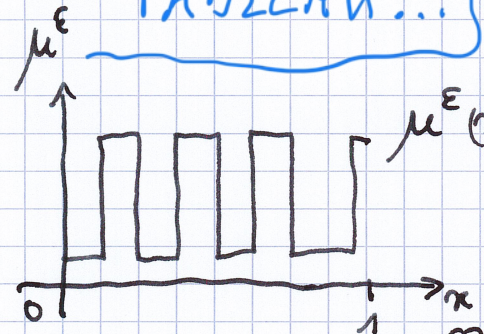


DÉBUT DE
L'EXPOSÉ AU
TABLEAU...

Homogénéisation: le cas elliptique

$$\begin{cases} (-\mu^\epsilon u^\epsilon)' = f &]0,1[\\ u^\epsilon(0) = 1 = u^\epsilon(1) \end{cases}$$



$$\mu^\epsilon(x) = \alpha_1^\epsilon(x) \mu_1 + \alpha_2^\epsilon(x) \mu_2 \quad \mu_1, \mu_2 > 0$$

$$\alpha_1^\epsilon + \alpha_2^\epsilon = 1$$

$$\alpha_1^\epsilon \alpha_2^\epsilon = 0$$

On suppose que $\alpha_1^\epsilon \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{L^2 \text{ faible}} \alpha_1$ (donc $\alpha_2^\epsilon \rightarrow \alpha_2 = 1 - \alpha_1$).

$$-\mu^\epsilon(x) u^{\epsilon'}(x) = -\mu^\epsilon(0) u^{\epsilon'}(0) + \int_0^x f(y) dy$$

donc

$$\begin{aligned} u^\epsilon(x) &= u^\epsilon(0) + \int_0^x u^{\epsilon'}(y) dy = 0 + \int_0^x \frac{\mu^\epsilon(0) u^{\epsilon'}(0) - \frac{1}{\mu^\epsilon(y)} \int_0^y f(z) dz}{\mu^\epsilon(y)} dy \\ &= \underbrace{\int_0^x \frac{\mu^\epsilon(0) u^{\epsilon'}(0)}{\mu^\epsilon(y)} dy}_{g^\epsilon(x)} - \underbrace{\int_0^x \frac{1}{\mu^\epsilon(y)} \int_0^y f(z) dz dy}_{h^\epsilon(x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{h^\epsilon(x)} &= - \int_0^x \frac{1}{\alpha_1^\epsilon(y) \mu_1 + \alpha_2^\epsilon(y) \mu_2} \int_0^y f(z) dz dy \\ &= - \int_0^x \left(\frac{\alpha_1^\epsilon(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2^\epsilon(y)}{\mu_2} \right) \int_0^y f(z) dz dy \quad (\text{miracle}) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} - \int_0^x \left(\frac{\alpha_1(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2(y)}{\mu_2} \right) \int_0^y f(z) dz dy.$$

$$\underline{g^E(x)} = \int_0^x \frac{\mu^E(0) u^{E'}(0)}{\mu^E(y)} dy = \int_0^x \underbrace{\mu^E(0) u^{E'}(0)}_{\text{converge?}} \left(\underbrace{\frac{\alpha_1^E(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2^E(y)}{\mu_2}}_{\text{converge faiblement}} \right) dy$$

On a $u^E(1) = 0 = g^E(1) = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\mu^E(y)} \int_0^y f(z) dz dy}_{g^E(1)}$

donc $g^E(1) = \int_0^1 \left(\frac{\alpha_1^E(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2^E(y)}{\mu_2} \right) \int_0^y f(z) dz dy$

aussi $\int_0^1 \mu^E(0) u^{E'}(0) \left(\frac{\alpha_1^E(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2^E(y)}{\mu_2} \right) dy = \mu^E(0) u^{E'}(0) \int_0^1 \frac{\alpha_1^E(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2^E(y)}{\mu_2} dy.$

On a $g^E(1) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \left(\frac{\alpha_1(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2(y)}{\mu_2} \right) \int_0^y f(z) dz dy \stackrel{d'une part}{=} g(1)$

et $\int_0^1 \frac{\alpha_1^E(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2^E(y)}{\mu_2} dy \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2} dy \stackrel{d'autre part.}{}$

Donc $\mu^E(0) u^{E'}(0) = \frac{\int_0^1 \left(\frac{\alpha_1^E(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2^E(y)}{\mu_2} \right) \int_0^y f(z) dz dy}{\int_0^1 \frac{\alpha_1^E(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2^E(y)}{\mu_2} dy}$

$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(1)}{\int_0^1 \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2}} \cdot$ Donc $g^E(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(1)}{\int_0^1 \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2}} \int_0^x \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2} dy.$

(2)

Donc u^ε converge lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, disons vers u .

$$(1) \quad u(x) = \frac{\int_0^1 \left(\frac{\alpha_1(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2(y)}{\mu_2} \right) \int_0^y f(z) dz dy}{\int_0^1 \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2}} \int_0^x \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2} - \int_0^x \left(\frac{\alpha_1(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2(y)}{\mu_2} \right) \int_0^y f(z) dz dy$$

$$\text{Donc } u'(x) = \left(\frac{\alpha_1(x)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2(x)}{\mu_2} \right) \frac{\int_0^1 \left(\frac{\alpha_1(y)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2(y)}{\mu_2} \right) \int_0^y f(z) dz dy}{\int_0^1 \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2}} - \left(\frac{\alpha_1(x)}{\mu_1} + \frac{\alpha_2(x)}{\mu_2} \right) \int_0^x f(z) dz.$$

$$\text{Ainsi } \left(\frac{1}{\frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2}} u' \right)'(x) = -f(x) : \quad -(\mu u')' = f \text{ avec } \frac{1}{\mu} = \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2}.$$

D'autre part on vérifie facilement que $u(0) = u(1) = 0$ (cf. (1)).

Remarque On aurait pu prendre μ_1 et μ_2 fonctions de x !

Technique plus classique et formelle

Posons $\sigma^\varepsilon = \mu^\varepsilon u^{\varepsilon'}$. On a $-\sigma^{\varepsilon'} = f$.

$$\text{D'autre part } -u^\varepsilon (\mu^\varepsilon u^{\varepsilon'})' = f u^\varepsilon, \quad -\int_0^1 u^\varepsilon (\mu^\varepsilon u^{\varepsilon'})' = \int_0^1 f u^\varepsilon,$$

$$\int_0^1 \mu^\varepsilon (u^{\varepsilon'})^2 = \int_0^1 f u^\varepsilon, \quad \int_0^1 (u^{\varepsilon'})^2 \leq \frac{1}{\min(\mu_1, \mu_2)} \|f\|_2 \|u^\varepsilon\|_2$$

donc $\exists C / \|u^\varepsilon\|_{H^1} \leq C \quad \forall \varepsilon$ (inégalité de Poincaré...).

Donc $\exists u \mid u^\varepsilon \xrightarrow{L^2} u$ et $u^{\varepsilon'} \xrightarrow{L^2} u'$

Par ailleurs $\|\sigma^{\varepsilon'}\|_2 = \|f\|_2$ et $\|\sigma^\varepsilon\|_2 \leq \max(\mu_1, \mu_2) \|u^{\varepsilon'}\|_2$

donc $\exists C \mid \|\sigma^\varepsilon\|_{H^1} \leq C \forall \varepsilon$.

Donc $\exists \sigma \mid \sigma^\varepsilon \xrightarrow{L^2} \sigma$ et $\sigma^{\varepsilon'} \xrightarrow{L^2} \sigma'$.

Question naturelle : a-t-on $\sigma = \bar{\mu} u'$
(puisque on a $\mu^\varepsilon \rightarrow \bar{\mu}$ et $u^{\varepsilon'} \rightarrow u$ et $\sigma^\varepsilon \rightarrow \sigma$).

Non a priori.

Cependant $u^{\varepsilon'} = \frac{1}{\mu^\varepsilon} \sigma^\varepsilon$.

Or $\sigma^\varepsilon \rightarrow \sigma$ et $\mu^\varepsilon \rightarrow \bar{\mu}$ avec μ^ε loin de 0
ce qui implique $\frac{1}{\mu^\varepsilon} \rightarrow \left\langle \frac{1}{\mu} \right\rangle = \frac{\alpha_1}{\mu_1} + \frac{\alpha_2}{\mu_2}$ que l'on note $\frac{1}{\mu}$

Donc $\frac{1}{\mu^\varepsilon} \sigma^\varepsilon \rightarrow \frac{1}{\mu} \sigma$

$u^{\varepsilon'} \rightarrow u'$

finalament $\sigma = \mu u'$ où μ
est la moyenne harmonique de
 μ_1 et μ_2 .

Enfin comme $-\sigma^{\varepsilon'} = f \forall \varepsilon$, on a $-\sigma' = f$ ce qui donne
 $-(\mu u')' = f$.
CQFD.

Venons-en au sujet de mon exposé: Navier-Stokes.

Les équations que l'on va considérer sont celles qui régissent le comportement d'un fluide compressible barotrope unidimensionnel:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = \mu \partial_{xx} u, \end{cases} \quad t > 0, x \in \mathbb{R}.$$

(on suppose $\mu > 0$ constant)

Pour un fluide simple on connaît p : $p = p(\rho)$

(par exemple $p(\rho) = \rho^\gamma$, $\gamma > 1$, ou $p(\rho) = C\rho \dots$).

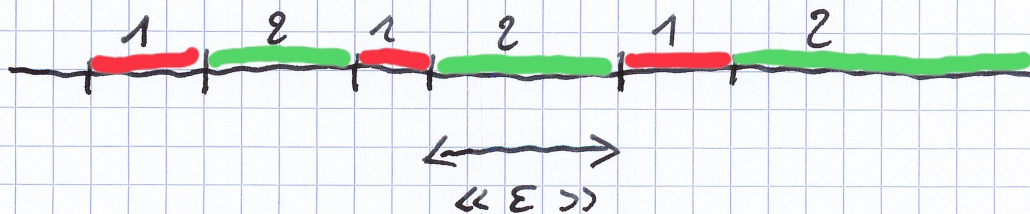
Question: que dire si le fluide que l'on a est un mélange de l fluides simples (dont on connaît les lois de pression) ?

Précisément, pour ces deux fluides isolés,

$$\left. \begin{array}{l} \text{fluide 1} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t p_1 + \partial_x p_1 u = 0, \\ \partial_t p_1 u + \partial_x (p_1 u^2 + p_1 / p_1) = \mu_1 \partial_{xx} u, \end{array} \right. \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{fluide 2} \\ \left\{ \begin{array}{l} \partial_t p_2 + \partial_x p_2 u = 0, \\ \partial_t p_2 u + \partial_x (p_2 u^2 + p_2 / p_2) = \mu_2 \partial_{xx} u. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On mélange ces fluides : quelle est la loi de pression du mélange ? Et même : quel est le modèle régissant son évolution ? Ressemble-t-il au système de Navier-Stokes ?

On va voir un mélange comme la limite d'une suite de situations où les deux fluides sont purs, séparés à une « échelle » petite (donc appelée ε !).



Notions

- α la fraction volumique de fluide 1 (dépendant de t et x). ($1-\alpha$ est la fraction volumique du fluide 2).
- c la fraction massique du fluide 1 ($1-c$ est celle du fluide 2).
- ρ la densité (volumique de masse) du mélange
- ρ_1 , ρ_2 les densités « vraies » des fluides 1 et 2.

on a

$$\alpha \rho_1 = c \rho$$

$$c = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

$$\alpha = \frac{v_1}{v_1 + v_2}$$

$$\rho_1 = \frac{m_1}{v_1}$$

$$\rho_2 = \frac{m_2}{v_2}$$

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{v_1 + v_2}$$

(« mélange de fluides non miscibles (!) »).

On cherche un modèle qui régitte l'évolution des quantités $\rho_1, \rho_2, \rho, \alpha, c, u, \dots$

L'outil (de modélisation) que nous allons utiliser est donc l'homogénéisation.

On se donne une suite de conditions initiales sur Π

$$\alpha_0^\varepsilon, \rho_{1,0}^\varepsilon, \rho_{2,0}^\varepsilon, u_0^\varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

telle que $\alpha_0^\varepsilon(x)(1 - \alpha_0^\varepsilon(x)) = 0 \quad \forall x$

(les fluides sont purs).

On définit

- ρ_0^ε par $\rho_0^\varepsilon = \alpha_0^\varepsilon \rho_{1,0}^\varepsilon + (1 - \alpha_0^\varepsilon) \rho_{2,0}^\varepsilon$,
- la loi de pression p par
$$p(\alpha, p) = \alpha p_1(p) + (1 - \alpha) p_2(p),$$
- la loi de viscosité μ par
$$\mu(\alpha) = \alpha \mu_1 + (1 - \alpha) \mu_2.$$

L'évolution du fluide est gouvernée par

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0 \\ \partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = 0 \quad (\text{ou } \partial_t c + u \partial_x c = 0 \dots) \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p(\alpha, \rho)) = \partial_x (\mu(\alpha) \partial_x u). \end{cases} \quad \begin{array}{l} c = \alpha \text{ à ce stade!} \\ t > 0 \\ \alpha \in \mathbb{T} \end{array}$$

L'égalité $\alpha(1-\alpha) = 0$ est préservée par ce système.

On peut le remplacer par

$$\begin{cases} \partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = 0 \\ \partial_t \rho_1 + \partial_x \rho_1 u = 0 \\ \partial_t \rho_1 u + \partial_x (\rho_1 u^2 + p_1(\rho_1)) = \mu_1 \partial_x u \\ \partial_t \rho_2 + \partial_x \rho_2 u = 0 \\ \partial_t \rho_2 u + \partial_x (\rho_2 u^2 + p_2(\rho_2)) = \mu_2 \partial_x u \\ \underline{u \text{ continue et } \sigma = \mu \partial_x u - p \text{ continue aux interfaces}} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{dans le} \\ \text{domaine où } \alpha = 1 \\ \\ \\ \text{dans le} \\ \text{domaine où } \alpha = 0 \end{array}$$

On a supposé qu'il n'y avait pas de tension de surface.

Quelques hypothèses techniques :

$$\bullet \quad 0 < r \leq \beta_{1,0}^E, \beta_{2,0}^E \leq R < +\infty \quad \forall E, \text{ p.p.}(\Omega)$$

$$\bullet \quad \int_{\Pi} G(\alpha_0^E, \beta_0^E) \leq M$$

$$\text{où } G(\alpha, \beta) = \int_0^\beta \frac{p(\alpha, s)}{s^2} ds$$

(solutions d'énergies finies, à la Hoff-Desjardins).

Théorème 1 Le problème de Cauchy associé au système
mésoscopique admet une unique solution globale en temps

positif . $\alpha^E, \beta^E \in C^0(\mathbb{R}_+, L^p(\Pi)) \quad \forall p < +\infty,$

$$u^E \in L^\infty(\mathbb{R}_+, H^1(\Pi)),$$

$$\alpha^E(t, \cdot) (1 - \alpha^E(t, \cdot)) = 0 \quad \text{p.p.}(\Omega), \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

La démonstration utilise très fortement des outils développés

par Hoff, Desjardins, et Hillairet et Bresch pour des données oscillantes. (10)

Maintenant on fait tendre ε vers 0 et on suppose que

$$\begin{array}{ccc}
 \alpha_0^\varepsilon & \xrightarrow{L^0 \text{ b. } * } & \alpha_0 \\
 \beta_{1,0}^\varepsilon & \xrightarrow{L^1} & \beta_{1,0} \\
 \beta_{2,0}^\varepsilon & \xrightarrow{L^2} & \beta_{2,0} \\
 u_0^\varepsilon & \xrightarrow{H^1} & u_0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} \alpha_0^\varepsilon & \xrightarrow{L^0 \text{ b. } * } & \alpha_0 \\ \beta_{1,0}^\varepsilon & \xrightarrow{L^1} & \beta_{1,0} \\ \beta_{2,0}^\varepsilon & \xrightarrow{L^2} & \beta_{2,0} \end{array}} \right\} \text{ avec des bornes uniformes dans } L^\infty.$$

Les questions que l'on se pose sont :

- les quantités α^ε , β^ε , u^ε convergent-elles ?
- pour quelle topologie ?
- est-il possible de trouver un système d'EDP caractérisant ces limites ?

(...)

Théorème 2

$$\begin{aligned} \alpha^E, \rho^E &\xrightarrow{L^\infty} \alpha, \rho \\ \beta_1^E, \beta_2^E &\xrightarrow{C^0(\mathbb{R}_+, L^1(\mathbb{T}^1))} \beta_1, \beta_2 \\ u^E &\longrightarrow u \end{aligned}$$

et ces limites sont les uniques solutions du problème de Cauchy associé à

Systeme macroscopique

$$\partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0$$

$$\partial_t c \rho + \partial_x c \rho u = 0$$

$$\partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p_{\text{eff}}) = \partial_x (\mu_{\text{eff}} \partial_x u)$$

$$\partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha \mu_2 + (1-\alpha) \mu_1} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\alpha \mu_2 + (1-\alpha) \mu_1}$$

$$p_{\text{eff}} = \frac{(1-\alpha) \mu_1 p(0, \rho_2) + \alpha \mu_2 p(1, \rho_1)}{\alpha \mu_2 + (1-\alpha) \mu_1}$$

$$c \rho = \alpha \rho_1 \quad \text{et} \quad (1-c) \rho = (1-\alpha) \rho_2$$

Pour simplifier choisissons $\mu_1 = \mu_2 > 0$.

On a $\bullet \mu_{\text{eff}} = \mu$

$\bullet P_{\text{eff}} = \alpha P_1(p_1) + (1-\alpha) P_2(p_2)$ (loi de Dalton)

$\bullet \partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\mu} (P_1(p_1) - P_2(p_2))$

↑
terme étrange venu d'ailleurs.

C'est un système de type **Bace - Nunziato** barotrope.

L'équation $\partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\mu} (P_1 - P_2)$

peut être remplacée par

$\partial_t p_1 + \partial_x p_1 u = - \frac{(1-\alpha)}{\mu} p_1 (P_1 - P_2)$

qui est moins classique mais plus robuste

car supporte les cas où $\alpha(1-\alpha) = 0$.

Ceci permet par ailleurs d'obtenir une équation d'évolution de $p_1 - p_2$:

$$\begin{aligned} \partial_t (p_1 - p_2) + u \partial_x (p_1 - p_2) + (\beta_1 p_1'(\beta_1) - \beta_2 p_2'(\beta_2)) \partial_x u \\ = - \frac{(1-\alpha) \beta_1 p_1'(\beta_1) + \alpha \beta_2 p_2'(\beta_2)}{\mu} (p_1 - p_2). \end{aligned}$$

Le terme de droite est un terme de relaxation.

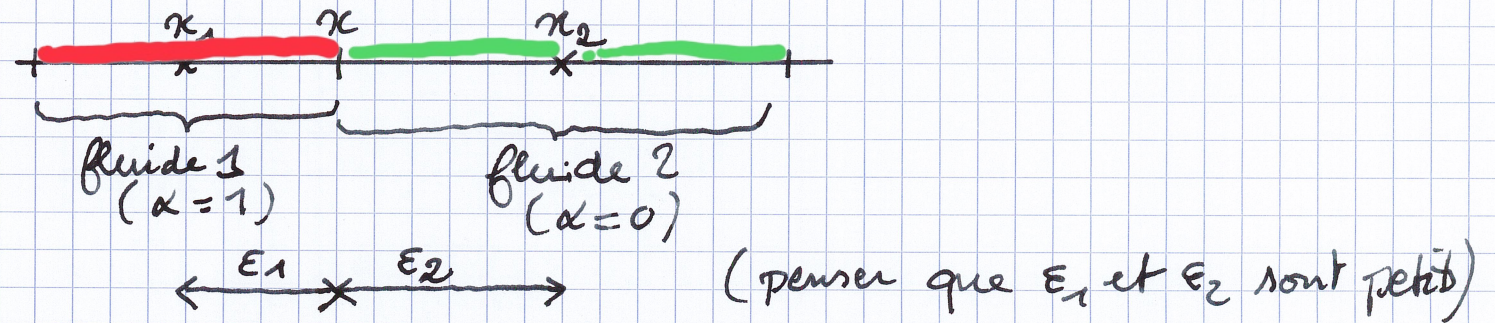
Il permet d'espérer qu'à la limite non visqueuse on ait $p_1(\beta_1) = p_2(\beta_2)$ (fermeture algébrique):

le modèle non visqueux pourrait donc s'écrire

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0 \\ \partial_t c \rho + \partial_x c \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p) = 0 \\ p = p_1(\beta_1) = p_2(\beta_2) \\ \frac{c \rho}{\rho_1} + \frac{(1-c) \rho}{\rho_2} = 1 \quad (\text{i.e. } \alpha + (1-\alpha) = 1). \end{array} \right. \quad \text{cf. Buntea, Cih-Banat, Tan, M3AS}$$

systeme
eulerien
hydro

Moyen heuristique de comprendre l'équation $\partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\mu} (p_1 - p_2)$:



En x on écrit que $\alpha \sim \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$. Ceci va permettre

d'évaluer $D_t \alpha = \partial_t \alpha + u \partial_x \alpha$. En effet

$$D_t (\epsilon_1 + \epsilon_2) \sim u(x_2) - u(x_1)$$

u est continu!

et $D_t \epsilon_1 \sim u(x) - u(x_1)$, d'où

$$D_t \alpha \sim \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2) D_t \epsilon_1 - \epsilon_1 D_t (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}$$

$$\sim \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2)(u(x) - u(x_1)) - \epsilon_1(u(x_2) - u(x_1))}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}$$

Hypothèse pour continuer: σ est continu

(3^{ème} PFD, mais c'est aussi une des propriétés fondamentales que nous démontrons) (15)

$$\text{Alors } p_1 - \mu \frac{u(x_1) - u(x)}{\varepsilon_1} \sim p_2 - \mu \frac{u(x_2) - u(x)}{\varepsilon_2},$$

ce qui donne

$$p_1 - p_2 \sim \mu \frac{\varepsilon_2(u(x_2) - u(x_1)) - \varepsilon_1(u(x_2) - u(x))}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$$

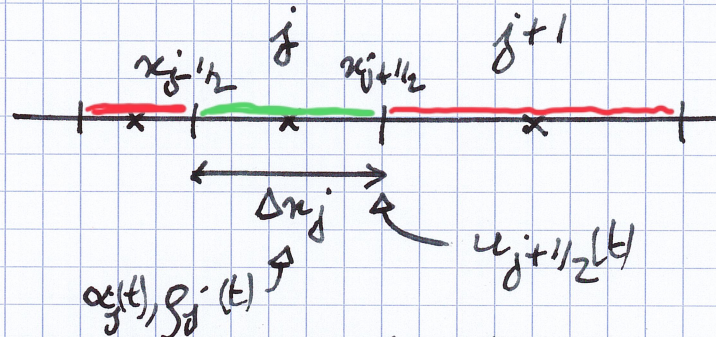
$$\sim \mu \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} D_t \alpha$$

$$\sim \frac{\mu}{\alpha(1-\alpha)} D_t \alpha, \quad \ll \text{CQFD} \gg.$$

La preuve rigoureuse est basée sur l'obtention d'estimations uniformes pour les énergies de Hoff, de la compacité sur $\sigma E, \dots$ Et comme outil les mesures d'Young.

Une autre analyse de convergence : l'analyse d'un schéma semi-discret (discret en espace) pour le système mésoscopique.

Il s'agit d'un schéma pseudo-lagrangien : le maillage se déplace à la vitesse « du fluide ».



Le schéma, continu en temps, s'écrit

schéma mésoscopique

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_{j+1/2} = u_{j+1/2} \\ \dot{\alpha}_j = 0 \quad (\text{avec } \alpha_j(0)(1-\alpha_j(0)) = 0) \\ \dot{\rho}_j \Delta x_j = 0 \\ \rho_{j+1/2} \Delta x_{j+1/2} \dot{u}_{j+1/2} + P_{j+1} - P_j = \mu_{j+1} \frac{u_{j+3/2} - u_{j+1/2}}{\Delta x_{j+1}} - \mu_j \frac{u_{j+1/2} - u_{j-1/2}}{\Delta x_j} \\ \text{avec } P_j = p(\alpha_j, \rho_j), \mu_j = \mu(\alpha_j), \Delta x_{j+1/2} = \frac{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}}{2}, \rho_{j+1/2} = \frac{\rho_j \Delta x_j + \rho_{j+1} \Delta x_{j+1}}{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}} \end{array} \right. \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, J. \quad (17)$$

Pourquoi un schéma pseudo-lagrangien ?

Parce qu'il permet d'éviter la diffusion numérique qui aurait pour effet de mélanger les 2 fluides alors que nous voulons simuler le modèle mésoscopique.

Une alternative serait un schéma eulérien classique mais avec une longueur caractéristique de mailles tendant vers 0 beaucoup plus vite que ϵ (taille caractéristique des zones pures) : ici on a $\Delta x = \epsilon$, ce qui est moins coûteux.

Théorème 3 Tout problème de Cauchy associé au schéma semi-discret mésoscopique admet une unique solution globale en temps positif.

C'est une conséquence, assez facile à montrer, du théorème de Cauchy-Lipschitz.

On te donne une suite de données initiales

$$\alpha^J(0), \beta^J(0), \beta_1^J(0), \beta_2^J(0), u^J(0).$$

Sous les mêmes hypothèses que pour le système continu mésoscopique, la suite de solutions semi-diskretes $\alpha^J(t), \beta^J(t), \beta_1^J(t), \beta_2^J(t), u^J(t)$ converge vers une solution du système mésoscopique...

On peut aussi s'amuser à discrétiser en temps le système semi-diskret

(en fait c'était le but premier).

La version totalement implicite est très proche de schémas de Karper ou Terbin-Keriji-Latché qui sont convergents (19) pour des données non oscillantes (cf. Gonin-Joubert pour le cas oscillant)

Nous préférons une version où seul l'opérateur de diffusion (linéaire) est implicite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{j+1/2}^m \Delta x_{j+1/2}^m u_{j+1/2}^{m+1} = \rho_{j+1/2}^m \Delta x_{j+1/2}^m u_{j+1/2}^m - \Delta t (P_{j+1}^m - P_j^m) \\ \quad + \Delta t \left(\mu_{j+1} \frac{u_{j+3/2}^{m+1} - u_{j+1/2}^{m+1}}{\Delta x_{j+1}^m} - \mu_j \frac{u_{j+1/2}^{m+1} - u_{j-1/2}^{m+1}}{\Delta x_j^m} \right) \\ x_{j+1/2}^{m+1} = x_{j+1/2}^m + \Delta t u_{j+1/2}^{m+1} \\ \rho_j^{m+1} = \rho_j^m \frac{\Delta x_j^m}{\Delta x_j^{m+1}} \end{array} \right. \quad \text{pour } j=1, \dots, J$$

Ce schéma a l'air d'avoir de bonnes propriétés ...

Il est facile de modifier ce schéma pour approcher (?) la solution macroscopique. La seule nouveauté est la discrétisation de $\partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\mu} (P_1 - P_2)$

(écrite ici pour simplifier uniquement)
dans le cas $\mu_1 = \mu_2 = \mu$

Nous proposons

$$\alpha_j^{m+1} = \alpha_j^m + \Delta t \frac{\alpha_j^m (1 - \alpha_j^m)}{\mu} \left(P_1(\beta_{1,j}^m) - P_2(\beta_{2,j}^m) \right).$$

Comparons...

Quelques animations, quelques comparaisons précises,
ordre de convergence (expérimental).

Perspectives (pour les fluides barotropes)

- ⊙ analyse numérique du schéma totalement discret
- ⊙ analyse asymptotique $\mu_i \rightarrow 0 \quad \forall i$
- ⊙ capillarité ?
- ...
- ⊙ dimension supérieure ?

Considérons maintenant des fluides dont la pression dépend de l'énergie interne (ou de la température) aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_n \rho u = 0 \\ \partial_t \rho u + \partial_n (\rho u^2 + p(\rho, e)) = \mu \partial_{nn} u \\ \partial_t \rho E + \partial_n (\rho E u + p(\rho, e) u) = \partial_n (\mu u \partial_n u) + \kappa \partial_{nn} e \\ E = \frac{u^2}{2} + e \quad (e = c_v \theta) \end{array} \right.$$

« Exemple » de loi de pression : celle des gaz parfaits,

$$p(\rho, e) = (\gamma - 1) \rho e \quad (\gamma > 1).$$

Si l'on fait la même analyse que pour le cas barotrope,

avec $\kappa > 0$ on obtient des estimations uniformes en ε pour

e , ce qui conduit à la limite à $\theta_1 = \theta_2$ (cf. Hillairet).

On lit dans certains articles que dans certains cas $\kappa \ll \mu$.

Nous considérons $\kappa = 0$...

La théorie de l'existence et de l'unicité pour un seul fluide est récente : cf. J. Li, 2020.

Nous avons généralisé les résultats de Li au cas où $p = p(\alpha, \beta, \varepsilon)$ et $\mu = \mu(\alpha)$ et obtenu des estimations semblables pour des données oscillantes :

c'est un travail en cours (Bresch, Burtea, Gonin-Joubert).

Les résultats sont similaires à ceux des théorèmes 1 et 2 :

existence et unicité globale en temps positif, pour tout

ε , et convergence de la suite de solutions lorsque

$\varepsilon \rightarrow 0$ si c'est le cas pour la suite de données

initiales.

La limite est solution de

$$\partial_t f + \partial_x f u = 0$$

$$\partial_t c f + \partial_x c f u = 0$$

$$\partial_t g u + \partial_x (g u^2 + p_{\text{eff}}) = \partial_x (\mu_{\text{eff}} \partial_x u)$$

$$\partial_t \alpha + u \partial_x \alpha = - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha \mu_2 + (1-\alpha) \mu_1} (\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$(\sigma_i = \mu_i \partial_x u - p_i(p_i))$$

$$\mu_{\text{eff}} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\alpha \mu_2 + (1-\alpha) \mu_1}$$

$$p_{\text{eff}} = \frac{(1-\alpha) \mu_1 p(0, f_2, e_2) + \alpha \mu_2 p_1(1, f_1, e_1)}{\alpha \mu_2 + (1-\alpha) \mu_1}$$

$$c f = \alpha f_1 \quad \text{et} \quad (1-c) f = (1-\alpha) f_2$$

$$\partial_t \alpha f_1 e_1 + \partial_x \alpha f_1 e_1 u = - \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha \mu_2 + (1-\alpha) \mu_1} \sigma (\sigma_1 - \sigma_2) + \alpha \sigma \partial_x u$$

$$\sigma = \mu_{\text{eff}} \partial_x u - p_{\text{eff}}$$

Et, formellement, que peut-il se passer lorsque $\mu_1, \mu_2 \rightarrow 0$?

Pour simplifier considérons $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

On s'attend, comme dans le cas barotrope, à avoir

$$P_1(p_1) = P_2(p_2) \text{ à la limite (fermeture algébrique).}$$

Il manque une relation pour fermer le système.

Peut-on l'obtenir en utilisant l'équation d'évolution de

$$\alpha p_1 \rho_1 ? \text{ Définissons } s_1 = c_{v1} \ln \theta_1 - (\gamma_1 - 1) \ln p_1 :$$

C'est l'entropie du fluide 1. On a

$$\theta_1 \dot{s}_1 = \theta_1 D_t s_1 = c_{v1} \dot{\theta}_1 - \frac{(\gamma_1 - 1) \theta_1 p_1}{p_1^2} \dot{p}_1 = \dot{e}_1 + P_1 \left(\frac{1}{p_1} \right)$$

$(\theta ds = de + p d\tau \dots)$

et en combinant les équations d'évolution de e_1, p_1, e_2, p_2

$$\text{on aboutit à } \alpha p_1 \theta_1 \dot{s}_1 - (1 - \alpha) p_2 \theta_2 \dot{s}_2 = (2\alpha - 1) \mu (2u)^2 + 4\alpha(1 - \alpha)(p_1 - p_2) 2u u + \frac{\alpha(1 - \alpha)(1 - 2\alpha)(p_1 - p_2)^2}{\mu}$$

On s'attend donc, pour des solutions régulières même à la limite, à

$$\alpha \rho_1 \theta_1 \dot{s}_1 = (1-\alpha) \rho_2 \theta_2 \dot{s}_2,$$

soit encore $c \theta_1 \dot{s}_1 = (1-c) \theta_2 \dot{s}_2 \dots$

$$\theta_1 \dot{s}_1 = \theta_2 \dot{s}_2$$

Perspectives

- Obtenir la limite $\kappa \rightarrow 0$,
- Justifier rigoureusement la limite $\mu \rightarrow 0$, pour les solutions régulières au moins.
- Comprendre ce qui se passe dans les chocs
- Généraliser à d'autres lois d'état (Van der Waals?)
- Mettre de la tension de surface?
- Faire de l'homogénéisation pour des milieux granulaires?