## L'équation de coagulation de Smoluchowski

#### Philippe Laurençot

Laboratoire de Mathématiques (LAMA), Chambéry

13.01.2023

| □ ▶ ◆ 圖 ▶ ◆ 重 ▶ ◆ 重 ・ 釣 Q ()

1 / 43

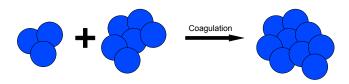
(LAMA) 13.01.2023

## Coagulation/coalescence ...

Coagulation : croissance de particules par accrétion de particules plus petites

Exemples : polymères, gouttelettes, animaux, formation d'aérosols, formation des planètes, ...

Coagulation binaire: fusion de deux particules en une seule



(LAMA) 13.01.2023 2

# Représentations

Modèle discret : P<sub>i</sub> = particule de taille i, i ∈ N \ {0} (polymères, animaux)

Réaction élémentaire :

$$P_i + P_j \longrightarrow P_{i+j}$$
,  $i \ge 1$ ,  $j \ge 1$ .

• Modèle continu :  $P_x$  = particule de taille x,  $x \in (0, \infty)$  (gouttelettes)

Réaction élémentaire :

$$P_x + P_y \longrightarrow P_{x+y}$$
,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

→□ → → □ → → □ → □ → ○ ○ ○

# **Propriétés**

 Conservation de la "matière" au cours de chaque réaction élémentaire :

$$P_x + P_y \longrightarrow P_{x+y}$$
,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

 Décroissance du nombre de particules au cours de chaque réaction élémentaire :

$$P_x + P_y \longrightarrow P_{x+y}$$
,  $x > 0$ ,  $y > 0$ .

(LAMA)

4 / 43

## L'équation de coagulation de Smoluchowski discrète

- Dynamique de la fonction de distribution en taille  $f = (f_i)_{i \ge 1}$  des particules, la densité des particules de taille i étant  $f_i$ ,  $i \ge 1$ .
- Variation temporelle de  $f_i = [GAIN(P_i)] [PERTE(P_i)]$ ,
- [GAIN(*P<sub>i</sub>*)] = "particules *P<sub>i</sub>* nouvellement créées suite à la coalescence de deux particules de tailles plus petites"

$$P_j + P_{i-j} \longrightarrow P_i, \qquad 1 \le j \le i-1.$$

•  $[PERTE(P_i)]$  = "disparition de particules  $P_i$  due à leur fusion avec une autre particule".

$$P_i + P_j \longrightarrow P_{i+j}, \quad j \ge 1.$$

• Taux de formation :  $\left[P_i + P_j \longrightarrow P_{i+j}\right] \sim \mathcal{K}_{i,j} \ f_i \ f_j$ 

(LAMA)

4 D > 4 B >

## L'équation de coagulation de Smoluchowski discrète

$$i = 1: \begin{cases} \frac{df_1}{dt} = -[PERTE(P_1)] \\ = -\sum_{j=1}^{\infty} [P_1 + P_j \longrightarrow P_{j+1}] \\ = -\sum_{j=1}^{\infty} K_{1,j} f_1 f_j. \end{cases}$$

$$i \geq 2: \begin{cases} \frac{df_i}{dt} &= [GAIN(P_i)] - [PERTE(P_i)] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} [P_j + P_{i-j} \longrightarrow P_i] - \sum_{j=1}^{\infty} [P_i + P_j \longrightarrow P_{i+j}] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} K_{j,i-j} f_j f_{i-j} - \sum_{j=1}^{\infty} K_{i,j} f_i f_j. \end{cases}$$

(LAMA) 13.01.2023 6 / 43

## L'équation de coagulation de Smoluchowski discrète

$$i = 1 : \frac{df_1}{dt} = -\sum_{j=1}^{\infty} K_{1,j} f_1 f_j,$$

$$i \ge 2 : \frac{df_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} K_{j,i-j} f_j f_{i-j} - \sum_{j=1}^{\infty} K_{i,j} f_i f_j.$$

Noyau de coagulation  $K_{i,j}$ :  $K_{i,j} = K_{j,i} \ge 0$ .

(ロト (個) (注) (注) 注 り(G

(LAMA) 13.01.2023 7/43

## L'équation de coagulation de Smoluchowski continue

Equation de coagulation de Smoluchowski discrète  $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ :

$$\frac{df_i}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} K_{j,i-j} f_j f_{i-j} - \sum_{j=1}^{\infty} K_{i,j} f_j f_j.$$

Equation de coagulation de Smoluchowski continue  $x \in (0, \infty)$ :

$$\partial_t f(t,x) = \frac{1}{2} \int_0^x K(y,x-y) f(t,y) f(t,x-y) dy - \int_0^\infty K(x,y) f(t,x) f(t,y) dy.$$

(□ ) <□ ) < □ ) < □ ) < □ ) < □ ) </p>

(LAMA) 13.01.2023 8/43

## Exemples de noyaux de coagulation

(LAMA)

$$K(x,y) = \left(x^{1/3} + y^{1/3}\right) \left(\frac{1}{x^{1/3}} + \frac{1}{y^{1/3}}\right) \quad \text{(Smoluchowski)}$$
 En général,  $K(x,y) \leq C \left(1+x\right) \left(1+y\right)$ : 
$$K(x,y) = \left(x^{1/3} + y^{1/3}\right)^3$$
 
$$K(x,y) = \left(x^{1/3} + y^{1/3}\right)^2 \left|x^{1/3} - y^{1/3}\right|$$
 
$$K(x,y) = \left(x^{1/3} + y^{1/3}\right)^2 \left|x^{1/3} - y^{1/3}\right|$$
 
$$K(x,y) = \left(Ax + B\right) \left(Ay + B\right) \quad \text{(Flory, Stockmayer)}$$
 
$$K(x,y) = x^{\lambda} + y^{\lambda}, \quad \lambda \in [0,1] \quad \text{(somme)}$$
 
$$K(x,y) = \left(x + y\right)^{\lambda/2}, \quad \lambda \in [0,2] \quad \text{(produit)}$$
 
$$K(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta} + x^{\beta}y^{\alpha}, \quad \alpha \leq \beta \leq 1$$

4 D > 4 B > 4 Z > 4 Z > Z > 9 (%

13.01.2023

9/43

# L'approche de Smoluchowski (1916,1917)

 $P_i$  = particule colloidale de taille  $i, i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , animée d'un mouvement brownien avec coefficient de diffusion  $D_i$  et zone d'influence de rayon  $R_i$ : si les zones d'influence de deux particules  $P_i$  et  $P_j$  s'intersectent, alors

$$P_i + P_j \longrightarrow P_{i+j}$$
,  $i \ge 1$ ,  $j \ge 1$ .

et  $P_{i+j}$  est animée d'un mouvement brownien avec coefficient de diffusion  $D_i+D_j$  et a une zone d'influence de rayon  $(R_i+R_j)/2$ , le taux de formation étant donné asymptotiquement par

$$K_{i,j} = 4\pi(D_i + D_j)\frac{R_i + R_j}{2}, \qquad i \geq 1, j \geq 1.$$

◆ロト ◆回 → ◆注 > ◆注 > 注 り Q C

13 01 2023

10 / 43

# L'approche de Smoluchowski (1916,1917)

La densité  $f_i$  des particules de taille  $i \ge 1$  est alors donnée par :

$$\partial_t f_i = \frac{D_i}{2} \Delta_z f_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} K_{j,i-j} f_j f_{i-j} - \sum_{j=1}^{\infty} K_{i,j} f_i f_j.$$

Lang & Nguyen (1980), Norris (2004), Hammond (2015)

Si  $D_i R_i = D_1 R_1$  pour  $i \ge 2$ , alors

$$K_{i,j} = 2\pi (R_i + R_j) \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_j} \right) = 2\pi \left( 2 + \frac{R_i}{R_j} + \frac{R_j}{R_i} \right)$$

pour  $i \ge 1$  et  $j \ge 1$ . En particulier, si  $R_i \sim R_j$ , alors  $K_{i,j} \sim \text{const.}$ 

(□) (□) (□) (□) (□) (□)

11 / 43

(LAMA) 13.01.2023

# L'approche de Marcus (1968) et Lushnikov (1973)

Processus de Marcus-Lushnikov : m particules

$$X_0 = \sum_{i=1}^m \delta_{x_i}, \quad (x_i) \in (0,\infty)^m$$

• Pour chaque paire (i, j), on prend un temps exponentiel aléatoire  $T_{i,j}$  de paramètre  $K(x_i, x_j)$  et on pose  $T = \min \{T_{i,j}, 1 \le i < j \le m\}$ . On définit alors

$$X_t = X_0 \text{ si } t \in [0,T) \,, \quad X_T = X_0 - \delta_{x_i} - \delta_{x_j} + \delta_{x_i+x_j} \text{ si } T = T_{i,j}$$

• Puis, on recommence ...  $\longrightarrow$  coalescent stochastique  $(X_t)_{t\geq 0}$  de noyau K (processus de Markov)

Jeon (1998), Aldous (1999), Norris (1999)



(LAMA) 13.01.2023 12 / 43

# L'approche de Marcus (1968) et Lushnikov (1973)

Soit  $(X_t^n)_{t\geq 0}$  une suite de coalescents stochastiques de noyau K telle que

$$\frac{1}{n} X_0^n \longrightarrow \mu_0$$
.

Alors

$$Y_t^n = \frac{1}{n} X_{t/n}^n \longrightarrow Y_t$$

et  $(Y_t)_{t\geq 0}$  est une solution de l'équation de coagulation de Smoluchowski continue (p.s.)

Aldous (1999), Babovsky (1999), Deaconu, Fournier & Tanré (2001,2002), Eibeck & Wagner (2000,2001), Jourdain (2001) ...

←□▶←□▶←□▶←□▶
 □▼◆□▶

13.01.2023

13 / 43

## L'équation de coagulation de Smoluchowski continue

Equation de coagulation de Smoluchowski continue  $x \in (0, \infty)$ :

$$\partial_t f(t,x) = \frac{1}{2} \int_0^x K(y,x-y) f(t,y) f(t,x-y) dy$$
$$-\int_0^\infty K(x,y) f(t,x) f(t,y) dy,$$
$$f(0,x) = f^{in}(x), \quad x \in (0,\infty).$$

(LAMA) 13.01.2023 14/43

## **Deux questions**

 Il n'y a pas de perte de matière durant chaque réaction élémentaire : conservation de la masse totale.

$$M_1(f(t)) := \int_0^\infty x f(t, x) \ dx$$

 Caractère prédictif de l'équation de Smoluchowski : taille moyenne des particules, ...

(LAMA) 13.01.2023 15 / 43

#### Conservation de la masse totale

Formellement, on a

$$\frac{d}{dt} \int_0^\infty \vartheta(x) f(t, x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty \left[ \vartheta(x + y) - \vartheta(x) - \vartheta(y) \right] K(x, y) f(t, x) f(t, y) \, dy dx.$$

Donc, si  $\vartheta(x) = x$ ,

$$\frac{d}{dt} \int_{0}^{\infty} x f(t, x) = 0$$
  $\longrightarrow$  conservation de la masse totale.

13.01.2023

16 / 43

#### Conservation de la masse totale

Mais, si K(x,y) = 2xy et  $\vartheta(x) = 1$ , on a

$$rac{d}{dt} \int_0^\infty f(t,x) \ dx = -M_1(f(t))^2 = -M_1(f^{in})^2$$

et donc

$$\int_0^\infty f(t,x) \ dx = \int_0^\infty f^{in}(x) \ dx - M_1(f^{in})^2 t < 0$$

dès que

$$t > \frac{1}{M_1(f^{in})^2} \int_0^\infty f^{in}(x) \ dx.$$

Leyvraz & Tschudi (1981)

◆□▶◆률▶◆혈▶ · 혈 · 쒸익

(LAMA)

13.01.2023

17 / 43

#### Gélification

Phénomène de perte éventuelle de masse = gélification.

$$T_{gel} := \inf \left\{ t > 0 : M_1(f(t)) < M_1(f^{in}) \right\}$$

- Emballement des réactions de coagulation dû à une forte croissance du noyau de coagulation avec la masse des particules. Apparition en temps fini de particules de taille infinie, non prises en compte dans le modèle.
- Mathématiques : la justification de la conservation de la masse requiert l'utilisation du théorème de Fubini.
- Question 1 : pour quels noyaux de coagulation et/ou conditions initiales le phénomène de gélification se produit-il ?
- Question 2 : validité du modèle après l'instant de gélification ?



#### Gélification

Question 1 : pour quels noyaux de coagulation et/ou conditions initiales le phénomène de gélification se produit-il ?

- $K(x,y) \le K_0(1+x+y)$ :  $T_{gel} = \infty$ White (1980), Levyraz & Tschudi (1982), ...
- $K(x,y) \ge K_1(xy)^{\lambda/2}$ ,  $\lambda \in (1,2]$ Leyvraz (1983), da Costa (1998), Jeon (1998), Escobedo, Mischler & Perthame (2002)
- $K(x,y) = xy : T_{gel} = 1/M_2(f^{in}) \in [0,\infty)$
- $K(x,y) \ge K_1(x^\alpha y^\beta + x^\beta y^\alpha), \ \alpha \in [0,\beta], \ \beta > 1$ :  $T_{gel} = 0$
- $K(x,y) = k_0(x)k_0(y)$ , où  $k_0 = \sqrt{\xi_{\alpha} + x} \big[ \ln(\xi_{\alpha} + x) \big]^{\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ .
  - $\alpha \in (0, 1/2]$  et  $f^{in} \in L^1((0, \infty), x(1+x)dx)$  :  $T_{gel} = \infty$ .
  - $\alpha > 1$ :  $T_{gel} < \infty$

L (2015)



#### Gélification

#### Question 2 : validité du modèle après l'instant de gélification ?

- Pas d'interaction entre les particules de taille finie et celle(s) de taille infinie
- Existence de solutions globales si  $K(x,y) \leq (1+x)(1+y)$ Leyvraz & Tschudi (1981), Galkin & Dubovskii (1986), ...
- Existence de solutions globales si  $K(x,y)=k_0(x)k_0(y)$  quelque soit la croissance de  $k_0$ 
  - L (2000)
- Non-existence de solution (même locale) si  $K(x,y) = x^{\lambda} + y^{\lambda}$  et  $\lambda > 1$ .

van Dongen (1987), Carr & da Costa (1992), Banasiak, Lamb & L (2019)



# Simplification asymptotique

Caractère prédictif de l'équation de coagulation de Smoluchowski continue : simplification asymptotique lorsque  $t \to T_{gel}$ . La dynamique "gomme" les spécificités de la donnée initiale lorsque  $t \to T_{gel}$ .

- La taille moyenne σ(t) croît avec t et, pour x fixé, f(t,x) "décroît" avec le temps
- Simplification asymptotique (dynamical scaling hypothesis) :

$$f(t,x) \underset{t \to T_{gel}}{\sim} \frac{1}{\sigma(t)^{\tau}} \varphi\left(\frac{x}{\sigma(t)}\right)$$

- Si  $T_{gel}=\infty$ , alors au=2 par compatibilité avec la conservation de la masse totale
- Si  $T_{gel} < \infty$ , alors  $\tau = ?$

4 D > 4 P > 4 E > 4 E > E 9990

(LAMA) 13.01.2023 21 / 43

# Simplification asymptotique : K(x, y) = 2

$$K(x,y)=2$$

- Pas de gélification
- solution explicite

$$\sigma(t) = 1 + t, \qquad \varphi(x) = e^{-x}$$

Schumann (1940)

 C'est la seule de masse totale égale à 1 et elle est stable pour la dynamique (transformation de Laplace)

Kreer & Penrose (1994), da Costa (1996), Menon & Pego (2004, 2005)

 Etude spectrale de l'opérateur linéarisé et convergence exponentielle en variables auto-similaires

Cañizo, Mischler & Mouhot (2010)



# Simplification asymptotique : K(x, y) = x + y

$$K(x,y)=x+y$$

- Pas de gélification
- Solution explicite

$$\sigma(t) = e^{2t}, \qquad \varphi(x) = \frac{e^{-x/4}}{\sqrt{4\pi}x^{3/2}}$$

Golovin (1963), van Dongen & Ernst (1988), Aldous (1999)

• C'est la seule de masse totale égale à 1 vérifiant  $M_2(\varphi) < \infty$  et elle est stable pour la dynamique (transformation de Laplace)

Menon & Pego (2004, 2005)

• Singularité en x = 0

- 《ロ》《御》《唐》《唐》 - 唐 - 夕Qで

(LAMA) 13.01.2023 23 / 43

# Simplification asymptotique : K(x, y) = x + y

$$K(x, y) = x + y$$

• Solution explicite  $\theta \in (0, 1/2]$ 

$$\sigma(t) = e^{t/\theta}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\pi x^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j!} x^{j\theta} \Gamma(1+j-j\theta) \sin(\pi j\theta)$$

Bertoin (2002), Menon & Pego (2004, 2005)

- Bassin d'attraction (transformation de Laplace)
  - Menon & Pego (2004, 2005)
- Existence de solutions auto-similaires avec  $\tau \in (1,2)$  et de masse infinie pour K(x,y)=2

Menon & Pego (2004, 2005)

→ロト ◆問 ト ◆ 恵 ト ◆ 恵 ・ 釣 久 ②

(LAMA) 13.01.2023 24/43

# Simplification asymptotique : K(x, y) = xy

$$K(x, y) = xy$$

- Gélification  $T_{gel} = 1/M_2(f^{in})$
- Solution explicite

$$au = 5/2, \qquad \sigma(t) = \left(1 - \frac{t}{T_{gel}}\right)^{-2}, \qquad \varphi(x) = \frac{e^{-x/4}}{\sqrt{4\pi}x^{5/2}}$$

- $M_1(\varphi) = \infty$
- Transformation :

$$xf(t,x) = \frac{1}{T_{gel} - t} F\left(\ln\left(T_{gel}\right) - \ln\left(T_{gel} - t\right), x\right)$$

et F est solution de l'équation de Smoluchowski avec K(x, y) = x + y

(LAMA) 13.01.2023 25/43

# Simplification asymptotique : cas général

$$f(t,x) \underset{t \to T_{gel}}{\sim} \frac{1}{\sigma(t)^{\tau}} \varphi\left(\frac{x}{\sigma(t)}\right)$$

Première étape : on cherche des solutions auto-similaires de l'équation

$$(t,x)\mapsto \frac{1}{\sigma(t)^{\tau}}\varphi\left(\frac{x}{\sigma(t)}\right)$$

pour des noyaux de coagulation K homogènes

$$K(ax, ay) = a^{\lambda}K(x, y),$$

Identification de  $\tau$ ,  $\sigma$ , et du profil auto-similaire  $\varphi$ 

◆ロ > ◆母 > ◆き > ◆き > き の

13.01.2023

26 / 43

# Simplification asymptotique : $\sigma$

Identification de  $\sigma$ :

$$\sigma(t)^{\tau-\lambda-2}\sigma'(t)=w>0$$

- $\tau > \lambda + 1$ :  $\sigma(t) = (1 + w(\tau \lambda 1)t)^{1/(\tau \lambda 1)}, t \ge 0$
- $\tau = \lambda + 1$ :  $\sigma(t) = e^{wt}$ ,  $t \ge 0$
- $\tau < \lambda + 1$ :  $\sigma(t) = (1 w(\lambda + 1 \tau)t)^{-1/(\lambda + 1 \tau)},$  $t \in [0, 1/w(\lambda + 1 - \tau))$

La taille moyenne  $\sigma$  est donc déterminée complètement par  $\tau$  et w

(LAMA)

13.01.2023 27 / 43

## Simplification asymptotique : $\varphi$

ullet Equation intégro-différentielle non linéaire et non locale pour arphi :

$$w\left(-\tau\varphi(y)-y\frac{d\varphi(y)}{dy}\right)=\frac{1}{2}\int_0^y K(y_*,y-y_*)\varphi(y-y_*)\varphi(y_*)\ dy_*$$
$$-\varphi(y)\int_0^\infty K(y,y_*)\varphi(y_*)\ dy$$

- Détermination de  $\tau$  et de  $\varphi$
- $\tau \neq 2 \iff M_1(\varphi) = \infty$
- Pour chaque y > 0,  $\varphi(y)$  dépend des valeurs de  $\varphi$  dans (0, y) et  $(y, \infty)$ : ce n'est pas *a priori* un problème de Cauchy

28 / 43

(LAMA) 13.01.2023

#### Profils auto-similaires

$$K(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta} + x^{\beta}y^{\alpha}, \qquad \alpha \le \beta \le 1$$

- $\lambda := \alpha + \beta < 1 : \tau = 2$  et w = 1
  - Analyse formelle fine du comportement de  $\varphi$  lorsque  $x \to 0$  et  $x \to \infty$
  - décroissance exponentielle lorsque  $x \to \infty$
  - décroissance exponentielle lorsque  $x \to 0$  si  $\alpha < 0$
  - singularité algébrique implicite si  $\alpha = 0$
  - singularité explicite si  $\alpha > 0$
- $\lambda = 1$ ,  $\tau = 2$ : simplification asymptotique pour K(x, y) = x + y, comportement différent pour  $K(x, y) = \sqrt{xy}$  (non auto-similaire)
- $\lambda > 1$ : valeur de  $\tau$ ?

van Dongen & Ernst (1988)



13 01 2023

29 / 43

$$K(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta} + x^{\beta}y^{\alpha}, \qquad \alpha \leq \beta \leq 1$$

• Comportement de  $\varphi$  lorsque  $x \to \infty$ 

$$\varphi(x) \underset{x \to \infty}{\sim} A_{\infty} x^{-\lambda} e^{-\delta x}, \qquad A_{\infty} x^{-\lambda}$$

- Comportement de  $\varphi$  lorsque  $x \to 0$ 
  - α < 0 :</li>

$$\varphi(x) \underset{x \to 0}{\sim} A_0 \frac{M_{\lambda - \alpha}(\varphi)}{x^2} \exp\left\{\frac{M_{\lambda - \alpha}}{\alpha} x^{\alpha}\right\}, \qquad A_0 ?$$

- $\alpha = 0$ :  $\varphi(x) \sim_{x \to 0} A_0 x^{-2+M_{\lambda}(\varphi)}, A_0$ ?
- $\alpha > 0$ :  $\varphi(x) \sim_{x \to 0} A_0 x^{-1-\lambda}$ ,  $A_0$  explicite

van Dongen & Ernst (1988)

$$\left(-2\varphi(y) - y\frac{d\varphi(y)}{dy}\right) = \frac{1}{2} \int_0^y K(y_*, y - y_*)\varphi(y - y_*)\varphi(y_*) dy_*$$
$$-\varphi(y) \int_0^\infty K(y, y_*)\varphi(y_*) dy$$

- Pour chaque y > 0,  $\varphi(y)$  dépend des valeurs de  $\varphi$  dans (0, y) et  $(y,\infty)$ : ce n'est pas *a priori* un problème de Cauchy
- $\bullet \varphi$  présente une singularité ou s'annule très rapidement quand  $x \rightarrow 0$
- $y_* \mapsto K(y, y_*)\varphi(y_*) \notin L^1(0, \infty)$
- Solution explicite  $A_0 v^{-1-\lambda}$

$$\left(-2\varphi(y) - y\frac{d\varphi(y)}{dy}\right) = \frac{1}{2} \int_0^y K(y_*, y - y_*)\varphi(y - y_*)\varphi(y_*) dy_*$$
$$-\varphi(y) \int_0^\infty K(y, y_*)\varphi(y_*) dy$$

Formulation équivalente sans singularité :

$$y^{2}\varphi(y) = \int_{0}^{y} \int_{y-x}^{\infty} xK(x, x_{*})\varphi(x)\varphi(x_{*}) dx_{*}dx$$

(LAMA) 13.01.2023 32 / 43

$$K(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta} + x^{\beta}y^{\alpha}, \qquad \alpha \leq \beta \leq 1$$

- Existence de profils auto-similaires à décroissance exponentielle lorsque  $x \to \infty$  et vérifiant, lorsque  $x \to 0$ ,
  - le comportement prédit si  $\alpha \leq 0$
  - $0 < c \le x^{1+\lambda} \varphi(x) \le C \text{ si } \alpha > 0$
  - Analyse asymptotique formelle prédisant un comportement oscillant si  $\alpha>0$

Escobedo, Mischler & Rodriguez-Ricard (2005), Fournier & L (2005, 2006), Cañizo & Mischler (2011), Niethammer & Velázquez (2011), McLeod, Niethammer & Velázquez (2011)

33 / 43

(LAMA) 13.01.2023

$$K(x, y) = x^{\alpha}y^{\beta} + x^{\beta}y^{\alpha}, \qquad \alpha \le \beta \le 1$$

Existence de profils auto-similaires :

- Difficulté liée à la singularité en x = 0
- Approche dynamique :  $\varphi$  est solution stationnaire (point fixe) d'un système dynamique associée à l'équation de Smoluchowski en variables auto-similaires

$$f(t,x) = \frac{1}{\sigma(t)^2} g\left(\ln\left(\sigma(t)\right), \frac{x}{\sigma(t)}\right), \quad \sigma(t) = (1 + (1-\lambda)t)^{1/(1-\lambda)}$$

• Méthode de compacité : approximation par discrétisation en taille ou approximation du terme de transport par un opérateur non local

(LAMA) 13.01.2023 34/43

#### Profils auto-similaires : $\lambda < 1$ , $\tau = 2$ , w = 1

#### Unicité?

- K(x, y) = 2, K(x, y) = x + y: transformée de Laplace
- $K(x,y) = 2 + \varepsilon((x/y)^{\theta} + (y/x)^{\theta}), \theta \in [0,1), \varepsilon \ll 1$ : approche perturbative en transformée de Laplace ou dans  $L^1$  ( $\lambda = 0$ )
- $K(x,y) = 2 + \varepsilon W(x,y)$ ,  $W \in L^{\infty}((0,\infty)^2)$  homogène de degré zéro et  $\varepsilon \ll 1$
- $K(x, y) = (xy)^{\lambda/2}, \lambda < 0$

Kreer & Penrose (1994), Menon & Pego (2004), Niethammer & Velázquez (2014), Niethammer, Throm & Velázquez (2016), L (2018), Throm (2021), Cañizo & Throm (2021)

4□ > 4回 > 4 重 > 4 重 > 重 の 9 ○

13 01 2023

35/43

## Simplification asymptotique : $\lambda$ < 1, $\tau$ = 2, w = 1

#### Stabilité?

- K(x, y) = 2, K(x, y) = x + y: transformée de Laplace
- $K(x,y) = 2 + \varepsilon((x/y)^{\theta} + (y/x)^{\theta}), \ \theta \in [0,1), \ \varepsilon \ll 1$ : approche perturbative dans  $L^1$  ( $\lambda = 0$ )
- $K(x,y)=2+\varepsilon W(x,y),\ W\in L^\infty((0,\infty)^2)$  homogène de degré zéro et  $\varepsilon\ll 1$

Kreer & Penrose (1994), Menon & Pego (2004), Throm (2021), Cañizo & Throm (2021)



13 01 2023

36/43

#### Profils auto-similaires à décroissance lente

#### Solutions auto-similaires

$$(t,x)\mapsto \frac{1}{\sigma(t)^{\tau}}\varphi\left(\frac{x}{\sigma(t)}\right), \qquad \tau\neq 2,$$

pour des noyaux de coagulation K homogènes

$$K(ax, ay) = a^{\lambda}K(x, y)$$

- $K(x,y) = 2 : \tau \in (1,2)$ 
  - Menon & Pego (2004)

• 
$$K(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta} + x^{\beta}y^{\alpha}$$
,  $0 \le \alpha \le \beta$ ,  $\lambda = \alpha + \beta \in (0,1)$ :  $\tau \in (1 + \lambda, 2)$ 

Niethammer & Velázquez (2013)

• 
$$K(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta} + x^{\beta}y^{\alpha}$$
,  $\alpha \le 0$ ,  $\beta < 1$ ,  $\lambda = \alpha + \beta < 1$ ):  $\tau \in (1 + \beta_{+}, 2) \subset (1 + \lambda, 2)$ 

Niethammer, Throm & Velázquez (2016), Throm (2018, 2021)

#### Existence et unicité de solutions

- Existence de solutions qui conservent la masse totale si  $K(x,y) \leq K_0(1+x+y)$ , propagation des moments algébriques et unicité dès que  $M_2(f^{in}) < \infty$
- Existence de solutions qui conservent la masse totale si  $K(x,y) \le K_0(1+x+y), (x,y) \in (1,\infty)^2$ , et avec une singularité en x=0 et/ou y=0
- Existence de solutions faibles si  $K(x,y)/y \to 0$  quand  $y \to \infty$  ou K(x,y) = xy + perturbation de croissance plus lente, pas d'unicité
- Existence par une méthode de point fixe de Banach si  $K \in L^{\infty}((0,\infty)^2)$
- Lorsque K est non borné, méthode de compacité faible dans L<sup>1</sup> inspirée de l'équation de Boltzmann. Estimation de moments, théorème de la Vallée-Poussin

Stewart (1989), ...



## Equation de coagulation avec terme source

$$\partial_t f(t,x) = \frac{1}{2} \int_0^x K(y,x-y) f(t,y) f(t,x-y) dy - \int_0^\infty K(x,y) f(t,x) f(t,y) dy + S(x).$$

$$K(x, y) = x^{\lambda + \alpha} y^{-\alpha} + x^{-\alpha} y^{\lambda + \alpha}, \qquad (\lambda, \alpha) \in \mathbb{R}^2$$

- If  $|\lambda+2\alpha|<1$  and  $S\in L^1_+(0,\infty)$ , existence d'une solution stationnaire F telle que  $M_m(F)<\infty$  for  $m\in[0,(1+\lambda)/2)$  et  $M_{(1+\lambda)/2}(F)=\infty$ . De plus, si  $M_m(S)<\infty$  pour m<0, alors  $M_m(F)<\infty$
- Si  $|\lambda + 2\alpha| \ge 1$  et  $S \in L^1_+(0,\infty)$ ,  $S \not\equiv 0$ , non-existence de solution stationnaire
- Comportement en grands temps ?

Dubovski (1994), Ferreira, Lukkarinen, Nota & Velázquez (2021), L (2020)

(LAMA) 13.01.2023

39 / 43

## Equation de coagulation-fragmentation

$$\partial_t f(t,x) = \frac{1}{2} \int_0^x K(y,x-y) f(t,y) f(t,x-y) dy$$
$$-\int_0^\infty K(x,y) f(t,x) f(t,y) dy$$
$$-a(x)f(t,x) + \int_x^\infty a(y)b(x,y)f(t,y) dy.$$

b(x,y): distribution des fragments de taille  $x \in (0,y)$  résultant de la fragmentation d'une particule de taille y > 0. Pas de perte de matière :

$$\int_0^y x b(x, y) \ dx = y, \qquad b(x, y) = 0, \ x > y.$$

(LAMA) 13.01.2023 40/43

## Equation de coagulation-fragmentation

Compétition entre coagulation et fragmentation

- Conservation de la masse totale/gélification
- Solutions stationnaires



41 / 43

(LAMA) 13.01.2023

# Coagulation multidimensionnelle

Soit 
$$d \geq 2$$
,  $\mathbf{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq d} \in [0, \infty)^d \setminus \{\mathbf{0}\}, \, \mathbf{y} = (y_i)_{1 \leq i \leq d} \in [0, \infty)^d \setminus \{\mathbf{0}\}$ 

$$\partial_t f(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{\{0 < \mathbf{y} < \mathbf{x}\}} K(\mathbf{y}, \mathbf{x} - \mathbf{y}) f(t, \mathbf{y}) f(t, \mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y}$$
$$- \int_{[0, \infty)^d \setminus \{0\}} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) f(t, \mathbf{x}) f(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y},$$

avec

$$\{0 < \mathbf{y} < \mathbf{x}\} := \{\mathbf{y} \in [0, \infty)^d \setminus \{\mathbf{0}\} : x_i \le y_i, \ 1 \le i \le d, \ \mathbf{y} \ne \mathbf{x}\}$$

Existence et non-existence de solutions stationnaires en présence d'une source, propriétés de ces solutions

Ferreira, Lukkarinen, Nota & Velázquez (2021)

(ロ) (倒) (注) (注) (注) (注) の(()

## Ajout d'une dépendance spatiale

$$\partial_t f(t,x,z) = d(x) \Delta_z f(t,x,z) + \frac{1}{2} \int_0^x K(y,x-y) f(t,y,z) f(t,x-y,z) dy - \int_0^\infty K(x,y) f(t,x,z) f(t,y,z) dy,$$

où 
$$x \in (0, \infty)$$
 et  $z \in \Omega \subset \mathbb{R}^N$ 

- Interaction non locale en x mais locale en z
- Existence plus compliquée à obtenir : pas d'estimation de moments, estimations d'intégrabilité uniforme sous des hypothèses de monotonie de K