Chapitre 8

Equations différentielles linéaires

8.1 Aperçu sur la dérivation des fonctions à valeurs vectorielles

Dans tout ce paragraphe :

- E désigne un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, c'est à dire qu'il existe n tel que l'espace vectoriel E est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. (nb : n est alors la dimension de E). On peut donc par le choix d'une base se ramener au seul cas bien connu où $E = \mathbb{R}^n$.
- I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités a et b. On note alors $]a; b[$ l'intérieur de cet intervalle.
- La fonction f désigne une fonction définie de I vers $\mathbb{R}^n$. On note alors, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ où chacune des fonctions f_i est une fonction définie sur I et à valeur dans $\mathbb{R}$. Les f_i sont appelées composantes de f.

On a alors le :

Théorème. *La fonction f est continue en $x_0 \in I$ si chacune de ses composantes est continue en x_0. Dans ce cas, on a :*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = (\lim_{x \to x_0} f_1(x), \ldots, \lim_{x \to x_0} f_n(x))$$

La fonction f est dérivable en $x_0 \in I$ si chacune de ses composantes est dérivable en x_0. Dans ce cas, on a :

$$f'(x_0) = (f_1'(x_0), \ldots, f_n'(x_0))$$

On peut appliquer ces théorèmes pour des fonctions à valeurs matricielles : Soit la fonction $M : t \in I \mapsto \begin{pmatrix} m_{11}(t) & \ldots & m_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1}(t) & \ldots & m_{nn}(t) \end{pmatrix}$. On sait alors que M est continue (resp. dérivable) sur I si et seulement chacune des fonctions à valeur réelle m_{ij} est continue (resp. dérivable). Si la fonction M est dérivable, on note alors, $M'(t) = \begin{pmatrix} m'_{11}(t) & \ldots & m'_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ m'_{n1}(t) & \ldots & m'_{nn}(t) \end{pmatrix}$.

Objectif du chapitre : On cherche à résoudre des équations du type $\Phi(f, f', f'', \ldots, f^n) = b$ où f désigne une fonction à valeurs réelles ou vectorielles, et Φ une application linéaire. On est donc ramené au cas des équations linéaires vues dans le chapitre 1, et on sait donc par exemple que si $b = 0$ alors cette équation à toujours des solutions. (La solution nulle convient).

8.2 Systèmes linéaires à coefficients constants

8.2.1 Définition

Exemple : on cherche à résoudre le système

$$(E)\begin{cases} x'(t) = -x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -3x(t) + 4y(t) \end{cases}$$

Où x et y désignent des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ définies sur I un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$.

On pose alors $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Dans ce cas, $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$. Et en posant $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, le système (E) devient $X' = AX$. On est donc ramené à une équation du premier ordre mais avec comme inconnue une fonction X à valeur vectorielle.

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$.*

- *On appelle système différentiel linéaire homogène à coefficients constants l'équation différentielle $X' = AX$ où $X : I \mapsto \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.*
- *On appelle I-solution, une fonction $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $\forall t \in I$, $X'(t) = AX(t)$.*
- *Un problème de Cauchy associé à ce système différentiel $X' = AX$ est la recherche d'une solution satisfaisant à une condition initiale de la forme $X(t_0) = X_0$ où $t_0 \in I$ et $X_0 \in \mathbb{R}^n$. On le note*

$$(E)\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

8.2.2 Théorème de Cauchy-Lipschitz

Théorème. *(Cauchy-Lipschitz) Soit I un intervalle non vide de $\mathbb{R}$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{R}^n$. Le problème de Cauchy*

$$(E)\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

admet une unique solution définie sur I, qui est $X(t) = e^{A(t-t_0)} \cdot X_0$.

Idée de la preuve : on fait comme si on était avec des fonctions à valeurs réelles, mais on utilise l'exponentielle d'une matrice A qui est définie comme suit : $exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}$. Reste à vérifier que cette exponentielle matricielle a les mêmes propriétés sympathiques que l'exponentielle habituelle.

Corollaire. *L'ensemble des solutions de $y' = Ay$ où y est une fonction dans $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel de dimension n.*

En effet, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que $\Phi : X(t) \mapsto X(t_0)$ est un isomorphisme de l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^n$.

8.2.3 Méthode pratique pour A diagonalisable

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est* **diagonalisable** *si A est de la forme PDP^{-1} avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$.*

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On cherche à résoudre

$$(E) \begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

Pour cela, on calcule

$$X(t) = P \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix} \cdot P^{-1} \cdot X_0.$$

8.2.4 Cas $n = 1$

L'ensemble des solutions de $y' + ay = 0$ est donc $\{x \mapsto \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{R}\}$.

8.3 Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

8.3.1 Equations homogènes

On cherche à résoudre $y'' = \alpha y' + \beta y$ avec α et β dans $\mathbb{R}$, et y une fonction définie sur I et à valeurs réelles. Cela revient à résoudre $\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$. Car alors nécessairement $x_1' = x_2$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz implique donc qu'il nous faut rechercher deux fonctions linéairement indépendantes, afin de former une base de l'ensemble des solutions.

Pour cela, on utilise alors l'équation caractéristique $r^2 = \alpha r + \beta$. Se présentent alors 3 cas :

1. Si $r^2 = \alpha r + \beta$ admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2. Alors $t \mapsto e^{r_1 t}$ et $t \mapsto e^{r_2 t}$ forment une base.
2. Si $r^2 = \alpha r + \beta$ admet une racine double notée r, alors on montre que $t \mapsto e^{rt}$ et $t \mapsto te^{rt}$ forment une base.
3. Si nous avons une équation à coefficients réels telle que les racines sont complexes conjugués, on recherche alors des solutions réelles, et on pose $r_1 = r + is$ (avec r et s réels). Dans ce cas, $r_2 = r - is$, et on remarque que $t \mapsto e^{rt}\cos(ts)$ et $t \mapsto e^{rt}\sin(ts))$ forment une base.

Remarque : Si on a deux racines distinctes, on verra alors, dans le chapitre "réduction" qu'il existe alors une matrice inversible P telle que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix} P^{-1}$. On peut donc redémontrer le résultat précédent avec les exponentielles de matrice.

8.3.2 Cas particulier des équations différentielles linéaires avec coefficients constants avec second membre de la forme $P(t)exp(\delta t)$.

On démontrera dans la partie suivante que l'ensemble des solutions générales est la somme des solutions de l'équation homogène et d'une solution particulière. L'objectif de ce chapitre est de trouver une solution particulière dans le cas où le second membre est de la forme $P(t)exp(\delta t)$.

Soit P un polynôme. Soit δ un réel. On cherche à résoudre une équation du type $y'' + ay' + by = P(t)exp(\delta t)$. (La méthode que nous allons exposer fonctionne aussi pour des équations d'ordre différent de 2). On sait que la solution est la somme d'une solution particulière et d'une solution de l'équation homogène (c'est à dire sans second membre) associée. La difficulté, après avoir utilisé la section précédente pour résoudre l'équation homogène, est de trouver une solution particulière. Dans notre cas, une bonne méthode consiste à rechercher une solution particulière sous la forme $q(t)exp(\delta t)$, où q est un polynôme à déterminer.

Exemple : Résoudre $y''(x) + y'(x) - 2y(x) = xexp(2x)$

Les méthodes dans le cas où le second membre n'est pas de cette forme ne sont pas propres aux équations à coefficients constants, on les verra donc dans un paragraphe ultérieur.

8.4 Equations scalaires d'ordre 1

Dans ce paragraphe, on s'autorise des équations à coefficients non constants.

8.4.1 Equation différentielle résolue en y'

Théorème. *(Cauchy-Lipschitz) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux fonctions continues définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le problème de Cauchy :*

$$(E)\begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

admet une unique solution qui est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Définition. *On appelle courbe intégrale le graphe d'une solution de E.*

Corollaire. *Par tout point de $I \times \mathbb{R}$ passe une et une seule courbe intégrale : les courbes intégrales ne se croisent pas.*

Exercice : dessiner les courbes intégrales de $y' = y - e^t sin(t)$

8.4.2 Résolution pratique

Exercice : Résoudre $x'(t) = tx(t) + cos(t)$.

Théorème. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(a, b) \in (\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}))^2$. On note (E) l'équation différentielle $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ et (H) l'équation $x'(t) = a(t)x(t)$ homogène associée. Soit A une primitive de $A : I \mapsto \mathbb{R}$ une primitive de a.*

- *Toute I solution de H est de la forme $t \mapsto cste\ \ e^{A(t)}$. Donc l'ensemble S_H des solutions de (H) est un espace vectoriel de dimension 1 engendré par $t \mapsto e^{A(t)}$.*
- *Si x_1 est une solution pariculière de (E) alors l'ensemble S_E des solutions de E est $S_E = x_1 + S_H$. On peut trouver x_1 par variation de la constante, toutes les solutions de (E) sont donc de la forme*

$$t \mapsto c_1 e^{A(t)} + e^{A(t)} \int_{t_0}^{t} b(s)e^{-A(s)}ds$$

où c_1 est une constante.

8.4.3 Equations non résolues en x'

On cherche maintenant à résoudre des équations du type $\alpha(t)x'(t) + \beta(t)x = \gamma(t)$, pour α, β, γ appartenant à $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

Une telle équation est dite résolue en x' si $\forall t \in I, \quad \alpha(t) = 1$. (C'est le cas du paragraphe précédent).

Sur un intervalle $J \subset I$ où $\alpha(t) \neq 0$, on peut diviser $\alpha(t)$ et on se ramène donc à la section précédente, l'équation devenant

$$x'(t) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)}x(t) = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$$

On peut trouver des solutions sur les intervalles limités par les zéros de α, le problème est de fabriquer une solution définie sur I tout entier en recollant ces morceaux de solution, de manière à ce que cette solution soit bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exercice 1 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ $|t|y'(t) - y(t) = t$

Exercice 2 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ $ty'(t) - y(t) = t$

Exercice 3 : Résoudre sur $\mathbb{R}$ $tx'(t) = 3x(t) + t$

8.5 Equations linéaires scalaires d'ordre 2

Le théorème de la section 4.4.2 se généralise, aux dimension supérieures à 1. Il suffit pour cela d'utiliser l'exponentielle de matrices et l'intégration de fonctions à valeurs vectorielles.

8.5.1 Equation résolue en y''.

Théorème. *(Cauchy-Lipschitz) Soient a, b et c des fonctions continues de I vers $\mathbb{R}$. Quelque soient les points t_0, $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_1 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution du problème de Cauchy suivant :*

$$\begin{cases} x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

Remarque : cela veut dire que par tout point $(t_0, x_0) \in I \times \mathbb{R}$ passe une infinité de courbes intégrales. Mais une seule de ces courbes intégrales a pour pente x_1 en (t_0, x_0).

On note encore une fois (H) l'équation homogène associée : $x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t)$.

Théorème.

- *L'ensemble S_H des solutions de H est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$.*
- *L'ensemble S_E des solutions de E est un sous-espace affine de dimension 2 de $\mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$ de la forme $S_E = x_1 + S_H$ où x_1 est une solution particulière de (E).*

8.5.2 Méthodes pratiques

a) Système fondamental de solutions de (H)

Au vu, du dernier théorème, on constate que si (f_1, f_2) forme une famille libre de solutions de (H), alors c'est une base de S_H. Toute solution de S_H est donc de la forme $f = \lambda f_1 + \mu f_2$.

Définition. *Avec les notations précedentes, on dit que (f_1, f_2) est* **un système fondamental** *de solutions de (H) si (f_1, f_2) forme une base de S_H.*

Remarque : en utilisant le dernier théorème, on voit que (f_1, f_2) est un système fondamental de solutions de (H) si et seulement si $\begin{vmatrix} f_1(x_0) & f_2(x_0) \\ f_1'(x_0) & f_2'(x_0) \end{vmatrix} \neq 0$.

Une fois un système fondamental de solutions de (H) déterminé, il reste à trouver des solutions particulières, c'est l'objet des paragraphes suivants.

b) Principe de superposition

Théorème. *(Principe de superposition) Soit (E) l'équation $x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)$ où a, b et c sont des fonctions continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. On suppose qu'il existe des fonctions $c_1, \dots, c_n)$ continues sur I, tellles que $\forall t \in I$, $c(t) = c_t + \cdots + c_n(t)$. Supposons que l'on connaisse pour tout $i \in \{1 \dots n\}$ une solution x_i de l'équation $x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c_i(t)$. Alors $x_1 + \cdots + x_n$ est une solution de (E).*

Remarque 1 : Ce principe est très souvent utilisé en physique.

Remarque 2 : Cette méthode peut aussi être utilisée pour des équations du premier ordre mais cela est moins utilisé en pratique.

Exercice : résoudre $y'' - y' - 2y = x \operatorname{ch} x$.

c) Méthode de variation de la constante

Soit (E) l'équation $x''(t) = a(t)x'(t) + b(t)x(t) + c(t)$ où a, b et c sont des fonctions continues sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Si on dispose d'une solution particulière x_0 qui ne s'annule pas sur I, on peut rechercher les autres solutions sous la forme : $x = kx_0$, où k est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. En remplaçant dans l'équation (E), on trouve que k' est une solution d'une équation du premier degré que l'on sait résoudre, puis on détermine alors k.

d) Variation des constantes

Théorème. *(Variation des constantes) Soit (f_1, f_2) un système fondamental de l'équation homogène associée à l'équation (E) $x''(t) = a(t)x'(t)+b(t)x(t)+c(t)$. Toute solution de (E) est alors de la forme :*

$x(t) = \lambda_1(t)f_1(t) + \lambda_2(t)f_2(t)$ avec λ_1 et λ_2 deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et vérifiant le sytème suivant :

$$(E) \begin{cases} \lambda_1'(t)f_1(t) + \lambda_1'(t)f_2(t) = 0 \\ \lambda_1'(t)f_1'(t) + \lambda_2'(t)f_2'(t) = c(t) \end{cases}$$

Dans la pratique, on commence par trouver un système fondamental, si on en trouve un, on résout alors le système du théorème, on trouve alors λ_1' et λ_2' et on intégre pour trouver ensuite λ_1 et λ_2. Si on ne trouve qu'une seule solution, on utilise la méthode de la variation de la constante vue au paragraphe précédent.

Si l'équation n'est pas résolue en x'', on se place sur des intervalles où on peut diviser par le coefficient devant x'' et on recherche à la main des solutions sur l'intervalle complet en recollant.

Exercice : résoudre $(x + 1)y'' - y' - xy = (x + 1)^2$.