß est donnée par $\kappa = -k_i\pi$ et la formule de Gauß-Bonnet s'écrit ici :

$$\sum_{i=1}^{n} k_i = 2g-2 \qquad \text{où } g = \mathrm{genre}(\mathcal{S}). \tag{2.1}$$

Le théorème de Riemann-Roch implique que pour toute partition entière $(k_1,\dots,k_n)$ de $2g-2$, il existe une surface de translation avec exactement n singularités coniques d'angles $2(k_i+1)\pi$ pour $i=1,\dots,n$; mais nous n'utiliserons pas ce fait ici.

On peut définir un feuilletage vertical (respectivement horizontal) sur $\mathcal{S} \setminus \Sigma$ par les lignes de niveaux des cartes locales : $z_i^{-1}(x = cst)$ (respectivement $z_i^{-1}(y = cst)$). Cela permet alors, dans ces coordonnées, d'introduire le flot directionnel $\mathcal{F}_\theta$ pour $\theta \in \mathbb{S}^1$. La métrique euclidienne est invariante sous l'action de ce flot. Les orbites du flot directionnel ne sont bien sûr pas toutes bien définies : certaines feuilles rencontrent des singularités en temps fini. Néanmoins $\mathcal{S}$ ne possède qu'un nombre fini de singularités et par chaque singularité ne passe qu'un nombre fini de feuilles dans la direction θ. Ceci implique alors que pour tout θ, le flot $\mathcal{F}_\theta$ est presque partout bien défini sur $\mathcal{S}$.

La structure euclidienne sur $\mathcal{S}$ est très facile à visualiser localement ; dans les coordonnées fournies par le feuilletage horizontal et le feuilletage vertical, une géodésique est localement une droite de pente constante. Bien sûr globalement une feuille peut avoir des comportements baroques. Dans toute la suite, sauf mention du contraire, nous allons nous restreindre aux surfaces d'aire 1, c'est-à-dire $\mathrm{Aire}(S) := \int_S \omega \wedge \overline{\omega} = 1$.

Nous utiliserons les terminologies suivantes pour le flot directionnel :
- Une feuille passant par une singularité est une *séparatrice*.
- Une feuille connectant deux singularités (éventuellement les mêmes) est une *connexion de selles* ou segment géodésique.
- Une feuille ne passant pas par une singularité est dite *régulière*.

2.2. La géométrie des surfaces de translation peut se comprendre en voyant une telle surface comme recollement de polygones. Plus précisément, considérons des polygones $P_1, \ldots, P_n$ du plan, d'adhérences disjointes, tels que les côtés de ces polygones soient regroupés par paires de côtés parallèles et de même longueur. On peut alors former une surface $\mathcal{S}$ en identifiant les côtés correspondants. Nous ajoutons la conditions que l'angle conique autour des sommets des polygones (vu dans $\mathcal{S}$) soit de la forme $2c\pi$ où c est un entier (sans cette condition, la notion d'angle est mal définie, voir par exemple la définition analogue dans [**Mas06**]). La surface $\mathcal{S}$ devient alors une surface de translation. C'est une surface de translation, dont les singularités forment un sous-ensemble des sommets des polygones P_j.

Réciproquement, toute surface de translation peut s'obtenir ainsi, comme nous allons le voir. Notons aussi que pour des raisons évidentes, nous ne considérerons que des surfaces connexes.

2.3. Définition. — *On appelle triangulation d'une surface de translation une triangulation dont les sommets sont les singularités et les arêtes des connexions de selles.*

2.4. Si on part d'un ensemble de connexions de selles dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, on peut les compléter pour obtenir une triangulation de la surface (ce qui se vérifie aisément en ajoutant des arêtes tant que c'est possible et en remarquant que quand ce n'est plus possible la surface est nécessairement triangulée).
Ainsi, toute surface admet une triangulation. On en déduit aisément que toute surface de translation s'obtient en recollant des triangles suivant la procédure décrite en 2.2.

2.5. Considérons une triangulation d'une surface de translation $\mathcal{S}$ de genre g, et notons respectivement s, e, f le nombre de sommets, côtés et faces de cette triangulation. Alors $s - e + f = 2 - 2g$ par la formule d'Euler. Comme chaque face a trois côtés et chaque côté est sur le bord de deux faces, nécessairement $2e = 3f$. Comme s est le nombre de singularités, on obtient

$$f = 2(s + 2g - 2). \tag{2.2}$$

2.6. Exemples. — Le tore plat fournit beaucoup d'exemples dérivés. Soit $f : \mathcal{S} \to \mathbb{T}^2$ un revêtement ramifié au dessus de l'origine. Si on note $\mathrm{d}z$ la métrique plate sur $\mathbb{T}^2$ alors la métrique $f^*\mathrm{d}z$ équipe $\mathcal{S} \setminus f^{-1}(0)$ d'une structure de surface plate (voir figure 2).
Un exemple beaucoup plus "générique" peut être construit à partir d'une surface plate quelconque, obtenue en recollant des polygones : il suffit de bouger les côtés des polygones de manière à préserver la propriété des paires de côtés (la figure 3 est un exemple "déformé" de la figure 2). Le terme générique employé ci-dessus sera expliqué dans la section 9.

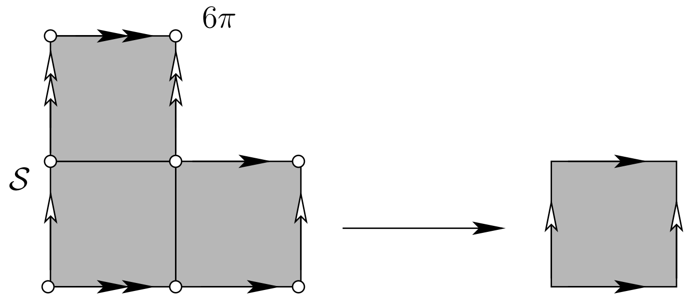

FIGURE 2. Un revêtement ramifié de degré 3 au dessus du tore. Le revêtement est ramifié au dessus de l'origine et l'unique point critique est une singularité pour la métrique, d'angle 6π. On a donc $2 \cdot \text{genre}(\mathcal{S}) - 2 = 2$, soit $\text{genre}(\mathcal{S}) = 2$.

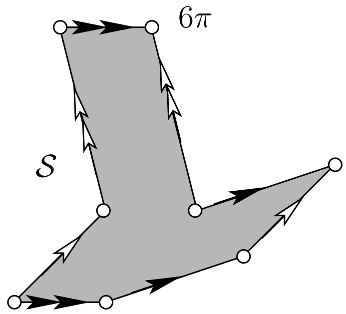

FIGURE 3. Une surface de translation de genre 2. L'angle conique de l'unique singularité (point blanc) est 6π.

Nous donnons dans la figure 4 un dernier exemple, toujours de genre 2, mais cette fois-ci avec deux singularités coniques, nécessairement chacune d'angle 4π.

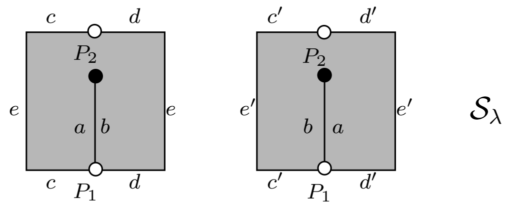

FIGURE 4. Deux tores unité recollés le long du segment géodésique vertical P_1P_2 centré et de hauteur $\lambda \in]0, 1[$ (on identifie les côtés de même étiquette par translation). La surface $\mathcal{S}_\lambda$ correspondante est de genre 2. Elle possède deux singularités coniques (points blanc et noir) chacune d'angle 4π.

2.7. Billards rationnels et surfaces de translation. — Soit $P \subset \mathbb{R}^2$ un polygone. Dans tout ce paragraphe, on notera Γ le sous groupe des isométries linéaires de $\mathbb{R}^2$ engendré par les parties linéaires des réflexions par rapport aux côtés de P.

On note $\tilde{\mathcal{F}}$ le flot du billard sur $P \times \mathbb{S}^1$: le point $\tilde{\mathcal{F}}_t(x, \theta)$ est obtenu en partant de x, en suivant une ligne droite dans la direction θ jusqu'à rencontrer un côté du polygone P. On "rebondit" alors suivant les lois de Descartes de l'optique géométrique et on continue ce processus pendant un temps t. Ce flot préserve la mesure $\mathrm{Leb}_P \otimes \mathrm{Leb}_{\mathbb{S}^1}$, et il est défini pour toutes les trajectoires qui n'arrivent pas dans un des coins du polygone. Lorsque les angles du billard sont des multiples rationnels de π, ce flot n'est évidemment pas ergodique : si $\theta \in \mathbb{S}^1$, l'ensemble $P \times \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \{\gamma \cdot \theta\}$ est invariant par $\tilde{\mathcal{F}}$ (notons que Γ est alors fini). On notera alors $\tilde{\mathcal{F}}_\theta$ la restriction de $\tilde{\mathcal{F}}$ à cet ensemble ; ce flot préserve la mesure $\mathrm{Leb} \otimes \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma \cdot \theta}$.

Une construction classique (voir [**FK36, ZK75**]) permet d'associer à chaque polygone P une surface de translation (non nécessairement compacte) $\mathcal{S}(P)$ telle que le flot du billard et le flot directionnel commutent avec la construction. Nous résumons ici la construction en question.

Pour $\gamma \in \Gamma$ on notera $P_\gamma = \gamma(P)$. Nous allons décrire une relation d'équivalence sur la réunion disjointe $\bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} P_\gamma$ des polygones P_γ. Si c est un côté de P_γ soit $\delta_c \in \Gamma$ la partie linéaire de la réflexion par rapport à c. On identifie alors $c \subset P_\gamma$ avec $\delta_c(c) \subset P_{\delta \circ \gamma}$ par translation. L'ensemble quotient pour cette relation est noté $\mathcal{S}(P)$.

La surface $\mathcal{S}(P) \setminus \{\text{sommets de } P\}$ hérite naturellement d'un atlas de translation via les polygones P_γ. Il est facile de vérifier que cet atlas s'étend globalement en une structure de translation sur $\mathcal{S}$ tout entier. Les singularités de la métrique forment un sous-ensemble (éventuellement strict) des sommets des polygones P_γ. Par ailleurs, la surface $\mathcal{S}$ est compacte si et seulement si le polygone P est rationnel, c'est à dire si et seulement si les angles de P sont des multiples rationnels de π. Le polygone P et ses images par les éléments de Γ pavent alors la surface $\mathcal{S}$ et on obtient une application $\pi : \mathcal{S}(P) \to P$. Par construction les orbites du flot $\mathcal{F}$ se projettent sur les orbites du flot $\tilde{\mathcal{F}}$. Lorsque $\mathcal{S}$ est compacte, les orbites de $\mathcal{F}_\theta$ se projettent même sur celles de $\tilde{\mathcal{F}}_\theta$, de manière π-équivariante.
Ainsi comme corollaire direct du théorème KMS on obtient le résultat suivant.

2.8. Corollaire. — *Pour tout billard rationnel, l'ensemble*

$$\{\theta \in \mathbb{S}^1,\ \tilde{\mathcal{F}}_\theta \textit{ est uniquement ergodique}\}$$

est de mesure pleine.

Notons que ce résultat a des conséquences pour les billards non nécessairement rationnels. En effet, en approchant un billard (polygonal) arbitraire par des billards rationnels, grâce à une remarque de A. Katok, il permet de démontrer le résultat suivant.

2.9. Corollaire. — *L'ensemble $\{Q\ ;\ Q$ est un polygone à k côtés et $\tilde{\mathcal{F}}$ est ergodique$\}$ forme un G_δ dense dans l'ensemble des polygones à k côtés (pour la topologie produit, c'est à dire en identifiant l'ensemble des polygones à k côtés avec un ouvert de $\mathbb{R}^{2k}$).*

2.10. Si l'on est principalement intéressé par les billards, et en particulier par le corollaire 2.8, on pourrait essayer de ne pas mentionner du tout les surfaces de translation, et de transcrire directement la preuve du théorème KMS que nous allons présenter dans le langage des billards. Cependant, un ingrédient essentiel de la preuve du théorème KMS est la *déformation* des surfaces de translation, par l'action du groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ (et plus précisément par son sous-groupe constitué des matrices diagonales). Ce processus de déformation est aisé à mettre en place dans le cadre des surfaces de translation (voir la section 5), alors qu'il est impossible dans l'espace des billards rationnels ! Moralement, cela s'explique par le fait qu'un billard rationnel et son flot sont des notions euclidiennes, alors qu'une surface de translation est une notion affine. C'est ce changement de groupe structurel qui permet de faire marcher la preuve. Ainsi, les surfaces de translation sont un outil indispensable dans l'étude des billards rationnels.

2.11. Nous terminons cette section par quelques remarques. Dans l'étude des surfaces de translation, il existe trois grandes classes de résultats.

1. Tout d'abord, certains types de résultats sont valables pour *toutes* les surfaces de translation. C'est par exemple le cas du théorème KMS. Les techniques utilisées pour démontrer ce genre de résultats ne sont en fait pas très nombreuses (elles sont essentiellement géométriques et combinatoires). La preuve du théorème KMS que nous allons donner est assez représentative de ce type d'arguments.
2. Nous verrons plus loin que l'on peut mettre une mesure sur l'ensemble des surfaces de translation lorsque l'on fixe le type topologique (genre et singularités). Certains résultats sont démontrés pour *presque toutes* les surfaces de translation, au sens de cette mesure. Les résultats obtenus ainsi sont souvent beaucoup plus précis que ceux qui sont valables en toute généralité. Néanmoins, le prix à payer est que ces résultats ne s'appliquent pas aux billards puisque l'ensemble $\{\mathcal{S}(P),\ P \text{ polygone rationnel}\}$ est de mesure nulle dans l'espace des surfaces de translation !
3. Enfin, on peut se restreindre à certaines classes de surfaces (surfaces de Veech, ou surfaces de genre 2 par exemple) et chercher à obtenir des résultats de classification, presque de nature algébrique.

Les techniques utilisées pour démontrer des résultats du deuxième ou du troisième type sont très variées, et ne seront pas du tout abordées dans ce texte.

3. Le théorème KMS faible

3.1. Théorème **(KMS faible).** — *Pour toute surface de translation $\mathcal{S}$ et pour Lebesgue presque tout $\theta \in \mathbb{S}^1$, le flot directionnel $\mathcal{F}_\theta$ sur $\mathcal{S}$ est minimal.*

Ce théorème est dû à A. Katok et A. Zemljakov ([**ZK75**]). Il implique le corollaire suivant, qui est une version "transitive" du corollaire 2.9.

3.2. Corollaire. — *L'ensemble* $\{Q\ ;\ Q$ *est un polygone à* k *côtés et* $\tilde{\mathcal{F}}$ *est transitif*$\}$ *forme un* G_δ *dense dans l'ensemble des polygones à* k *côtés (pour la topologie produit, c'est à dire en identifiant l'ensemble des polygones à* k *côtés avec un ouvert de* $\mathbb{R}^{2k}$*).*

3.3. Remarque. — Le résultat ci-dessus est bien plus faible que le théorème de Kerckhoff, Masur et Smillie (théorème KMS fort). En particulier, nous allons montrer ici que l'ensemble des directions non-minimales est dénombrable, donc de mesure nulle. Dans le cas général, il peut arriver que l'ensemble des directions non uniquement ergodiques soit bien plus "gros". Par exemple, pour les surfaces $\mathcal{S}_\lambda$ de la figure 4, on peut montrer que si λ est diophantien alors l'ensemble des directions non-uniquement ergodiques sur la surface $\mathcal{S}_\lambda$ est de dimension de Hausdorff 1/2 ([**Che03**], voir aussi section 10).

Le théorème 3.1 repose sur les propositions 3.4 et 3.5 suivantes.

3.4. Proposition. — *Sur une surface de translation, l'ensemble des directions de connexions de selles est au plus dénombrable.*

Démonstration. — Il suffit de passer au revêtement universel. □

3.5. Proposition. — *Soit* $\mathcal{S}$ *une surface de translation. Si le flot directionnel* $\mathcal{F}_\theta$ *ne possède pas de connexion de selles alors il est minimal : c'est à dire toutes les feuilles de* $\mathcal{F}_\theta$ *sont denses.*

On peut sans perte de généralité se restreindre au cas du feuilletage vertical. Avant de démontrer cette proposition, nous aurons besoin d'un lemme géométrique et d'un lemme technique.

3.6. Lemme. — *Soit* $\mathcal{S}$ *une surface de translation de genre* $g \geq 2$*. Supposons que le flot vertical possède une feuille verticale régulière fermée. Alors le flot vertical possède aussi une connexion de selles.*

Démonstration. — Soit α une feuille verticale régulière fermée sur $\mathcal{S}$. Comme $\mathcal{S}$ ne possède qu'un nombre fini de singularités, il existe une autre feuille verticale fermée parallèle à α et proche de α. De proche en proche, cela fournit un plongement isométrique du cylindre $]0, r[\times\mathbb{S}^1$ de périmètre $|\alpha|$ et de largeur r dans $\mathcal{S}$. Ce cylindre est feuilleté par des feuilles régulières verticales homologues à α. Par ailleurs $\mathrm{Aire}(\mathcal{S}) = 1$ donc on ne peut pas "épaissir" ce cylindre à l'infini. Les deux seules obstructions topologiques sont les suivantes. Ou bien il existe une connexion de selles verticale, située sur le bord du cylindre, ou bien $\mathcal{S}$ s'obtient en recollant les deux bords du cylindre ensemble. Ce dernier cas implique alors que $g(\mathcal{S}) = 1$ ce qui est une contradiction. Le lemme est ainsi démontré. □

3.7. Lemme. — *Soit* α^+ *une feuille verticale (orientée positivement) non périodique (i.e. non fermée). Soient* $P \in \alpha$ *un point et* $I = [P, Q]$ *un segment géodésique transverse au flot vertical. Alors* $]P, Q[\, \cap\, \alpha^+ \neq \emptyset$*.*

Démonstration. — La surface $\mathcal{S}$ ne possède qu'un nombre fini de séparatrices verticales. Ainsi on peut choisir $I' = [P, Q'] \subset I$ tel que toutes les feuilles verticales issues de I' ne rencontrent pas de singularités avant de revenir à I. Considérons alors un petit rectangle vertical R_h *plongé* dans $\mathcal{S}$, de base I' et de hauteur h, avec h petit. Le bord vertical gauche de R_h est inclus dans α^+. Notons par β^+ le bord vertical droit. Lorsque $h \to \infty$ le rectangle R_h ne reste pas plongé dans $\mathcal{S}$: en effet l'aire de $\mathcal{S}$ est finie et l'aire de R_h tends vers l'infini. Donc (rappelons que R_h ne rencontre pas de singularité avant de revenir à I) deux possibilités peuvent arriver. Ou bien α^+ intersecte $]P, Q'[$ et le lemme est démontré (figure 5a), ou bien c'est β^+ qui intersecte $]P, Q'[$ (figure 5b).

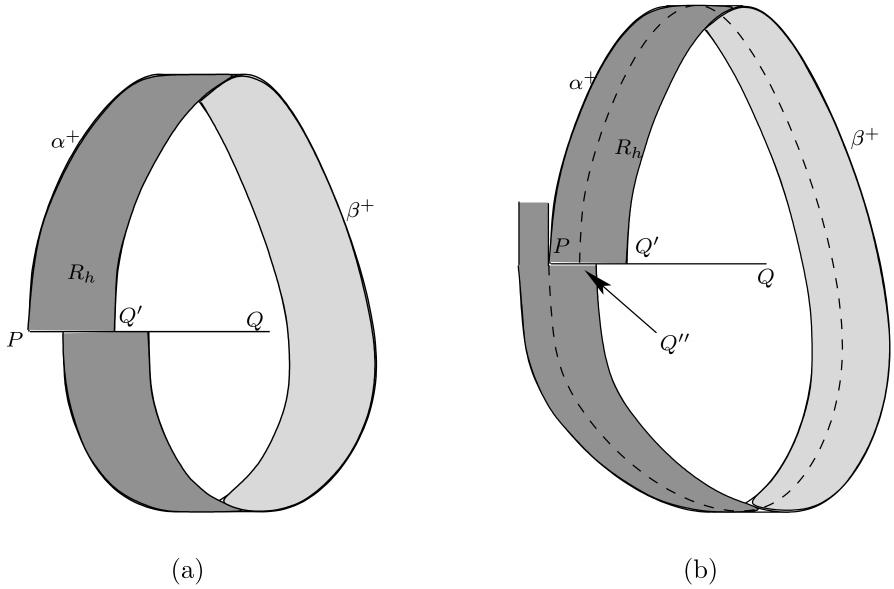

FIGURE 5.

Dans ce dernier cas, notons $Q'' \in I'$ l'unique point tel que la feuille verticale issue de Q'' dans R_h arrive à P. Considérons alors $I'' = [P, Q''] \subset I'$ et appliquons le raisonnement analogue à celui précédent. On obtient alors un petit rectangle de base I''. Le même argument amène à la dichotomie précédente. Il est facile de voir alors que la deuxième conclusion dans cette dichotomie ne peut-être satisfaite. Le lemme est démontré. $\square$

3.8. On peut maintenant conclure.

Preuve de la proposition 3.5. — Supposons que $\mathcal{S}$ ne contienne pas de connexion de selles verticale. Soit β une feuille verticale. Si β est fermée alors on obtient une contradiction grâce au lemme 3.6. Notons A l'adhérence de β dans $\mathcal{S}$. Nous allons montrer que $A = \mathcal{S}$. Sinon prenons $P \in \partial A$. Soit α la feuille verticale issue de P. Si α est fermée alors le lemme 3.6 fournit de nouveau une contradiction. Sinon on note $I = [P, Q]$ un petit segment géodésique, transverse au flot vertical, passant par P et tel que son intérieur $\mathrm{Int}(I)$ soit inclus dans $\mathcal{S} \setminus A$. Notons aussi que A est invariant par le flot vertical donc $\alpha \subset A$. Le lemme 3.7 implique alors que $\mathrm{Int}(I) \cap \alpha \neq \emptyset$ ce qui est évidemment incompatible avec les deux dernières assertions. Donc $A = \mathcal{S}$ et ainsi toutes les feuilles verticales sont denses. La proposition est démontrée. □

3.9. Remarque. — Pour aller plus loin que le théorème 3.1, on peut chercher à caractériser les directions exceptionnelles, c'est-à-dire les directions pour lesquelles il y a une connexion de selles. C'est un problème très difficile en général. Par exemple en genre 2, pour les surfaces de Veech, cet ensemble est toujours (quitte à normaliser convenablement) un corps de nombres union l'infini (plus précisément, soit $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, soit $K \cup \{\infty\}$ oú K est un corps quadratique réel).

4. Preuve du théorème KMS

4.1. Définition. — *Soit $\mathcal{S}$ une surface de translation. On dira que $\mathcal{S}$ part à l'infini dans la direction $\pi/2$, ou simplement que $\mathcal{S}$ part à l'infini, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que, pour tout $t \geq T$, il existe une connexion de selles dans $\mathcal{S}$ (de composantes horizontales et verticales h et v) telle que $e^t|h| + e^{-t}|v| \leq \varepsilon$.*
On parlera de même de "partir à l'infini dans la direction θ" en considérant les composantes des connexions de selle dans la direction θ et la direction orthogonale à θ.

4.2. Les deux ingrédients essentiels de la preuve du théorème KMS sont les résultats suivants.

Théorème A. — *Soit $\mathcal{S}$ une surface de translation qui ne part pas à l'infini dans la direction θ. Alors le flot $\mathcal{F}_\theta$ est uniquement ergodique.*

Théorème B. — *Soit $\mathcal{S}$ une surface de translation. Alors l'ensemble*

$$\{\theta \in \mathbb{S}^1,\ \mathcal{S} \text{ part à l'infini dans la direction } \theta\}$$

est de mesure nulle.

Ces deux théorèmes impliquent manifestement le théorème KMS. Leurs démonstrations sont complètement différentes et indépendantes, et seront présentées dans les sections 6 et 7 respectivement. Remarquons aussi tout de suite que le théorème A n'est pas une équivalence, contrairement au cas du genre 1 (voir section 10). Le théorème A est aussi connu sous le nom de critère de Masur.

Notons qu'il existe une version combinatoire de ce critère, due à M. Boshernitzan (voir [**Bos85**]). Nous reviendrons section 10 sur ce critère.

Avant de démontrer les théorèmes A et B, on va introduire l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sur les surfaces de translation, ce qui permet de reformuler de manière un peu plus confortable la notion de départ à l'infini définie en 4.1.

5. Action de $SL_2(\mathbb{R})$ sur les surfaces de translation

5.1. Le groupe $SL_2(\mathbb{R})$ agit linéairement sur $\mathbb{R}^2$; il agit donc aussi naturellement sur les surfaces de translation via les cartes locales. Si $(\mathcal{S}, \Sigma, \omega)$ est une surface de translation avec $\omega = \{(U_i, z_i)\}_i$ et si $A \in SL_2(\mathbb{R})$ est une matrice alors on définit l'action comme suit.

$$A \cdot (\mathcal{S}, \Sigma, \omega) := (\mathcal{S}, \Sigma, A\omega) \tag{5.1}$$

où $A\omega$ est, par définition, le nouvel atlas plat $A\omega := \{(U_i, A \circ z_i)\}_i$, $A \circ z_i$ désignant l'action linéaire de A sur la coordonnée z_i. Remarquons que l'action préserve les surfaces d'aire 1.

5.2. Nous serons particulièrement intéressé par les 3 sous-groupes à 1 paramètre suivants.

$$g_t = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad h_s = \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

L'action de g_t sera appelée *flot géodésique de Teichmüller* ou simplement flot géodésique pour une raison qui deviendra claire dans les sections suivantes. L'action de g_t "écrase" les feuilles verticales par e^t et "dilate" les feuilles horizontales par e^t. Le flot h_s est le flot horocyclique et le flot R_θ est le flot circulaire. L'action de R_θ consiste à faire tourner le feuilletage vertical et le feuilletage horizontal de $\mathcal{S}$ d'un angle de $-\theta$.

5.3. Nous noterons pour la suite $\mathcal{S}_\theta = R_\theta \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_{\theta,t} = g_t \mathcal{S}_\theta$. On vérifie sans peine que le flot vertical sur $\mathcal{S}_{\pi/2-\theta}$ correspond au flot dans la direction θ sur $\mathcal{S}$.

5.4. Définition. — *Si $\mathcal{S}$ est une surface de translation, on appelle* systole *de $\mathcal{S}$ la longueur (dans la métrique euclidienne) de la plus petite connexion de selles de $\mathcal{S}$. On la notera* $\mathrm{sys}(\mathcal{S})$.

5.5. Avec ces définitions, on peut reformuler aisément la définition 4.1 comme suit : une surface part à l'infini si et seulement si $\mathrm{sys}(g_t\mathcal{S}) \to 0$ quand $t \to \infty$. Elle part à l'infini dans la direction θ si et seulement si $\mathrm{sys}(g_t R_{\pi/2-\theta}\mathcal{S}) \to 0$ quand $t \to \infty$.

6. Preuve du théorème A

Comme d'habitude, il suffit de le prouver pour le flot vertical $\theta = \pi/2$, puisque le résultat général s'en déduit par rotation. L'idée essentielle de la preuve est la suivante : si la surface ne part pas à l'infini, alors on va pouvoir extraire une "sous-suite convergente" (en un certain sens à expliquer) par un argument de compacité. On conclura ensuite en utilisant la connexité de la surface limite.

6.1. Définition. — *Soient $s, g \in \mathbb{N}$. On dira qu'une suite de surfaces de translation $\mathcal{S}_n$ d'aire* 1 *(de genre g, avec s singularités) converge s'il existe des triangulations de $\mathcal{S}_n$ par des triangles $T_n^1, \dots, T_n^f$ (avec f ne dépendant que de g et s, d'après* (2.2)*) telles que*

1. *chaque suite de triangle $(T_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, comme suite de triangles dans $\mathbb{R}^2$, vers un triangle (peut-être dégénéré i.e. aplati) T^i.*
2. *le motif de recollement des T_n^i pour former $\mathcal{S}_n$ est constant à partir d'un certain rang.*

On impose aussi dans ce type de convergence que la systole $\mathrm{sys}(\mathcal{S}_n)$ *de* $\mathcal{S}_n$ *soit uniformément minorée par une constante non-nulle. Ceci implique en particulier que la surface limite est non "dégénérée".*

Il est alors possible de recoller les triangles T^i suivant les mêmes motifs que les T_n^i pour n assez grand, pour obtenir une surface de translation, que l'on notera $\mathcal{S}_\infty$, de genre g avec s singularités. On dira alors que $\mathcal{S}_n$ converge vers $\mathcal{S}_\infty$. La topologie de $\mathcal{S}_\infty$ est la même que celle des surfaces $\mathcal{S}_n$ (elle est déterminée par le motif combinatoire de recollement des triangles).

Notons aussi que si l'on n'imposait pas la condition sur la systole de $\mathcal{S}_n$, il serait *a priori* possible que des singularités fusionnent dans la surface limite ! Par exemple la surface limite pourrait ne plus être connexe.

6.2. Ce type de convergence est assez faible, mais il permet de réaliser les opérations suivantes.

1. Si $x_n \in \mathcal{S}_n$, cela a un sens de parler de la convergence de x_n vers $x \in \mathcal{S}_\infty$, en regardant ce qui se passe dans le triangle contenant x_n.
2. Si on se donne une partie de $\mathcal{S}_\infty$, on peut l'approcher par une partie de $\mathcal{S}_n$ si n est assez grand.

Nous n'aurons pas besoin d'autre chose pour démontrer le théorème A.

6.3. Lemme. — *Soit* $\varepsilon_0 > 0$. *Il existe une constante* C_0 *ne dépendant que de* ε_0 *telle que toute surface de translation d'aire* 1 *et de systole au moins* ε_0 *admette une triangulation dont tous les côtés ont une longueur au plus* C_0.

Par triangulation, on entend ici une triangulation dont les sommets sont les singularités et les arêtes des connexions de selles, comme en 2.3.

Démonstration. — Toute surface de translation admet une triangulation, d'après 2.4. Partons d'une telle triangulation, et considérons une arête de longueur K maximale. Notons-la AC, et considérons les deux triangles qui bordent cette arête, comme sur la figure 6.

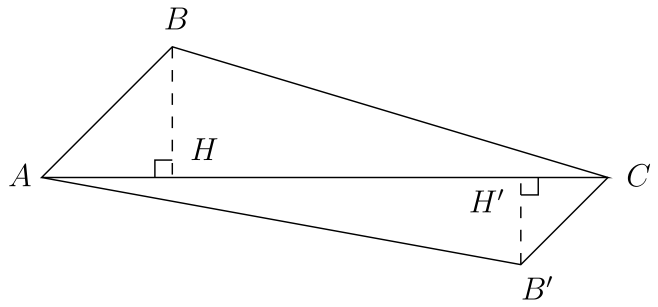

Figure 6.

Comme l'aire de la surface est au plus 1, ces deux triangles sont d'aire au plus 1. Ainsi l'aire de AHB est $1/2(AC.BH) \leq 1$ ce qui donne $BH \leq 2/K$. Comme AB et BC sont de longueur au moins ε_0, Pythagore dans le triangle ABH donne $AH^2 = AB^2 - BH^2 \geq \varepsilon_0^2 - 4/K^2 \geq \varepsilon_0^2/4$ si K est grand (c'est à dire si $K \geq \dfrac{4}{\sqrt{3}\varepsilon_0}$). Donc $AH \geq \varepsilon_0/2$. De la même manière on tire $CH \geq \varepsilon_0/2$. Les mêmes inégalités ont lieu pour $B'H'$, AH' et CH'.

On retriangule alors la surface en retirant l'arête AC et en la remplaçant par une arête BB'. Cette arête est de longueur au plus $BH + B'H' + HH' \leq 4/K + (K - \varepsilon_0)$, qui est majoré par $K - \varepsilon_0/2$ si K est très grand (c'est à dire si $K \geq 2/\varepsilon_0$).

Ainsi, on peut faire décroître la longueur maximale des arêtes de la triangulation d'une quantité fixée. En répétant ce processus, on arrive alors à une triangulation satisfaisant la borne requise. □

6.4. Corollaire. — *Soit $\mathcal{S}_n$ une suite de surfaces de translation d'aire* 1*, avec un genre et un nombre de singularités fixés. On suppose que la systole de $\mathcal{S}_n$ ne tend pas vers* 0 *quand n tend vers l'infini. Alors $\mathcal{S}_n$ admet une sous-suite qui converge vers $\mathcal{S}_\infty$ au sens de la définition* 6.1. *De plus le genre et le nombre de singularités de $\mathcal{S}_\infty$ sont les mêmes que $\mathcal{S}_n$.*

Démonstration. — Grâce au lemme 6.3, on obtient une sous-suite de $\mathcal{S}_n$ ayant une triangulation avec des côtés de taille bornée supérieurement et inférieurement, par des triangles T_n^i. Les suites de tels triangles dans $\mathbb{R}^2$ forment un ensemble compact, on peut donc choisir une sous-suite de $\mathcal{S}_n$ de telle sorte que les T_n^i convergent. Il y a aussi un nombre fini de motifs de recollement possibles, on obtient donc une sous-suite convergente quitte à extraire encore une fois. Notons aussi que dans le lemme précédent, lorsque l'on retriangule la surface, la nombre de faces f et le genre g de la surface restent inchangés. Donc d'après la formule (2.2) le nombre de singularités s reste aussi inchangé. Le corollaire est démontré. □

6.5. On peut commencer la preuve du théorème A proprement dite.

Soit $\mathcal{S}$ une surface de translation. On note $\mathcal{S}_t$ la surface obtenue en dilatant les distances horizontales d'un facteur e^t, et en contractant les distances verticales de ce même facteur. Formellement, $\mathcal{S}_t = g_t\mathcal{S}$. On suppose que $\mathcal{S}$ ne part pas à l'infini. Ceci garantit alors l'existence d'une suite $t_n \to \infty$ et de $\varepsilon_0 > 0$ tels que toute connexion de selles de la surface $\mathcal{S}_{t_n}$ soit de longueur au moins ε_0. D'après le corollaire 6.4, on peut extraire de la suite $\mathcal{S}_{t_n}$ une sous-suite convergente, que nous noterons simplement $\mathcal{S}_n$.

Les surfaces $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{S}$ sont des structures de translation sur la même surface topologique sous-jacente. Pour bien les distinguer, nous noterons f_n l'application $f_n : \mathcal{S} \to \mathcal{S}_n$ qui est l'identité sur cette surface topologique sous-jacente.

Soit μ une mesure invariante ergodique pour le flot vertical sur $\mathcal{S}$. On note $B(\mu) \subset \mathcal{S}$ l'ensemble des points x qui sont typiques pour la mesure μ, i.e., tels que $\frac{1}{T}\int_0^T \delta_{\mathcal{F}^t_{\pi/2}(x)}$ converge faiblement vers μ quand $T \to \pm\infty$, où δ_y désigne la masse de Dirac au point y.

On définit un sous-ensemble $A(\mu) \subset \mathcal{S}_\infty$ comme suit. C'est la réunion, pour $x \in B(\mu)$, de l'ensemble des valeurs d'adhérence possibles dans $\mathcal{S}_\infty$ de la suite $f_n(x) \in \mathcal{S}_n$ (comme défini en 6.2).

Pour démontrer qu'il y a une seule mesure invariante μ, on va en fait montrer qu'il y a un seul ensemble $A(\mu)$. On appellera *rectangle* un rectangle dont les côtés sont horizontaux et verticaux, et *rectangle plongé* un rectangle qui ne rencontre pas les singularités.

6.6. Lemme. — *Considérons dans $\mathcal{S}_\infty$ un rectangle plongé. On suppose qu'il existe $x \in B(\mu)$ et $y \in B(\nu)$ (où μ et ν sont deux mesures invariantes) tels que $f_n(x)$ et $f_n(y)$ convergent respectivement vers deux sommets opposés de ce rectangle. Alors $\mu = \nu$.*

Démonstration. — Supposons que μ et ν ne coïncident pas. Comme les rectangles plongés de hauteur 1 engendrent la tribu des boréliens, il existe un rectangle $U = I \times J$, plongé dans $\mathcal{S}$, tel que $\mu(U) \neq \nu(U)$, et de hauteur 1.

Si n est assez grand, on peut tracer dans $\mathcal{S}_n$ un rectangle R_n à côtés horizontaux et verticaux, ne contenant pas de singularité, et dont $f_n(x)$ et $f_n(y)$ sont deux sommets opposés. Cela résulte de l'hypothèse dans $\mathcal{S}_\infty$, et de la convergence de $\mathcal{S}_n$ vers $\mathcal{S}_\infty$. De plus, la taille verticale c_n de R_n converge vers $c > 0$.

Le rectangle $f_n^{-1}(R_n)$ dans $\mathcal{S}$ est un rectangle de hauteur $T_n = c_n e^{t_n} \to \infty$, il est très haut et très fin, et possède x et y pour sommets opposés. Notons $C_n(x)$ et $C_n(y)$ les côtés verticaux de $f_n^{-1}(R_n)$ contenant respectivement x et y. Comme x est typique pour μ, le théorème de Birkhoff donne $\mathrm{Card}(I \cap C_n(x)) \sim T_n \mu(U)$ quand $n \to \infty$. De même, $\mathrm{Card}(I \cap C_n(y)) \sim T_n \nu(U)$ quand $n \to \infty$. Comme le rectangle $f_n^{-1}(R_n)$ ne contient pas de singularité, tout segment horizontal traversant $C_n(x)$ doit traverser aussi $C_n(y)$ (sauf éventuellement une fois près de chaque bord du segment horizontal, voir figure 7).
Ceci implique alors que $|\,\mathrm{Card}(I \cap C_n(x)) - \mathrm{Card}(I \cap C_n(y))| \leq 2$. Comme $T_n \to \infty$, on obtient $T_n \mu(U) \sim T_n \nu(U)$ et donc $\mu(U) = \nu(U)$, ce qui est absurde et conclut. $\square$

6.7. Lemme. — *Tout ouvert de $\mathcal{S}_\infty$ contient un point appartenant à un ensemble $A(\mu)$ pour une certaine mesure invariante ergodique μ.*

Démonstration. — Soit U un ouvert de $\mathcal{S}_\infty$; c'est la limite d'une suite d'ouverts $U_n \in \mathcal{S}_n$. De plus, $\mathrm{Leb}(U_n) \to \mathrm{Leb}(U) > 0$. Notons $V_n = f_n^{-1}(U_n) \subset \mathcal{S}$. Comme l'application $f_n : \mathcal{S} \to \mathcal{S}_n$ envoie la mesure de Lebesgue de $\mathcal{S}$ sur la mesure de Lebesgue de $\mathcal{S}_n$, $\mathrm{Leb}(V_n)$ ne tend pas vers 0.

Montrons qu'il existe une mesure μ invariante ergodique telle que $\mu(V_n)$ ne tende pas vers 0, par l'absurde. On écrit la désintégration ergodique de Leb, comme $\mathrm{Leb} = \int_\Omega \mu_\xi \mathrm{d}P(\xi)$ où (Ω, P) est un espace probabilisé et $(\mu_\xi)_{\xi \in \Omega}$ parcourt l'ensemble des mesures invariantes ergodiques. Si tous les $\mu_\xi(V_n)$ tendaient vers 0, alors par convergence dominée $\mathrm{Leb}(V_n)$ tendrait également vers 0, ce qui est absurde.

Fixons donc μ telle que $\mu(V_n)$ ne tende pas vers 0. Alors

$$\mu\{x \,:\, x \text{ appartient à une infinité de } V_n\} > 0.$$

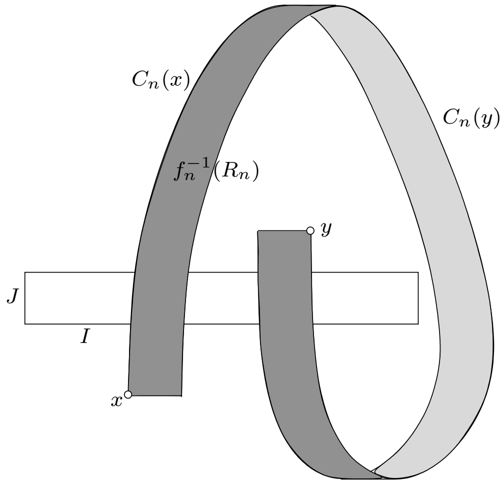

FIGURE 7. Le rectangle $f_n^{-1}(R_n)$ vu sur la surface $\mathcal{S}$. Un segment horizontal traversant $C_n(x)$ traverse aussi $C_n(y)$ (sauf éventuellement une fois près de chaque bord du segment horizontal) donc $|\operatorname{Card}(I \cap C_n(x)) - \operatorname{Card}(I \cap C_n(y))| \leq 2$.

En particulier, il existe $x \in B(\mu)$ qui appartient à une infinité de V_n. La suite $f_n(x) \in U_n$ admet alors une valeur d'adhérence dans $\overline{U}$. □

6.8. On peut maintenant conclure.

Preuve du théorème A. — On fixe des petits ouverts $U_1, \dots, U_N$ de la surface limite $\mathcal{S}_\infty$, satisfaisant la propriété suivante : pour tous points $x_i \in U_i$:

1. pour tous i, j, il existe une suite de rectangles plongés ayant des sommets opposés parmi les x_k, tels que le premier rectangle ait x_i pour sommet et le dernier ait x_j pour sommet.
2. pour tout $x \in \mathcal{S}_\infty$ qui n'est pas une singularité, il existe un rectangle plongé ayant x et l'un des x_j pour sommets opposés.

De tels ouverts existent bien, par un argument de connexité sur la surface $\mathcal{S}_\infty$. L'ouvert U_1 contient un point x_1 appartenant à un ensemble $A(\mu_1)$, par le lemme 6.7. Quitte à considérer une sous-suite de $\mathcal{S}_n$, on peut même supposer qu'il existe $y_1 \in B(\mu)$ tel que $f_n(y_1)$ converge vers x_1. On se restreint à cette sous-suite d'indices. L'ouvert U_2 contient un point x_2 appartenant à un ensemble $A(\mu_2)$, encore par le lemme 6.7, et quitte à extraire on peut encore supposer qu'on a convergence le long de la suite $\mathcal{S}_n$. On répète ainsi ce processus d'extraction N fois, et on obtient N points $x_1, \dots, x_N$ dans $U_1, \dots, U_N$, limites de suites $f_n(y_i)$ avec $y_i \in B(\mu_i)$ pour une certaine mesure invariante ergodique μ_i.

La première propriété dans le choix des ouverts U_i, combinée avec le lemme 6.6, montre que toutes les mesures μ_i sont égales à une même mesure μ.

Soit maintenant ν une autre mesure ergodique invariante. Soit $y \in B(\mu)$, considérons x une valeur d'adhérence dans $\mathcal{S}_\infty$ de la suite $f_n(y)$, disons que x est la limite d'une suite

$f_{j(n)}(y)$. Si x n'est pas une singularité, il existe un rectangle plongé dans $\mathcal{S}_\infty$ ayant x et l'un des x_i comme sommets. En appliquant le lemme 6.6 à la suite $\mathcal{S}_{j(n)}$, on obtient $\mu = \nu$. Si x est une singularité, on ne peut pas appliquer le lemme 6.6, mais on peut encore conclure en reprenant sa preuve et en utilisant le fait que $f_{j(n)}(y)$ n'est pas une singularité (les détails géométriques sont laissés au lecteur). Dans tous les cas, on obtient $\mu = \nu$. On a ainsi montré qu'il y avait une seule mesure invariante, ce qui conclut donc la preuve du théorème A. □

7. Preuve du théorème B

Rappelons que nous devons démontrer que, si $\mathcal{S}$ est une surface de translation, alors l'ensemble $\{\theta \in \mathbb{S}^1,\ \mathcal{S}$ part à l'infini dans la direction $\theta\}$ est de mesure nulle.

7.1. On va raisonner par l'absurde pour démontrer le théorème B. Donnons tout d'abord une traduction "naïve" de la négation du théorème B.

Si ce théorème est faux pour une surface $\mathcal{S}$, alors il existe un sous-ensemble S de $\mathbb{S}^1$ de mesure de Lebesgue non nulle tel que la surface $\mathcal{S}$ tend vers l'infini dans la direction θ, pour tout $\theta \in S$. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $\theta \in S$, il existe $T(\varepsilon,\theta)$ tel que, pour tout $t > T(\varepsilon,\theta)$, la surface $\mathcal{S}_{\theta,t}$ admet une connexion de selles de longueur au plus ε. On choisit $T(\varepsilon,\theta)$ minimal, de telle sorte que la fonction $\theta \mapsto T(\varepsilon,\theta)$ est mesurable. Par conséquent, il existe un ensemble $S_\varepsilon \subset S$ de mesure au moins $\mathrm{Leb}(S)/2$ tel que $T_\varepsilon := \sup_{\theta\in S_\varepsilon} T(\varepsilon,\theta)$ soit fini. Toutes les surfaces $\mathcal{S}_{\theta,T_\varepsilon+1}$ pour $\theta \in S_\varepsilon$ ont alors une connexion de selles de longueur au plus ε. En appliquant un procédé diagonal à la suite $\varepsilon_n = 1/n$, on obtient la conclusion suivante.

7.2. Proposition. — *Soit $\mathcal{S}$ une surface de translation qui ne satisfait pas la conclusion du théorème B. Alors il existe des sous-ensembles S_n de $\mathbb{S}^1$ avec $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Leb}(S_n) > 0$, une suite $T_n \to \infty$ et une suite $\varepsilon_n \to 0$ tels que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in S_n$, la surface $\mathcal{S}_{\theta,T_n}$ a une connexion de selles de longueur au plus ε_n.*

Malheureusement, cette négation du théorème B est trop naïve pour amener directement à une contradiction. On aura besoin de la version forte suivante :

7.3. Proposition. — *Soit $\mathcal{S}$ une surface de translation ne satisfaisant pas la conclusion du théorème B. Alors il existe $c > 0$, des sous-ensembles S_n de $\mathbb{S}^1$ avec $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Leb}(S_n) > 0$, une suite $T_n \to \infty$ et une suite $\varepsilon_n \to 0$ tels que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $\theta \in S_n$, la surface $\mathcal{S}_{\theta,T_n}$ a une connexion de selles de longueur au plus ε_n, qui ne rencontre pas d'autre connexion de selles de longueur $\leq c$.*

Pour démontrer cette proposition, on devra travailler avec des ensembles de connexions de selles courtes et deux à deux disjointes (par disjointes, on entend que les intérieurs des connexions de selles ne se rencontrent pas). Pour ce faire, on utilisera l'outil géométrique suivant :

7.4. Définition. — *Soit $\mathcal{S}$ une surface de translation. Un* complexe *de $\mathcal{S}$ est une partie K de $\mathcal{S}$ qui est triangulable et dont les bords sont des connexions de selles. On suppose de plus que, si trois connexions de selles appartiennent à K et bordent un triangle ne contenant pas de singularité, alors ce triangle est inclus dans K.*

Si K est un complexe, on note $\operatorname{Aire}(K)$ *sa surface, $|\partial K|$ le maximum des longueurs des connexions de selles formant le bord de K, et* $\operatorname{Comp}(K)$ *la complexité de K, i.e., le nombre de connexions de selles nécessaire pour trianguler K.*

Notons que $\operatorname{Comp}(K)$ est bien défini puisque deux triangulations différentes de K utilisent le même nombre de connexions de selles, par la formule d'Euler. Comme toute triangulation de K peut être complétée en une triangulation de $\mathcal{S}$ (par 2.4), et comme le nombre d'arêtes d'une triangulation de $\mathcal{S}$ est constant, on en déduit que la complexité d'un complexe est uniformément bornée par une constante ne dépendant que du genre de $\mathcal{S}$ et du nombre de singularités.

La proposition suivante permet de construire des complexes de plus en plus grands (pour l'inclusion).

7.5. Proposition. — *Soient K un complexe, et σ une connexion de selles qui traverse ∂K ou qui ne rencontre pas K. Alors il existe un complexe K' contenant K avec*

1. $\operatorname{Comp}(K') > \operatorname{Comp}(K)$.
2. $|\partial K'| \leq 2|\partial K| + |\sigma|$.
3. $\operatorname{Aire}(K') \leq \operatorname{Aire}(K) + |\partial K|^2 + |\partial K| \cdot |\sigma|$.

Notons que la proposition n'affirme *pas* que K' contient σ !

Démonstration. — C'est de la géométrie à l'ancienne que n'aurait pas désavouée Pythagore. On traite plusieurs cas. Dans tous les cas, on construira K' qui contient strictement K, la borne sur la complexité est donc triviale. Les autres bornes seront également des conséquences directes de la construction géométrique.

(1) Si σ ne rencontre pas K dans son intérieur. On ajoute simplement σ à K pour former K' (et on remplit les triangles éventuels bordés par σ et deux connexions de selles déjà dans K).

(2) Si σ rencontre K, mais une des extrémités de σ n'est pas dans K, appelons-la P. Partant de P, on parcourt σ jusqu'à rencontrer K, en un point H qui appartient à une connexion de selles $[AB]$ du bord de K, comme sur la figure 8.

On redresse le chemin AHP petit à petit, jusqu'à rencontrer une singularité, puis on continue le redressement pour la portion restante. On obtient une ligne brisée reliant A à P qui délimite, avec $[AH]$ et $[HP]$, une zone de $\mathcal{S}$ ne contenant pas de singularité. Si l'une des connexions de selles de la ligne brisée n'est pas dans K, on l'ajoute à K pour former K'. Comme la ligne brisée est de longueur au plus $|AH| + |AP|$, K' ainsi formé vérifie la conclusion de la proposition, i.e. $|\partial K'| \leq |\partial K| + |\sigma|$.

Si toutes les connexions de selles de la ligne brisée sont dans K, on répète le processus de l'autre côté, entre B et P. Le cas qui pose problème est lorsque cette nouvelle ligne brisée

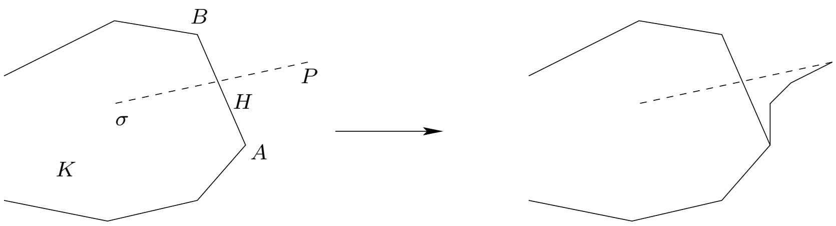

FIGURE 8.

ne contient que des connexions de selles dans K. Si l'une des lignes brisées entre A et P, ou B et P, n'est pas un segment, elle contient un point intermédiaire Q. En reliant Q à A ou B, on obtient une connexion de selles qui n'est pas dans K (puisque K ne rencontre pas $]HP[$), et en l'ajoutant à K on obtient un complexe K' qui vérifie les propriétés requises.

Il reste le cas où $[AP]$ et $[BP]$ sont deux connexions de selles appartenant à K. Mais alors, les connexions de selles $[AP]$, $[BP]$ et $[AB]$ appartiennent à K et bordent un triangle sans singularité dans son intérieur. La condition que nous avons imposée dans la définition des complexes implique que K contient le triangle ABP, ce qui est une contradiction.

(3) Sinon, une partie de l'intérieur de σ n'est pas contenue dans K, mais traverse de part et d'autre le bord de K, comme sur la figure 9.

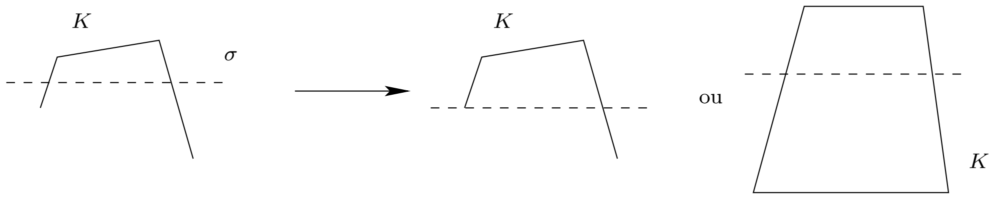

FIGURE 9.

On déplace alors σ parallèlement à elle-même, dans une direction, jusqu'à rencontrer une singularité. Si on s'est ramené au cas (1) ou (2), on a gagné (le nouveau σ, translaté, est de longueur au plus $|\sigma| + |\partial K|$, et on vérifie que le K' qu'on forme alors vérifie bien les bornes requises). Sinon, on a rencontré une ligne parallèle à σ, appartenant au bord de K (contenant éventuellement des singularités dans son intérieur, et éventuellement réduite à un point). On essaie alors de translater σ dans l'autre direction, et soit on se ramène à (1) ou (2), soit on a finalement une situation comme dans le dernier cas de la figure 9. De plus, le quadrilatère ainsi formé n'est pas un triangle sans singularité au bord (il appartiendrait alors déjà à K, par définition d'un complexe). On va donc pouvoir relier une singularité du bord supérieur à une du bord inférieur, pour former K', qui convient. $\square$

7.6. On peut utiliser cette construction géométrique pour démontrer la proposition 7.3.

Démonstration de la proposition 7.3. — Le cœur de la preuve va être de faire une récurrence sur la complexité de certains complexes. Comme la complexité des complexes est uniformément bornée, cette récurrence s'arrêtera à un certain moment. On part de $\mathcal{S}$ une surface de translation qui ne satisfait pas la conclusion du théorème B.

Pour $i \in \mathbb{N}$, on note (P_i) la propriété suivante : il existe $\varepsilon_n \to 0$, $T_n \to \infty$ et $S_n \subset \mathbb{S}^1$ avec $\inf_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Leb}(S_n) > 0$ tels que, pour tout $\theta \in S_n$, la surface $\mathcal{S}_{\theta,T_n}$ admet un complexe $K(n,\theta)$ de complexité $\geq i$, avec $\mathrm{Aire}(K) \leq \varepsilon_n$ et $|\partial K| \leq \varepsilon_n$.

On sait déjà que $\mathcal{S}$ satisfait la propriété (P_1) : un complexe de complexité 1 est simplement une connexion de selles, et la proposition 7.2 donne donc la conclusion de (P_1).

Supposons maintenant que (P_i) est satisfait, et considérons les suites ε_n, T_n, S_n et $K(n,\theta)$ correspondantes. Soit $c > 0$. Si la mesure de "l'ensemble des θ tels que $\partial K(n,\theta)$ ne rencontre pas de connexion de selles de longueur $\leq c$" ne tend pas vers 0, on prend une connexion de selles dans le bord de $K(n,\theta)$, elle vérifie la conclusion de la proposition 7.3 et on a gagné. Notons que $\partial K(n,\theta)$ est non vide pour n assez grand puisque l'aire de $K(n,\theta)$ tend vers 0, ce qui garantit que $K(n,\theta)$ ne recouvre pas toute la surface.

Sinon, démontrons (P_{i+1}). Par un procédé diagonal (en prenant une suite de valeurs de c qui tend vers 0), on obtient une suite δ_n qui tend vers 0, une sous-suite T'_n de T_n (disons $T'_n = T_{j(n)}$) et des ensembles S'_n de mesure uniformément minorée (inclus dans $S_{j(n)}$) tels que, pour tout $\theta \in S'_n$, on ait un complexe $L(n,\theta) = K(j(n),\theta)$ de complexité au moins i avec $|\partial L| \leq \delta_n$ et $|\mathrm{Aire}(L)| \leq \delta_n$, ainsi qu'une connexion de selles $\sigma(n,\theta)$ de longueur au plus δ_n et qui rencontre le bord de L. En appliquant la proposition 7.5 à L et σ, on obtient un complexe K' de complexité $\geq i+1$ d'aire et de complexité petites, bornées disons par $\varepsilon'_n = 3\delta_n$. On a établi la propriété (P_{i+1}).

Si la surface $\mathcal{S}$ ne vérifiait pas la conclusion de la proposition 7.3, on démontrerait ainsi (P_1), puis (P_2), puis par récurrence (P_i) pour tout i. Ceci est impossible puisqu'il existe une borne uniforme sur la complexité des complexes de $\mathcal{S}$. Ainsi, la proposition est démontrée. □

La contradiction viendra de la proposition suivante.

7.7. Proposition. — *Soient $\mathcal{S}$ une surface de translation et $c > 0$. Notons $A(t,\varepsilon,c)$ l'ensemble des $\theta \in \mathbb{S}^1$ tels que $\mathcal{S}_{\theta,t}$ a une connexion de selles de longueur au plus ε qui ne rencontre pas d'autre connexion de selles de longueur au plus c. Il existe alors des constantes $\bar{\varepsilon} > 0, T > 0$ et $K > 0$ telles que, pour tout $t \geq T$, pour tout $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$, $\mathrm{Leb}(A(t,\varepsilon,c)) \leq K\varepsilon$.*

Démonstration. — Posons $A = A(t,\varepsilon,c)$, on veut estimer $\mathrm{Leb}(A)$. Soit $\theta \in A$, on considère une connexion de selles α (dans $\mathcal{S}$) de longueur au plus ε et ne rencontrant pas de connexion de selles de longueur au plus c (dans $\mathcal{S}_{\theta,t}$). On note I_α l'ensemble des angles θ' tels que α est de longueur au plus ε dans $\mathcal{S}_{\theta',t}$, et J_α l'ensemble des angles θ' tels que α est de longueur au plus c dans $\mathcal{S}_{\theta',t}$. Ces ensembles sont des réunions de deux intervalles opposés sur le cercle $\mathbb{S}^1$. Quitte à considérer une seule des deux composantes (ou à projectiviser), on fera comme si I_α et J_α étaient des intervalles. Soit $\hat{J}_\alpha$ l'intervalle moitié de J_α (i.e., l'intervalle de même centre que J_α et de longueur moitié). Finalement, on note K_α l'ensemble des angles θ' tels que α soit de longueur au plus ε dans $\mathcal{S}_{\theta',t}$, et ne rencontre pas de connexion de selles de longueur $\leq c$. Si ε est assez petit et t est assez grand, on a

$$\{\theta\} \subset K_\alpha \subset I_\alpha \subset \hat{J}_\alpha \subset J_\alpha.$$

Un petit calcul trigonométrique montre que, pour une certaine constante K, $\mathrm{Leb}(I_\alpha) \leq K\varepsilon\,\mathrm{Leb}(J_\alpha)$. On en déduit $\mathrm{Leb}(I_\alpha) \leq 2K\varepsilon\,\mathrm{Leb}(\hat{J}_\alpha)$.

Notons B l'ensemble des connexions de selles α telles que $K_\alpha \neq \emptyset$. Ce sont les connexions de selles qui servent à définir A. Autrement dit, $A = \bigcup_{\alpha\in B} K_\alpha$.

Soient $\alpha, \beta \in B$ deux connexions de selles distinctes. Si $\hat{J}_\alpha$ et $\hat{J}_\beta$ s'intersectent, alors J_α recouvre $\hat{J}_\beta$ ou inversement. Dans le premier cas, comme $K_\beta \subset \hat{J}_\beta$, on obtient un angle $\theta \in K_\beta \cap J_\alpha$. Dans la surface de translation $\mathcal{S}_{\theta,t}$, α est donc de longueur au plus c. Par définition de K_β, on en déduit que α et β ne s'intersectent pas.

Plus généralement, si $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in B$ sont deux à deux distinctes et $\bigcap \hat{J}_{\alpha_i} \neq \emptyset$, on montre de même que les connexions de selles α_i sont deux à deux disjointes. Mais le nombre de connexions de selles deux à deux disjointes est uniformément borné en fonction du genre de la surface $\mathcal{S}$ et du nombre de singularités (puisqu'on peut compléter tout ensemble de connexions de selles disjointes pour former une triangulation de la surface, qui a un nombre d'arêtes fixé). Il existe donc $p < \infty$ tel que chaque angle de $\mathbb{S}^1$ appartienne à au plus p intervalles $\hat{J}_\alpha$.

Finalement,

$$\begin{aligned}\mathrm{Leb}(A) = \mathrm{Leb}(\bigcup_{\alpha\in B} K_\alpha) &\leq \sum_{\alpha\in B}\mathrm{Leb}(I_\alpha) \leq 2K\varepsilon\sum_{\alpha\in B}\mathrm{Leb}(\hat{J}_\alpha)\\ &\leq 2Kp\varepsilon\,\mathrm{Leb}(\bigcup_{\alpha\in B}\hat{J}_\alpha) \leq 2Kp\varepsilon\,\mathrm{Leb}(\mathbb{S}^1).\end{aligned}$$ □

7.8. On peut maintenant conclure :

Démonstration du théorème B. — Les propositions 7.3 et 7.7 sont manifestement incompatibles l'une avec l'autre, puisque l'ensemble S_n donné par la première proposition a une mesure bornée inférieurement, alors que la seconde proposition montre que $\mathrm{Leb}(S_n) = O(\varepsilon_n) \to 0$. □

8. Traduction de la preuve du théorème KMS en genre 1

8.1. Dans ce paragraphe, on explicite différemment, avec un point de vue plus géométrique, les objets qui sont apparus dans la preuve du théorème KMS, dans le cas des tores. La notion essentielle de "départ à l'infini" utilisée dans la preuve va se reformuler en termes de "l'espace des tores plats". Notons que, pour pouvoir parler de systole, il faut avoir au moins une singularité (éventuellement artificielle, i.e., avec $k_i = 0$). On travaillera donc sur des tores ayant un point marqué (plus ou moins arbitraire).

8.2. Soit (e_1, e_2) une base directe de $\mathbb{R}^2$. On peut alors former une surface de translation de genre 1, avec un point marqué, comme suit : on part du polygone $P = \{xe_1 + ye_2,\ 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ puis on recolle ses côtés opposés parallèles, comme en 2.2. On obtient ainsi une surface de translation $\mathcal{S}$, sur laquelle on marque l'image de l'origine. De plus, tout tore plat avec un point marqué peut s'obtenir de cette manière.

Soit $\mathcal{T}_1$ l'ensemble des bases directes de $\mathbb{R}^2$, cet ensemble fournit donc une paramétrisation de "l'espace des tores plats avec un point marqué".

Notons $e_1 = \binom{a}{b}$ et $e_2 = \binom{c}{d}$. On a une identification entre $\mathcal{T}_1$ et $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ donnée par $(e_1, e_2) \mapsto A_{(e_1,e_2)} = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ (le fait d'avoir transposé dans cette identification nous servira plus loin). Si $\mathcal{T}_1^{(1)}$ désigne l'ensemble des tores d'aire 1 alors $\mathcal{T}_1^{(1)} = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ via l'identification précédente.

Analysons l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, décrite dans la section 5, sur $\mathcal{T}_1$. Si $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ alors l'image par M du tore plat donné par (e_1, e_2) est le tore plat donné par (Me_1, Me_2). Via l'identification ci-dessus, M agit donc sur $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ comme la multiplication à droite par la matrice transposée M^t.

En particulier, l'action du flot géodésique sur $\mathcal{T}_1^{(1)}$ correspond à l'action par multiplication à droite de g_t sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

8.3. L'ensemble $\mathcal{T}_1$ décrit ci-dessus n'est pas très satisfaisant. En effet, deux bases directes (e_1, e_2) et (e_1', e_2') peuvent engendrer deux surfaces de translation $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ isomorphes (i.e., il existe un difféomorphisme de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$ dont la différentielle dans l'atlas de translation est partout égale à l'identité). Notons $\mathcal{M}_1$ le quotient de $\mathcal{T}_1$ par cette relation d'équivalence.

On va décrire $\mathcal{M}_1$ via l'identification ci-dessus. Deux bases directes (e_1, e_2) et (e_1', e_2') sont équivalentes si et seulement si il existe une matrice $B = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & t \end{smallmatrix}\right)$ dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ telle que $e_1' = xe_1 + ye_2$ et $e_2' = ze_1 + te_2$, i.e., si (e_1, e_2) et (e_1', e_2') sont deux bases d'un même réseau. Cette condition se lit encore $A_{(e_1', e_2')} = BA_{(e_1,e_2)}$. Ainsi, $\mathcal{M}_1$ est identifié au quotient (à gauche) $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$. Soit $\mathcal{M}_1^{(1)}$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_1$ formé des surfaces d'aire 1, il est identifié à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.
Notons que l'action de g_t passe au quotient sur $\mathcal{M}_1^{(1)}$ (une action à gauche et une action à droite commutent toujours) et s'interprète algébriquement comme la multiplication à droite de g_t sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

8.4. On peut alors relier la notion naïve de départ à l'infini donnée en 4.1 avec la topologie de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.

Proposition. — *Un tore $\mathbb{T}^2 \in SL_2(\mathbb{Z}) \setminus SL_2(\mathbb{R})$ part à l'infini (au sens de la définition* 4.1*) si et seulement si $g_t\mathbb{T}^2$ quitte tout compact de $SL_2(\mathbb{Z}) \setminus SL_2(\mathbb{R})$ quand $t \to \infty$.*

Démonstration. — Une suite de tores dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ quitte tout compact si et seulement si la systole tend vers 0 le long de cette suite. La proposition en découle immédiatement. □

Ainsi, le théorème A se comprend bien en termes d'espace des réseaux.

8.5. On aurait aussi pu décrire $\mathcal{T}_1$ comme l'ensemble des atlas plats sur un tore, quotienté par l'ensemble des difféomorphismes qui sont isotopes à l'identité. De ce point de vue géométrique $\mathcal{M}_1^{(1)}$ devient alors l'ensemble des atlas plats d'aire 1 sur un tore, quotienté par l'ensemble des difféomorphismes. Cela revient aussi à prendre $\mathcal{T}_1^{(1)}$ modulo le groupe modulaire, i.e., le groupe de tous les difféomorphismes (préservant l'orientation) modulo ceux isotopes à l'identité. En effet si ϕ est un difféomorphisme du tore $\mathbb{T}^2$ et $\{(U_i, z_i)\}_i$ est un atlas plat, alors $\{(\phi(U_i), z_i \circ \phi^{-1})\}_i$ est un autre atlas plat représentant le même tore plat. Ici le groupe modulaire n'est autre que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Ce point de vue va être utile en genre supérieur.

8.6. Nous allons maintenant redémontrer le théorème B, en genre 1. Pour cela, il est utile d'introduire un autre point de vue sur l'espace $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, celui de la géométrie hyperbolique.

Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur le demi-plan de Poincaré $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$, par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{8.1}$$

Cette action préserve la métrique hyperbolique. De plus, cette action est transitive et le stabilisateur du point $i \in \mathbb{H}$ est $\mathrm{SO}(2)$, donc $\mathbb{H} \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\mathrm{SO}(2)$, et $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est identifié au fibré unitaire tangent à $\mathbb{H}$.

Un domaine fondamental pour l'action (à gauche) de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$ est présenté figure 10. La surface modulaire est par définition le quotient $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$. Cette surface est isomorphe à une sphère privée d'un point avec deux singularités pour la métrique hyperbolique. Notons que les deux singularités correspondent au tore plat carré et au tore plat hexagonal.

L'espace des surfaces de translation de genre 1 avec un point marqué, i.e. $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$, est donc identifié au fibré unitaire tangent à la surface modulaire. De plus, l'action de g_t correspond au flot géodésique sur la surface modulaire.

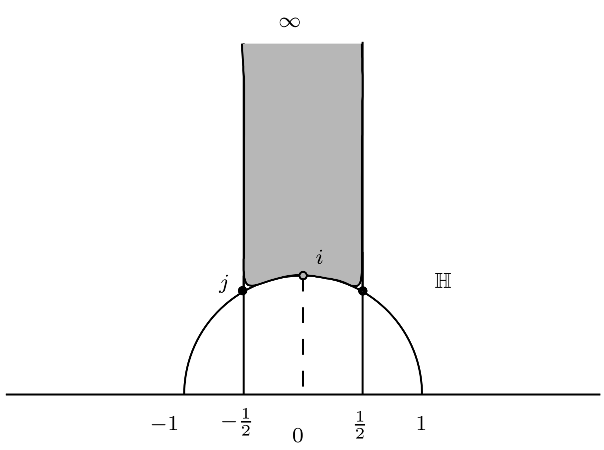

FIGURE 10. Un domaine fondamental pour l'action de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sur $\mathbb{H}$.

8.7. On peut maintenant redémontrer en genre 1 une version forte du théorème B, en utilisant des propriétés bien connues du flot géodésique sur la surface modulaire.

Proposition. — *Soit $\mathcal{S}$ une surface de translation de genre 1 avec un point marqué. Alors*

$$\{\theta \in \mathbb{S}^1,\ \mathcal{S} \text{ part à l'infini dans la direction } \theta\} \tag{8.2}$$

est au plus dénombrable.

Démonstration. — On utilisera la propriété suivante du flot géodésique sur la surface modulaire : il existe un compact K tel que toute géodésique qui ne part pas verticalement dans le cusp revient une infinité de fois dans K (i.e. les géodésiques qui ne partent pas vers le cusp sont récurrentes, c'est la proposition du point 8.4).

Soit $\mathcal{S}$ une surface de translation avec un point marqué, considérons $x \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ le point correspondant, et $y = \pi(x)$ son image dans la surface modulaire $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \setminus \mathbb{H}$. L'ensemble (8.2) est alors en bijection avec les géodésiques issues de y qui partent à l'infini dans la surface modulaire.

Pour tout $n > 0$, l'ensemble G_n des géodésiques partant de y et qui sont verticales dans le cusp après le temps n est discret, donc fini par compacité de $\mathbb{S}^1$. L'ensemble (8.2), en bijection avec $\bigcup G_n$, est donc dénombrable, ce qui conclut la preuve. □

Cette preuve ne s'adapte pas en genre supérieur (et le résultat de dénombrabilité devient faux !) car les propriétés hyperboliques du flot g_t deviennent beaucoup plus faibles qu'en genre 1. La morale du théorème B est qu'il reste cependant suffisamment d'hyperbolicité pour obtenir des résultats précis.

9. L'espace des modules des surfaces de translation

9.1. Comme nous venons de le voir dans la section précédente, le bon cadre conceptuel pour démontrer le théorème KMS est d'introduire une structure de "variété" (plus précisément d'orbifold) sur "l'espace des surfaces de translation" (en genre fixé et avec une combinatoire également fixée). Pour que cette notion soit utile, on voudrait avoir un analogue de la proposition 8.4, i.e., le départ à l'infini au sens de la définition 4.1 doit correspondre au fait de quitter tout compact de l'espace des surfaces de translation.

Dans cette section, sans rien démontrer, on va décrire une telle construction.

9.2. Fixons $\mathcal{S}$ une surface compacte connexe, de genre g. Fixons aussi $\Sigma = \{P_1, \dots, P_n\}$ un sous-ensemble fini de $\mathcal{S}$, et $\kappa = (k_1, \dots, k_n)$ des entiers tels que $\sum(k_i + 1) = 2g - 2$.

On note $\mathcal{A}(\mathcal{S}, \kappa)$ l'ensemble des structures de translation sur X ayant des singularités coniques d'angles $2\pi(k_i+1)$ en P_i. C'est un ensemble d'atlas, il est énorme (et en particulier beaucoup trop gros pour qu'on puisse travailler avec lui). On peut néanmoins le munir naturellement d'une topologie : si $\omega \in \mathcal{A}(\mathcal{S}, \kappa)$ et $\varepsilon > 0$, on définit le ε-voisinage de ω comme étant l'ensemble des atlas de translation ω' sur $\mathcal{S}$ tels que, pour tout $x \in \mathcal{S} - \Sigma$, les composées $z \circ z'^{-1}$ et $z' \circ z^{-1}$ de cartes de translation autour de x (correspondant à ω et ω') ont des dérivées ε-proches de l'identité.

Intuitivement, ω' est dans le ε-voisinage de ω si ω' et ω sont d'accord à ε près sur la direction des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$, leur norme, les horizontales, les verticales, etc.

9.3. Soit $\mathcal{T}_g(\mathcal{S},\kappa)$ obtenu en identifiant deux éléments ω et ω' de $\mathcal{A}(\mathcal{S},\kappa)$ s'il existe un homéomorphisme de $\mathcal{S}$ fixant les P_i, isotope à l'identité (relativement aux P_i) et envoyant ω sur ω'. On munit $\mathcal{T}_g(\mathcal{S},\kappa)$ de la topologie quotient. C'est "l'espace de Teichmüller" des surfaces de translation.

En général, il faut se méfier de la topologie quotient, mais ici tout va bien : l'espace $\mathcal{T}_g(\kappa)$ est séparé, métrisable, localement compact, et même localement homéomorphe à un certain espace $\mathbb{C}^d$ (ici d est $2g+n-1$ comme nous allons le voir).

9.4. On peut même aller plus loin et munir $\mathcal{T}_g(\mathcal{S},\kappa)$ d'une structure de variété (analytique), comme suit. Si $\omega\in\mathcal{A}(\mathcal{S},\kappa)$, on peut utiliser la structure de translation pour relever les chemins sur $\mathcal{S}$, en partant de 0. L'extrémité du relèvement est invariante par homotopie, et on obtient donc une application de $H_1(\mathcal{S},\Sigma;\mathbb{Z})$ dans $\mathbb{R}^2$, i.e., un élément du groupe de cohomologie $H^1(\mathcal{S},\Sigma;\mathbb{R}^2)$. Cet élément ne change pas si l'on remplace ω par une structure de translation qui lui est isotope. En passant au quotient, on obtient donc une application canonique

$$\Theta:\mathcal{T}_g(\mathcal{S},\kappa)\to H^1(\mathcal{S},\Sigma;\mathbb{R}^2).$$

9.5. Proposition. — *Pour la topologie définie ci-dessus sur $\mathcal{T}_g(\mathcal{S},\kappa)$, l'application Θ est un homéomorphisme local.*

On peut donc utiliser Θ comme carte locale, pour mettre une structure de variété sur $\mathcal{T}_g(\kappa)$. Dans le cas du genre 1, $\mathcal{T}_1$ correspond simplement à $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ (avec sa structure de variété usuelle). Si $g\geq 2$, on obtient bien que $\mathcal{T}_g(\kappa)$ est une varitété de dimension (réelle) $2(2g+n-1)$.

9.6. Pour obtenir un espace plus petit, avec de meilleures propriétés de compacité, et donc de récurrence pour la dynamique, il faut quotienter encore plus. Soit $\mathcal{M}_g(\kappa)$ le quotient de $\mathcal{T}_g(\kappa)$ par l'action du groupe modulaire. Autrement dit, on identifie deux éléments ω et ω' de $\mathcal{A}$ si ω' s'obtient à partir de ω par un difféomorphisme de $\mathcal{S}$ fixant les P_i (mais pas nécessairement isotope à l'identité).

L'action du groupe modulaire sur $\mathcal{T}_g(\kappa)$ n'est pas libre, mais presque. Ainsi, $\mathcal{M}_g(\kappa)$ n'est pas naturellement muni d'une structure de variété (il a des singularités), mais presque : c'est un *orbifold*, i.e., il est localement difféomorphe à un espace $\mathbb{C}^d$ sauf en un nombre fini de points. On notera aussi $\mathcal{M}_g^{(1)}(\kappa)$ l'ensemble des surfaces dans $\mathcal{M}_g(\kappa)$ d'aire 1.
Dans ce cadre, le résultat de compacité naïf qu'on a démontré dans le corollaire 6.4 se traduit de la manière suivante. Notons $\mathrm{sys}(\omega)$ la systole de $\omega\in\mathcal{M}_g^{(1)}(\kappa)$.

9.7. Théorème. — *Pour tout $\varepsilon>0$, l'ensemble des $\omega\in\mathcal{M}_g^{(1)}(\kappa)$ tels que $\mathrm{sys}(\omega)\geq\varepsilon$ est compact.*

Ainsi, une suite ω_n sort de tout compact si et seulement si $\mathrm{sys}(\omega_n)\to 0$. La définition de départ à l'infini donnée en 6.1 coïncide donc avec celle découlant de la topologie naturelle sur l'espace des modules.

9.8. L'espace $H^1(\mathcal{S},\Sigma;\mathbb{R}^2)$ est muni d'une mesure de Lebesgue canonique (donnant co-volume 1 au réseau $H^1(\mathcal{S},\Sigma;\mathbb{Z}^2)$). En la tirant en arrière par Θ, on obtient une mesure canonique sur $\mathcal{T}_g(\kappa)$. Cette mesure est invariante sous l'action du groupe modulaire, et passe donc au quotient sur $\mathcal{M}_g(\kappa)$. Elle induit même une mesure sur $\mathcal{M}_g^{(1)}(\kappa)$.

9.9. Un résultat important de Masur et Veech (voir [**Mas82, Vee82**]) affirme que cette mesure est de masse finie sur $\mathcal{M}_g^{(1)}(\kappa)$. De plus elle préservée par le flot g_t. Masur et Veech montrent même que le flot g_t est ergodique sur toute composante connexe de $\mathcal{M}_g^{(1)}(\kappa)$ (qui a au plus trois composantes connexes).
Quand on parle de "presque toute surface de translation", on fait référence à cette mesure canonique.

9.10. Un cas particulièrement intéressant est fourni lorsque le stabilisateur

$$\mathrm{SL}(\mathcal{S},\omega) := \{A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}),\ A\cdot(\mathcal{S},\omega) \simeq (\mathcal{S},\omega)\}$$

d'une surface de translation $(\mathcal{S},\omega)$ est un réseau de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. On dit alors que $(\mathcal{S},\omega)$ est une *surface de Veech*. L'idée de la preuve donnée en 8.7 peut alors s'adapter (la propriété essentielle que nous avons utilisée est le fait que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est un réseau dans $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$). On peut alors obtenir des propriétés remarquables sur le flot directionnel sur $\mathcal{S}$ (voir [**Vee89**]). Notamment, pour une surface de Veech, les directions minimales pour le flot directionnel sont *exactement* les directions uniquement ergodiques.

10. Raffinements, résultats supplémentaires

Dans ce paragraphe, on discute les raffinements possibles aux théorèmes A et B.

10.1. Tout d'abord, pour le théorème A, on a équivalence entre non-unique ergodicité et départ à l'infini, en genre 1. Cela reste vrai pour les surfaces de Veech (voir 9.10) ([**Vee89**]). Mais ce n'est plus vrai en général. Mentionnons les résultats suivants.

1. Pour toute fonction $f(t)$ qui tend vers 0 quand $t\to\infty$, il existe une surface $\mathcal{S}$ telle que $\mathrm{sys}(g_t\mathcal{S})$ tend vers 0 quand $t\to\infty$, mais $f(t)=o(\mathrm{sys}(g_t\mathcal{S}))$ (voir [**Che04**]). Autrement dit, on peut converger arbitrairement lentement vers l'infini.
2. Pour toute composante connexe de l'espace des modules, il existe une constante $c>0$ telle que, si $t^{-c}=o(\mathrm{sys}(g_t\mathcal{S}))$ alors le flot vertical sur $\mathcal{S}$ est uniquement ergodique. Autrement dit, si on tend vers l'infini mais suffisamment lentement, alors la conclusion du théorème A reste valable. Ce théorème n'est pas vide puisqu'il existe effectivement des géodésiques qui partent lentement vers l'infini d'après le point précédent.
3. Pour toute composante connexe de l'espace des modules, il existe une constante $c'>c$ et une surface $\mathcal{S}$ telle que $t^{-c'}=o(\mathrm{sys}(g_t\mathcal{S}))$, mais le flot vertical sur $\mathcal{S}$ n'est pas uniquement ergodique. Ainsi, la vitesse de décroissance en t^{-c} est vraiment la "vitesse critique".

   Ces deux derniers points sont dus à Cheung et Eskin (voir [**CE06**]). On pourra aussi consulter [**CM06**].

4. Il existe une version combinatoire du théorème A (voir [**Bos85**]).
Une section de Poincaré du flot $\mathcal{F}_\theta$ sur un intervalle fournit un échange d'intervalles T. Les points de discontinuités correspondent aux séparatrices. Notons m_n la longueur du plus petit intervalle échangé par T^n. Alors, si T n'est pas uniquement ergodique, $nm_n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

10.2. Pour le théorème B, on peut se demander quelle est la taille précise de l'ensemble

$$\{\theta \in \mathbb{S}^1,\ \mathcal{S} \text{ part à l'infini dans la direction } \theta\}.$$

On sait déjà qu'il est de mesure nulle. En fait on peut dire un peu plus sur le sous-ensemble suivant :

$$\{\theta \in \mathbb{S}^1,\ \text{le flot } \mathcal{F}_\theta \text{ sur } \mathcal{S} \text{ n'est pas uniquement ergodique}\} \subset \{\theta \in \mathbb{S}^1,\ \mathcal{S} \text{ part à l'infini dans la direction } \theta\}. \tag{10.1}$$

On peut chercher à estimer sa dimension de Hausdorff. On sait déjà qu'en genre 1, l'ensemble des directions exceptionnelles coïncide avec les rationnels et est donc dénombrable. Ce n'est plus vrai en genre plus grand, mais :

1. Pour toute surface de translation, la dimension de Hausdorff de cet ensemble est au plus 1/2 (voir [**Mas92**]).
2. Il existe des surfaces de translation pour lesquelles cette dimension est exactement 1/2 [**Che03**] (ces exemples proviennent de billards carrés avec un mur, voir figure 4).
3. Pour toute composante connexe de l'espace des modules $\mathcal{M}_g(\kappa)$, il existe une constante $\delta \in]0, 1/2]$ telle que, pour presque toute surface de translation dans cette composante connexe, la dimension en question est égale à δ [**MS91**].
4. Pour les surfaces de Veech (voir 9.10) l'inclusion (10.1) est une égalité ([**Vee89**]).

Références

[Arn88] P. Arnoux – « Ergodicité générique des billards polygonaux (d'après Kerckhoff, Masur, Smillie) », Séminaire Bourbaki *Astérisque*, **696** Vol. 1987/88. No. 161-162 (1988), p. 203–221.

[Bos85] M. BoshernitzanY – « A condition for minimal interval exchange maps to be uniquely ergodic », *Duke Math. J.*, **52** (1985), no. 3, p. 723–752.

[CE06] Y. Cheung & A. Eskin – « Unique Ergodicity of Translation Flows », *Proceedings of the Partially hyperbolic dynamics, laminations, and Teichmüller flow Workshop*, Toronto, Jan. 5-9, (2006), à paraître.

[CM06] Y. Cheung & H. Masur – « A divergent Teichmüller geodesic with uniquely ergodic vertical foliation », *Israel J. Math.* **152** (2006), p. 1–15.

[Che03] Y. Cheung – « Hausdorff dimension of the set of nonergodic directions », *Ann. of Math. (2)* **158** (2003), no. 2, p. 661–678, With an appendix by M. Boshernitzan.

[Che04] ———, « Slowly divergent geodesics in moduli space », *Conform. Geom. Dyn.* **8** (2004), p. 167–189 (electronic).

[FK36] R. H. Fox & R. B. Kershner – « Concerning the transitive properties of geodesics on a rational polyhedron », *Duke Math. J.* **2** (1936), no. 1, p. 147–150.

[HM79] J. Hubbard & H. Masur – « Quadratic differentials and foliations », *Acta Math.* **142** (1979), no. 3-4, p. 221–274.

[Kea75] M. Keane – « Interval exchange transformations », *Math. Z.* **141** (1975), no. 3-4, p. 25–31.

[KMS86] S. Kerckhoff, H. Masur & J. Smillie – « Ergodicity of billiard flows and quadratic differentials », *Ann. of Math. (2)* **124** (1986), no. 2, p. 293–311.

[Mas82] H. Masur – « Interval exchange transformations and measured foliations », *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), no. 1, p. 169–200.

[Mas92] ———, « Hausdorff dimension of the set of nonergodic foliations of a quadratic differential », *Duke Math. J.* **66** (1992), no. 3, p. 387–442.

[Mas06] ———, « Ergodic theory of translation surfaces », *Handbook of dynamical systems* Vol. 1B, (2006), Amsterdam Elsevier B. V., p. 527–547.

[MT02] H. Masur & S. Tabachnikov – « Rational billiards and flat structures », *Handbook of dynamical systems* Vol. 1A, (2002), North-Holland, Amsterdam, p. 1015–1089.

[MS91] H. Masur & J. Smillie – « Hausdorff dimension of sets of nonergodic measured foliations », *Ann. of Math. (2)* **134** (1991), no. 3, p. 455–543.

[Vee68] W. Veech – « The equicontinuous structure relation for minimal Abelian transformation groups », *Amer. J. Math.* **90** (1968), p. 723–732.

[Vee82] ———, « Gauss measures for transformations on the space of interval exchange maps », *Ann. of Math. (2)* **115** (1982), no. 1, p. 201–242.

[Vee89] ———, « Teichmüller curves in moduli space, Eisenstein series and an application to triangular billiards », *Invent. Math.* **97** (1989), no. 3, p. 553–583.

[ZK75] A. Zemljakov & A. Katok – « Topological transitivity of billiards in polygons », *Mat. Zametki* **18** (1975), no. 2, p. 291–300.

[Zor06] A. Zorich – « Flat surfaces », *collection "Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry, Volume 1 : On random matrices, zeta functions and dynamical systems*, P. Cartier, B. Julia, P. Moussa, P. Vanhove (Editors), Springer-Verlag, Berlin, (2006), p. 439-586.

27 novembre 2006

Sébastien Gouëzel, IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, Bâtiment 22, 35042 Rennes Cedex, France. • *E-mail :* `sebastien.gouezel@univ-rennes1.fr`
Url : `perso.univ-rennes1.fr/sebastien.gouezel`

Erwan Lanneau, Centre de Physique Théorique de Marseille (CPT), UMR CNRS 6207
Université du Sud Toulon-Var et
Fédération de Recherches des Unités de Mathématiques de Marseille
Luminy, Case 907, F-13288 Marseille Cedex 9, France. • *E-mail :* `lanneau@cpt.univ-mrs.fr`
Url : `www.cpt.univ-mrs.fr/~lanneau`