Stabilité des écoulements cisaillés pour les équations d'Euler hydrostatiques avec densité stratifiée

I Introduction / Motivation

1 Les équations

Equations d'Euler incompressible

$$(E)\quad \begin{cases} \partial_t \rho + \nabla_3 \cdot (\rho U_3) = 0 \\ \rho(\partial_t U_3 + (U_3 \cdot \nabla_3) U_3) + \nabla_3 P + \rho g e_3 = 0 \qquad (g=1) \\ \nabla_3 \cdot U_3 = 0 \\ \text{conditions au bord} \quad \text{(fond imperméable, toit rigide/surface libre)} \end{cases}$$

Rq: Pas de force de Coriolis

Pas de viscosité (turbulente) ou de diffusivités (turbulente)

Pas de bord horizontal (continent): $\Omega = \mathbb{R}^2 \times (-H, 0)$ ou $\mathbb{R}^2 \times (-H, \zeta(t,x))$

+ tard : termes de diffusivité effectifs modélisant les tourbillons à l'échelle mésoscopique (!)

$\Rightarrow$ réflexions de nature théorique : comprendre le système modèle avec
- gravité
- variations de densité
- hypothèse hydrostatique

Equation d'Euler hydrostatique

$U_3 = (U, w)$ $\qquad$ "$\partial_t w + U_3 \cdot \nabla w \ll 1$"

$$(H)\quad \begin{cases} \partial_t \rho + U \cdot \nabla_x \rho + w \partial_z \rho = 0 \\ \rho(\partial_t U + (U \cdot \nabla_x) U + w \partial_z U) + \nabla_x P = 0 \\ \partial_z P = -\rho g \qquad \longrightarrow \quad P(\cdot,z) = P_{atm} + \int_z^{surf} g\rho(\cdot, z')\,dz' \\ \nabla_x \cdot U + \partial_z w = 0 \qquad \longrightarrow \quad w(\cdot, z) = \int_{fond}^{z} -\nabla_x \cdot U(\cdot, z')\,dz' \\ \text{Conditions au bord} \end{cases}$$

Rq: • Equations en (ρ, U) (et la surface)

• Equations locales selon la variable x (décomposition de domaine)

• Coeur des équations primitives pour la modélisation des écoulements océaniques

2 Ecoulements stratifiés

Si $(\rho, u) \equiv (\underline{\rho}(z), \underline{u}(z))$

$(P, w) \equiv \left(\int^{surf} g\underline{\rho}(z')dz', \underset{fond}{0}\right)$

Alors (ρ, u, P, w) est une solution de (H) (et de (E))

Qn : Ces ~~équilibres~~ / solutions particulières sont-elles stables ?

3 Stabilité

Différentes notions.

- Caractère bien posé du problème de Cauchy

$$\forall V_0 \in X, \quad \exists!\, V \in C([0,T^*); X) \text{ solution de } (H)$$

et $\Phi : X \to C([0,T^*); X)$ est continue
$\quad V_0 \mapsto V$

Rk : $\Rightarrow \quad \Phi : X \to C([0,T]; Y)$ est Lipschitzienne

$$\| \Phi(V_1) - \Phi(V_2) \|_{L^\infty_T Y} \leq K(T, \|V_1\|_X, \|V_2\|_X)\, \|V_1 - V_2\|_X$$

- Fonctionnelle de Lyapunov associée à l'équilibre $\underline{V}$

$$\exists\, F_{\underline{V}} : Z \to \mathbb{R}^+ \text{ telle que } \underset{F_{\underline{V}}(\underline{V}) = 0}{} \forall V \in C([0,T); Z) \text{ proche de } \underline{V}$$

$t \mapsto F_{\underline{V}}(V(t))$ est décroissante

Rk : si $F_{\underline{V}}(V(t,\cdot)) \geq \|\underline{V} - V\|_X$, ~~alors~~ LWP, alors GWP et stabilité ~~asymptotique~~ en temps

- Stabilité spectrale

Le problème linéarisé autour de $\underline{V}$ s'écrit $\partial_t V + L_{\underline{V}}(\nabla_x) V = 0$

$\forall k \in \mathbb{R}^d, \quad Sp(L_{\underline{V}}(ik)) \subset i\mathbb{R}$

Rk : . $\lambda \in Sp(L_{\underline{V}}(ik)) \Rightarrow -\bar{\lambda} \in Sp(L_{\underline{V}}(ik))$: problème hyperbolique

. ~~Si $\mathrm{Re}(\lambda)$~~ ~~sinon~~ $\lambda \in L_{\underline{V}}(ik) \Leftrightarrow \alpha\lambda \in L_{\underline{V}}(i\alpha k) \Rightarrow$ mode exponentiellement croissant $\underset{\mathrm{Re}(\lambda) > 0}{}$ $|V| \alpha e^{\alpha \mathrm{Re}(\lambda) t}$

II Systèmes de Saint-Venant multi-couches

1 Une couche

$$
(SV_1) \quad \begin{cases} \partial_t H + \nabla_x \cdot (HU) = 0 \\ \partial_t U + (U \cdot \nabla_x) U + g \nabla H = 0 \end{cases}
$$

Rq / Prop: Les solutions de (SV_1) produisent des solutions <u>exactes</u> de (H)

$$
\rho \equiv 1 \qquad v(t,x,z) = U(t,x)
$$

$$
P(t,x,z) = P_{atm} + \int_z^H g\rho \, dz' = g(H-z)
$$

$$
\left(w(t,x,z) = \int_0^z -\nabla_x \cdot v = -z \nabla_x \cdot U \right)
$$

Th: Soit $s \geq s_0 > 1 + \frac{d}{2}$. [Soit $h_0 > 0$ et $M_0 > 0$. Il existe $C, T > 0$ tels que]

Pour tout $(H_0, U_0) \in C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{1+d})$ tels que $H_0 - 1, U_0 \in H^s(\mathbb{R}^d)$ et

$$
\left[\|(H_0 - 1, U_0)\|_{H^{s_0}} \leq M_0 \quad \text{et} \quad \inf_{\mathbb{R}^d} H_0 \geq h_0 \quad (*) \right]
$$

il existe une unique $(\underbrace{V}_{=(H-1,U)} \in C^0([0,T_*); H^s(\mathbb{R}^d)^{1+d})$ solution classique de $\begin{cases} (SV_1) \\ V|_{t=0} = (H_0 - 1, U_0) \end{cases}$

De plus :

- $(*) \Rightarrow T_* \geq T/M_0$ et $\forall t \in [0, T/M_0]$, $\|(H-1,U)\|_{H^s} \leq C \|(H_0-1,U_0)\|_{H^s}$
- $T_* < \infty \Rightarrow \|(\nabla H, \nabla U)\|_{L^\infty} \xrightarrow[t \to T_*]{} +\infty$ (persistence de la régularité : T_* ne dépend pas de s)
- $\left(V_0 \mapsto T_*, \ \phi : \begin{matrix} H^s & \to & C^0([0,T_*); H^s) \\ V_0 & \mapsto & V \end{matrix} \right)$ est (semi-continue inférieurement, continue)

Rq:

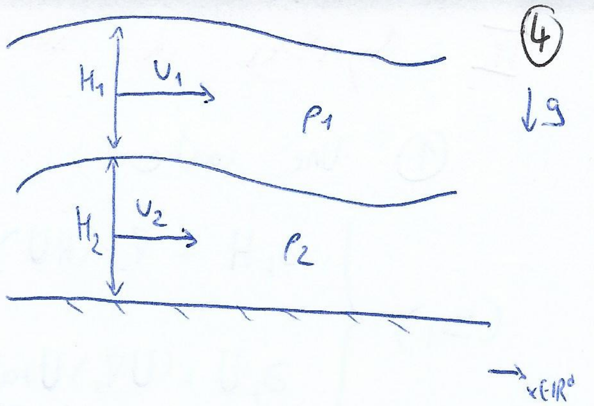
- $H_0 \geq h_0 > 0$ est un critère d'hyperbolicité (stricte)

  Les valeurs propres du symbole $\begin{pmatrix} (ik \cdot u) & H ik^T \\ g ik & \begin{matrix} (ik \cdot u) & 0 \\ 0 & (ik \cdot u) \end{matrix} \end{pmatrix}$ sont $ik \cdot u$ et $ik \cdot u \pm i\sqrt{gH}|k|$

  $ik \cdot u$: matérielle rotationnelle $(d=2)$; $ik \cdot u \pm i\sqrt{gH}|k|$: onde

- Si $d = 1$, diagonalisation en invariants de Riemann $\rightsquigarrow$ catastrophe de gradient est générique.

2 Deux couches



$$(SV_2)\quad \begin{cases} \partial_t H_1 + \nabla\cdot(H_1 U_1) = 0 \\ \partial_t H_2 + \nabla\cdot(H_2 U_2) = 0 \\ \rho_1(\partial_t U_1 + (U_1\cdot\nabla)U_1) + g\rho_1\nabla H_1 + g\rho_1 \nabla H_2 = 0 \\ \rho_2(\partial_t U_2 + (U_2\cdot\nabla)U_2) + g\rho_1\nabla H_1 + g\rho_2\nabla H_2 = 0 \end{cases}$$

Rq: • Paramètres sans dimension : $\gamma = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ et $\delta = \frac{H_{1,eq}}{H_{2,eq}}$

• Equilibres non triviaux : $(\underline{H}_1, \underline{H}_2, \underline{U}_1, \underline{U}_2) \in \mathbb{R}^{2+2d}$ avec $\underline{U}_2 \neq \underline{U}_1$

(• Les équations ne s'écrivent plus sous forme conservative si $d=2$

Le symétriseur associé à (SV_2) est un symétriseur symbolique et non de Friedrichs)

Th (Ovsjannikov '79)
Barros & Choi '08, Virissimo & Milewski '20

Soit $0<\rho_1<\rho_2$

$(H_1, H_2, U_1, U_2) \in \mathbb{R}^2_* \times \mathbb{R}^{2d}$ est dans le domaine d'hyperbolicité de (SV_2)

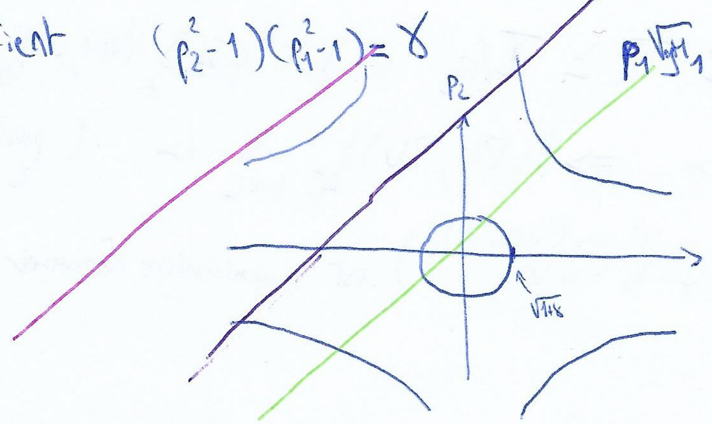
si et seulement si
$$\begin{cases} (1)\quad \frac{|U_2-U_1|}{\sqrt{gH_2}} < F_r^- \\ \text{ou} \\ (2)\quad \frac{|U_2-U_1|}{\sqrt{gH_2}} > F_r^+ \end{cases}$$

où $0 < F_r^- < F_r^+$ ~~dépendant~~ dépendent uniquement et de manière régulière de $\frac{H_1}{H_2}$, $\frac{\rho_1}{\rho_2}$.

D// $d=1$ (cd), $\lambda \in \mathbb{R}$ est une racine réelle du polynôme caractéristique ssi $\rho_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{U_1-\lambda}{\sqrt{gH_1}}$ et $\rho_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{U_2-\lambda}{\sqrt{gH_2}}$

vérifient $(\rho_2^2-1)(\rho_1^2-1) = \gamma$

$\rho_1\sqrt{gH_1} - \rho_2\sqrt{gH_2} = U_1 - U_2$



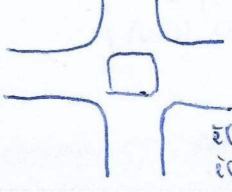
pente $\sqrt{\frac{H_1}{H_2}}$

intercept $\frac{U_2-U_1}{\sqrt{gH_2}}$

$\square$

$d=2$: invariance par rotation $\rightsquigarrow i U_1\cdot\xi,\ i U_2\cdot\xi,\ i\lambda_p|\xi|$ $\quad p\in\{1,2,3,4\}$

Rq: • Dans le cas (1) on distingue clairement le mode barotrope et le mode barocline



• $\gamma \ll 1$

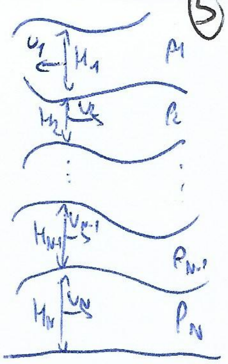
$F_{r+} \times F_{r-} = 1$

écoulement torrentiel (sur-critique, $F_r>1$)
écoulement fluvial (sous-critique, $F_r<1$)

$\gamma \approx 1$

à la limite $\gamma \to 1$
(2) n'existe plus
$\to$ toit rigide [Brash-Renardy '41]

3 Multi-couches



$$(SV_N)\quad \begin{cases} \partial_t H_i + \nabla\cdot(H_i U_i) = 0 & (i\in\{1,\dots,N\}), \\ \rho_i(\partial_t U_i + (U_i\cdot\nabla U_i)) + \cancel{g\sum_{j=1}^{N}\rho_{\min(i,j)}\nabla H_j} = 0 & (i\in\{1,\dots,N\}). \end{cases}$$

$$g\sum_{j=1}^{i}\rho_j\nabla H_j + g\rho_i\sum_{j=i+1}^{N}\nabla H_j$$

Th ([Benton '54, Barbus '88, Duchêne '13]) Soit $0<\rho_1<\rho_2<\dots<\rho_N$.

$V_0 = (H_1,\dots,H_N,U_1,\dots,U_N)\in(\mathbb{R}_+^*)^N\times\{0\}^N$ est dans le domaine de (stricte) hyperbolicité.

Les valeurs propres associées sont $(d=1)$ $\pm i\mu_j^{-1/2}|k|$ où $0<\mu_1<\dots<\mu_N$

$(d=2)$ $\pm i\mu_j^{-1/2}|k|$ et 0 de multiplicité N

Le vecteur propre associé à μ_j possède $j-1$ changements de signe.

Dém $(d=1)$

$$L_{V_0}(ik) = \begin{pmatrix} 0 & H \\ \Gamma & 0 \end{pmatrix} ik$$

où $H = \mathrm{Diag}(H_1,\dots,H_N)$ $\quad \Gamma = \mathrm{Diag}(\rho_1,\dots,\rho_N)^{-1}\,S^t\Delta S$

où $S = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} \rho_1 & & & 0 \\ & \rho_2-\rho_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \rho_N-\rho_{N-1} \end{pmatrix}$

$$L_{V_0}(ik)\begin{pmatrix} V_H \\ V_U \end{pmatrix} = (ik)\lambda\begin{pmatrix} V_H \\ V_U \end{pmatrix} \iff \begin{cases} HV_U = \lambda V_H \\ \Gamma V_H = \lambda V_U \end{cases} \iff \begin{cases} \dots \\ H\Gamma V_H = \lambda^2 V_H \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dots \\ (H\Gamma)^{-1}V_H = \underbrace{\lambda^{-2}}_{\mu} V_H \end{cases}$$

$$(H\Gamma)^{-1} = \underbrace{S^{-1}\Delta^{-1}(S^{-1})^t}_{\text{Matrice de Jacobi}}\ \mathrm{Diag}(\rho_1/H_1,\dots,\rho_N/H_N)$$

Matrice de Jacobi (tridiagonale, non-réduite, symétrique)

Problème de Sturm-Liouville discret $\rightsquigarrow$ $0<\mu_1<\dots<\mu_N$ + oscillations [Simon '05] $\square$

Rq: Par invariance galiléenne, $(H_1,\dots,H_N,U,\dots,U)$ est strictement hyperbolique

Par perturbation, le domaine de stricte hyperbolicité est ouvert

$\forall N\in\mathbb{N}^*$, $\forall (H_1,\dots,H_N)\in(\mathbb{R}_+^*)^N$ et $\rho_1<\dots<\rho_N$, $\exists\,\delta_N>0$ tq $(\forall j,\ |U_j-U_{j+1}|<\delta_N) \Rightarrow$ $(H_1,\dots,H_N,U_1,\dots,U_N)$ strictement hyperbolique.

$\Rightarrow$ Caractère localement bien posé. $\boxed{N\to+\infty\ ?}$

III Cadre continument stratifié

On cherche à répondre à la question de Laure St Raymond (2011) : $N \to \infty$?

① Système limite

Lorsque $N \to \infty$, on a formellement

$$i/N \longrightarrow r \in [0,1]$$

$$\rho_i \longrightarrow \varrho(r)$$

$$N H_i(t,x) \longrightarrow h(t,x,r)$$

$$U_i(t,x) \longrightarrow \mathbf{v}(t,x,r)$$

Vérifiant les équations

$$(SV_\infty) \begin{cases} \partial_t h + \mathbf{v}\cdot\nabla_x h + h\nabla_x\cdot\mathbf{v} = 0, \\ \varrho(\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla_x)\mathbf{v}) + g\Big(\underbrace{\int_0^r \varrho(r')\nabla_x h(\cdot,r')\,dr' + \varrho(r)\int_r^1 \nabla_x h(\cdot,r')\,dr'}_{= \varrho(0)\int_0^1 \nabla_x h(\cdot,r')dr' + \int_0^r \varrho'(r')\int_{r'}^1 \nabla_x h(\cdot,r'')dr''dr'}\Big) = 0. \end{cases}$$

Il s'agit d'une reformulation (en coordonnées isopycnales) des équations d'Euler hydrostatique valide lorsque le fluide est stratifié en densité :

Déf : $\exists\ \eta : (t,x,r) \in I_t \times \mathbb{R}^d \times (0,1) \mapsto \eta(t,x,r) \in \mathbb{R}$ tel que

- $\forall t \in I_t$, $\underset{\text{domaine de fluide}}{\Omega_t} = \{\eta(t,x,r),\ (x,r) \in \mathbb{R}^d \times (0,1)\}$
- $\forall (t,x) \in I_t \times \mathbb{R}^d$, $r \mapsto \eta(t,x,r)$ est strictement monotone (donc bijective) et C^1.
- $\forall r \in (0,1)$ $(t,x) \in I \times \mathbb{R}^d \mapsto \rho(t,x,\eta(t,x,r))$ est constante

On note : $\varrho(r) = \rho(\cdot,\eta(\cdot,r))$, $\mathbf{v}(\cdot,r) = u(\cdot,\eta(\cdot,r))$, $h(\cdot,r) = \pm\partial_r \eta(\cdot,r)$

Après manipulations (règle de la chaîne), (H) avec fond plat imperméable et surface libre

$$\Updownarrow$$

Cf A1 $\qquad (SV_\infty)$

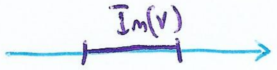
Rq : Le changement de ~~variable~~ isopycnal est semi-lagrangien :
- le domaine de fluide est aplati (tensorisé) : $I_t \times \mathbb{R}^d \times (0,1)$
- les termes de transport selon la variable z sont annihilés.

② Stabilité

$$\begin{pmatrix} \partial_t h \\ \partial_t v \end{pmatrix} + \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} v\cdot\nabla_x & \\ \hline & v\cdot\nabla_x \end{array}\right)\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}}_{\text{advection}} + \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} & h\nabla_x\cdot \\ \hline \frac{1}{\varrho}M\nabla_x & \end{array}\right)\begin{pmatrix} h \\ v \end{pmatrix}}_{\text{ondes}} = 0$$

advection

$Sp = ik\cdot \mathrm{Im}(v)$



ondes

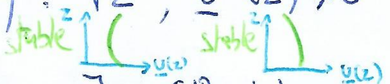
~~de~~ modes de propagation

Etat de l'art (partiel et partial)

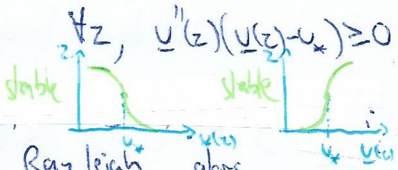
a) Cadre homogène ($d=1$, toit rigide ou périodique) Cf A2a

– Certains résultats connus pour Euler s'étendent directement au cadre hydrostatique (d'autres non : caractère globalement bien posé (2D), inviscid damping, resonant cascades ...)

- Rayleigh's (1880) criterion for the absence of modal instability : $\forall z,\ \underline{u}''(z) \neq 0$



  Fjørtoft's : $\exists u_* \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z,\ \underline{u}''(z)(\underline{u}(z)-u_*) \geq 0$



- Arnold's (60s) stability theorem. Si $\underline{u}$ vérifie le critère de Rayleigh, alors $\underline{u}$ est Lyapunov-stable ; $\exists\ I_{\underline{u}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tq. $I_{\underline{u}}$ est un invariant du flot
  . $I_{\underline{u}}(u,w) \geq \|u-\underline{u}\|^2_{L^2} + \|\partial_z u - \underline{u}'\|^2_{L^2}$ (localement)

- Grenier (1999), Brenier ([illegible]), Masmoudi & Wong (2012). Si $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ et vérifie le critère de Rayleigh, alors il existe une unique solution (classique) définie localement en temps.

– Certains résultats sont spécifiques à Euler hydrostatique

- Renardy (2009). Si $\underline{u} \in L^\infty$, s'annule et $\underline{u}^{-2}$ est intégrable, alors instabilité modale

- Han-Kwan & Nguyen (2016). Si $\underline{u}$ est analytique et analytique, alors il existe une solution u telle que
  $\|\partial_z u_{|t=0} - \underline{u}'\|_{H^s(\mathbb{T}\times(-1,1))} \leq c$ et $\dfrac{\|\partial_z u - \underline{u}'\|_{L^2([0,\varepsilon]\times\Omega)}}{\|\partial_z u_{|t=0} - \underline{u}'\|^{\alpha}_{H^s}} \geq C$ où $\alpha\in[0,1]$

  c est arbitrairement petit
  C ———— grand
  ε ———— petit
  $\mathrm{Vol}(\Omega)$ ———— petit

b) Cadre homogène avec surface libre ($d=1$)

Le système dans les coordonnées Euleriennes est appelé système de Benney (1973)

________ isopycnales a été introduit par Zakharov (1980)

Il peut être mis en relation avec l'équation cinétique de Vlasov-Dirac (FA3

$$\begin{cases} \partial_t h + v\partial_x h + h\partial_x v = 0 \\ \partial_t v + v\partial_x v + g\int_0^1 \partial_x h(\cdot,r')\,dr' = 0 \end{cases}$$

- L'"hyperbolicité" du système a été étudiée par Teshukov (1985), Chesnokov (2013, 2017), Liapidevskii (2000) ... et revisitée récemment par Di Martino, [illegible] Massaurich, Godlewski, Guillod et Sainte-Marie

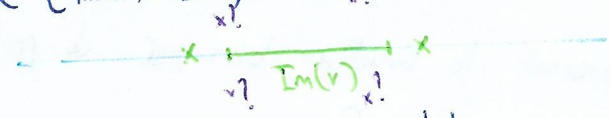
Th: Soit $L := \begin{pmatrix} v & h \\ g\int_0^1 \cdot & v \end{pmatrix} : L^2_r \times L^2_r \to L^2_r \times L^2_r$

(i) Si $v \in C^{0,1/4}$, $h \in C^0$ et $h > 0$, alors

$$\sigma(L) = \underbrace{Im(v)}_{\substack{\text{spectre continu} \\ \text{ou ponctuel si } meas(v^{-1}(c))>0}} \cup \underbrace{\left\{ c \in \mathbb{C} \setminus Im(v) : \int_0^1 \frac{g h(r)}{(c - v(r))^2}\,dr = 1 \right\}}_{\text{spectre ponctuel}}$$

(ii) Si $v \in C^{0,1/2}$ (de plus), il existe exactement deux valeurs propres dans $\mathbb{R} \setminus Im(v)$:

$$C_- \in [\inf(v) - \sqrt{g\textstyle\int h}, \inf(v)) \qquad C_+ \in (\sup(v), \sup(v) + \sqrt{g\textstyle\int h}]$$



(iii) Si $v \in C^2$, $h \in C^1$ et $\forall r$, $v' \neq 0$ $\left(\frac{v'}{h}\right)' \neq 0$ alors $\sigma(L) \subset \mathbb{R}$

($\Leftrightarrow \underline{u}''(z) \neq 0 \ \forall z$) Critère de Rayleigh (FA2b

- $\forall r$, $v' < 0$ et $\left(\frac{v'}{h}\right)'(r - r_*) \leq 0$ alors $\sigma(L) \subset \mathbb{R}$

($\Leftrightarrow \underline{u}'(z) > 0$ et $\underline{u}''(z)(z - z_*) \geq 0$) Critère de Fjørtoft

[Chesnokov, El, Gavrilyuk & Pavlov (2017)]

- Dans le cadre de vitesses monotones ($\partial_r v \neq 0$) l'hyperbolicité implique
  - une diagonalisation en invariants de Riemann
  - le caractère bien posé du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t\left(\frac{\partial_r v}{h}\right) + v\partial_x\left(\frac{\partial_r v}{h}\right) = 0 \\ \partial_t R + v\partial_x R = 0 \\ \partial_t R_\pm + c_\pm \partial_x R_\pm = 0 \end{cases} \qquad R = v - \int_0^1 \frac{h(\cdot,r')}{v(\cdot,r') - v}\,dr' \qquad R_\pm = c_\pm - \int_0^1 \frac{h(\cdot,r')}{v(\cdot,r') - c_\pm}\,dr'$$

[Teshukov (1992)]

Rq: Des résultats de caractère bien posé du système de Benney-Zakharov impliquent des résultats sur le système de Vlasov-Dirac-Benney [Besse (2011)] [Bardos & Besse (2013)] et vice versa ? [Han Kwan & Rousset (2016)]

c) Cadre continûment stratifié ($d=1$) : (SV_∞)

$$\mathcal{M} : L^2_r \to L^2_r$$

$$(\mathcal{M}\eta)(r) = \int_0^r \rho(r')\eta(r')\,dr' + \rho(r)\int_r^1 \eta(r')\,dr'$$

$$\begin{cases} \partial_t h + v\partial_x h + h\partial_x v = 0 \\ \partial_t v + v\partial_x v + \frac{g}{\rho}\mathcal{M}\partial_x h = 0 \end{cases}$$

- Critère de Miles (1961) & Howard (1961) pour l'absence de mode instable CF A2b

$$\forall r \in (0,1) \quad \begin{cases} \rho'(r) > 0 \quad \rho(r) > 0 \\ \frac{1}{4}|\underline{v}'(r)|^2 \leq g\frac{\underline{h}(r)\rho'(r)}{\rho(r)} \end{cases}$$

$$\iff \forall z \in (-H,0) \quad \begin{cases} \underline{\rho}(z) > 0 \quad \underline{\rho}'(z) < 0 \\ \frac{1}{4}|\underline{u}'(z)|^2 \leq g\frac{-\underline{\rho}'(z)}{\underline{\rho}(z)} \end{cases}$$

$$\underline{\rho}(\eta(r)) = \rho(r)$$
$$\underline{u}(\eta(r)) = \underline{v}(r)$$
$$-\eta'(r) = \underline{h}(r)$$

- La méthode d'Arnold pour la construction d'une fonctionnelle de Lyapunov ne fonctionne pas pour (SV_∞) dans le cadre stablement stratifié
  (problème de positivité lié au manque de contrôle des hautes fréquences des perturbations)

  [Arbanel, Holm, Marsden & Ratiu (1986)] [Holm & Long (1989)] [Ripa (1991)]

- Pas de résultat concernant le caractère bien posé du problème de Cauchy dans un cadre à densité variable sauf
  - (i) pour des fonctions analytiques [Kukavica, Temam, Vicol & Ziane (2011)]
  - (ii) en présence de termes régularisant (viscosité, diffusivité) [Azérad & Guillén (2001)] [Cao & Titi (2007)]
  - (iii) en relâchant la contrainte de pression hydrostatique [Desjardins, Lannes & Saut (2019)]

CF A2C

3 Contributions de diffusivité d'épaisseur — Gent & McWilliams (1990)

Introduits par Gent & McWilliams dans le but de modéliser la contribution effective à large échelle des tourbillons à moyenne échelle ($\sim 100\,km$)

cf A4

$$(SV_\infty + GM\,1) \quad \begin{cases} \partial_t h + \nabla_x \cdot \big(h(v+v^*)\big) = 0 \\ \partial_t v + \big((v+v^*)\cdot\nabla_x\big) v + \frac{g}{e} M \nabla_x h = 0 \end{cases} \qquad v^* = -\kappa \frac{\nabla_x h}{h} \qquad \kappa > 0$$

$\rightsquigarrow$ régularisation parabolique de la variable d'épaisseur

$\Rightarrow$ contrôle des termes problématiques liés au cisaillement $\partial_r v$ cf A2c

Rq:

- Ces contributions apparaissent également dans les travaux de Bresch (2004 +) sur Euler (Navier-Stokes) barotrope ($\frac{1}{e} M = Id$)

- Des contributions similaires apparaissent dans Duran, Vila & Baraille (2017) pour la construction de schémas numériques entropiques de (SV_N)

- Si $d=1$, ...

  en posant $u := v - \kappa \frac{\partial_x h}{h}$, on a

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_x (h u) = 0 \\ \partial_t u + u \partial_x u + \frac{g}{e} M \partial_x h = \frac{\kappa}{h} \partial_x (h \partial_x u) \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ si $\frac{g}{e} M = 1$ (pas de dépendance en ϱ), système proposé par Gent (1993) Saint-Venant avec dissipation

$\rightsquigarrow$ BD entropy Bresch & Desjardins (2003, 2004)

$\rightsquigarrow$ Caractère globalement bien posé de Navier-Stokes avec viscosité dégénérée Vasseur & Yu (2016)

Résultats:

[Bianchini & D.] (i) Caractère bien posé de (GM) sur un intervalle de temps $[0, T_\kappa]$ où

$$T_\kappa^{-1} = C\left(1 + \kappa^{-2}\left(|\underline{u}'|^2_{L^2} + M_0^2\right)\right)$$

avec M_0 la déviation initiale de $\underline{h}, \underline{u}$

C dépend de M_0, $\inf h|_{t=0} > 0$, $\varrho, \underline{h}, \underline{u}$

Justification rigoureuse de la limite hydrostatique

[Adim] (ii) Justification rigoureuse de la limite $(SV_N + GM) \longrightarrow (SV_\infty + GM)$ $(N \to \infty)$ sur l'intervalle $[0, T_\kappa]$

[Adim, Bianchini & D.] (iii) Justification rigoureuse de la limite $(SV_\infty + GM) \longrightarrow (SV_N + GM)$ (densité constante par morceaux écoulement colonnaire) sur un intervalle $[0, T]$ où T est indépendant de κ si la solution de $(SV_N + GM)$ existe sur cet intervalle de temps

De Euler hydrostatique (H) au système continument stratifié (SV_∞)

Ripa '81 A1
Holm & Long '89

• $\forall (t,x)$, $\quad \rho(t,x,\eta(t,x,r)) = \varrho(r)$ ① $\qquad\qquad u(t,x,\eta(t,x,r)) = v(t,x,r)$ ②

$\Rightarrow \partial_t \rho + (\partial_z \rho)(\partial_t \eta) = 0$ ①a $\qquad\qquad \Rightarrow \nabla_x \cdot u + (\nabla_x \eta)(\partial_z u) = \nabla_x \cdot v$ ②a

$\nabla_x \rho + (\partial_z \rho)(\nabla_x \eta) = 0$ ①b $\qquad\qquad (\partial_r \eta)(\partial_z u) = \partial_r v$ ②b

$(\partial_z \rho)(\partial_r \eta) = \varrho'(r)$

$$\partial_r \big(w(\cdot,\eta(\cdot))\big) = (\partial_z w)(\partial_r \eta)$$

$$\overset{\nabla_x\cdot u + \partial_z w = 0}{=} \Big(-\nabla_x \cdot v + \frac{\nabla_x \eta}{\partial_r \eta}\partial_r v\Big)(\partial_r \eta)$$

$$= -h \nabla_x \cdot v + (\partial_r v)(\nabla_x \eta) \quad ③$$

(H) $\partial_t \rho + u\cdot\nabla_x \rho + w\partial_z \rho = 0 \quad \underset{①a\ ①b}{\rightsquigarrow} \quad \partial_t \eta + v\cdot\nabla_x \eta - w(\cdot,\eta(\cdot)) = 0$

$$\underset{③}{\overset{\partial_r}{\rightsquigarrow}} \quad \boxed{\partial_t h + v\cdot\nabla_x h + h\nabla_x \cdot v = 0}$$

② $\Rightarrow \quad \partial_t u + (\partial_t \eta)\partial_z u = \partial_t v$

②a $\Rightarrow \quad (u\cdot\nabla_x)u + (u\cdot\nabla_x \eta)\partial_z u = (v\cdot\nabla_x)v$

$$\partial_t v + (v\cdot\nabla_x)v = \partial_t u + (u\cdot\nabla_x)u + \underbrace{(\partial_t \eta + v\cdot\nabla_x \eta)}_{\underset{①}{=} w}\partial_z u \overset{(H)}{=} \frac{1}{\varrho}(\nabla_x P)(\cdot,\eta(\cdot))$$

$$P(\cdot,\eta(\cdot,r)) \overset{(H)}{=} P_{atm} + g\int_{\eta(\cdot,r)}^{\eta(\cdot,0)} \rho(\cdot,z')\,dz' \underset{\rho(\cdot,\eta(\cdot,r'))=\varrho(r')}{\overset{z'=\eta(\cdot,r')}{=}} P_{atm} - \int_0^r \varrho(r')\,\partial_r \eta(\cdot,r')\,dr'$$

$$= P_{atm} + g\int_0^r \varrho(r')\,h(\cdot,r')\,dr' \quad ④$$

④ $\Rightarrow (\partial_z P)(\cdot,\eta(\cdot,r)) = g\varrho(r)\,h(\cdot,r)/\partial_r\eta(\cdot,r) = -g\varrho(r)$

④ $\Rightarrow (\nabla_x P)(\cdot,\eta(\cdot,r)) = g\int_0^r \varrho(r')\nabla_x h(\cdot,r')\,dr' - \nabla_x \eta(\cdot,r)(\partial_z P)(\cdot,\eta(\cdot,r))$

$$\overset{\eta(\cdot,r) = \eta(\cdot,1) + \int_r^1 \nabla_x h(\cdot,r')dr',\ \eta(\cdot,1) = -H}{=} g\int_0^r \varrho(r')\nabla_x h(\cdot,r')\,dr' + g\varrho(r)\int_r^1 \nabla_x h(\cdot,r')\,dr'$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\varrho\big(\partial_t v + (v\cdot\nabla_x)v\big) + \nabla_x \Psi = 0} \qquad \boxed{\nabla_x \Psi = g\int_0^r \varrho(r')\nabla_x h(\cdot,r')\,dr' + g\varrho(r)\int_r^1 \nabla_x h(\cdot,r')\,dr'}$$

Quelques arguments clé autour de la stabilité

- ## Critère de Rayleigh (1880)

Un mode propre du système d'Euler (hydro) homogène linéarisé autour de $(\underline{U}(z),0)$

vérifie $\underbrace{\left((\underline{U}-c_k)w_k' - \underline{U}'w_k\right)'}_{= (\underline{U}-c_k)w_k'' - \underline{U}''w_k} \underbrace{- \mu k^2 (\underline{U}-c_k) w_k}_{\text{Euler}} = 0$ $\quad \left(w(t,x,z) = w_k(z)e^{ik(x-c_kt)} + c.c.\right)$

$w_k|_{z=-1} = w_k|_{z=0} = 0$ (toit rigide)

Tester contre $\dfrac{\overline{w_k}}{\underline{U}-c_k}$ et 1) extraire la partie imaginaire $\rightsquigarrow \operatorname{Im}(c_k)\displaystyle\int \underline{U}''(z)\frac{|w_k|^2}{|\underline{U}(z)-c_k|^2}\,dz = 0$

$\operatorname{Im}(c_k) \neq 0 \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \underline{U}''(z) \text{ change de signe.} \\ \text{ou} \\ \underline{U}''(z) \equiv 0 \quad \text{(Couette)} \end{array}\right.$

2) extraire la partie réelle : $\displaystyle\int \underline{U}''(z)\frac{|w_k|^2}{|\underline{U}(z)-c_k|^2}(\underline{U}(z) - \operatorname{Re}(c_k))\,dz < 0$

$\Rightarrow \forall U_* \in \mathbb{R},\ \displaystyle\int \underline{U}''(z)(\underline{U}(z)-U_*)\frac{|w_k|^2}{|\underline{U}(z)-c_k|}\,dz < 0$

- Critère de Renardy (2009) : $\displaystyle\int_{-1}^{1}(\underline{U}(z)-i\beta)^{-2}\,dz$ est (i) réel si $\underline{U}$ impair, (ii) positif si $\beta \ll 1$, (iii) négatif si $\beta \gg 1$ ($\underline{U}$ mesurable, $\underline{U} \in L^\infty$)

$\Rightarrow \exists \beta_*$ tq $\int_{-1}^{1}(\underline{U}-i\beta_*)^{-2}\,dz = 0 \Rightarrow c_* = i\beta_*$ est une v.p. de fonction propre associée $(\underline{U}-c_*)^{-1}$

- ## Théorème d'Arnold (1965)

On suppose $\underline{U}''(z) \neq 0 \quad \forall z$

$\partial_t \omega + u\partial_x\omega + w\partial_z\omega = 0 \quad$ où $\omega = \mu\partial_x w - \partial_z u$, $\quad \partial_x u + \partial_z w = 0$

$I_{\underline{U}}(\omega) = \displaystyle\iint \frac{u^2+\mu w^2}{2} + \Phi_{\underline{U}}(\omega)\,dx\,dz$ est un invariant pour tout $\Phi_{\underline{U}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\underline{\omega} = -\underline{U}'(z)$ est un point critique de $I_{\underline{U}}$ ssi $\forall u, \displaystyle\iint u\left(\underline{U} - \Phi_{\underline{U}}''(-\underline{U}')\underline{U}''\right)dx\,dz = 0$

De plus, $\delta^2 I_{\underline{U}}(\underline{\omega})(\omega,\omega) = \displaystyle\iint \frac{u^2+\mu w^2}{2} + \Phi_{\underline{U}}''(\underline{\omega})\,\omega^2\,dx\,dz$ et $\Phi_{\underline{U}}''(\underline{\omega}) = \dfrac{\underline{U}}{\underline{U}''} > 0$

(on peut fixer le signe de $\underline{U}$ par invariance Galiléenne)

- ## Théorème de Grenier (1999), Brenier (2003), Masmoudi & Wong (2012)

$\partial_t \omega + u\partial_x\omega + w\partial_z\omega = 0 \quad$ où $\underbrace{\omega = -\partial_z u \text{ et } \partial_x u = -\partial_z w}$

$\dot{\omega} = \Lambda^s\omega \xrightarrow{\Lambda^s = (Id - \partial_x^2)^{s/2}}$ $\quad \partial_t\dot{\omega} + u\partial_x\dot{\omega} + w\partial_z\dot{\omega} + (\partial_z\omega)L\partial_x\dot{\omega} = RHS \Rightarrow w = L\partial_x\omega$ avec $L^* = L$ dans L^2_z

Tester contre $\dfrac{\dot{\omega}}{|\partial_z\omega|} \rightsquigarrow$ contrôle a priori de $\displaystyle\iint \frac{|\dot{\omega}|^2}{|\partial_z\omega|}\,dx\,dz \gtrsim \|\Lambda^s\omega\|^2_{L^2}$

A2b

- <u>Critère de Rayleigh</u> pour le système de Benney / Zakharov [Di Martino, El Hassanieh, Gallewski, Guillot, St Marie]

Un mode propre instable ($c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$) du système linéarisé autour de $(\underline{h}, \underline{v})$

vérifie $F(c) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^1 \frac{g \underline{h}(r)}{(c - \underline{v}(r))^2} \, dr = 1$

si $\underline{v}'(r) \neq 0 \; \forall r$

Or, $F(c) = \int_0^1 \frac{g \underline{h}(r)}{(\partial_r \underline{v})(r)} \partial_r \left(\frac{1}{c - \underline{v}(r)} \right) dr = \left[\frac{g\underline{h}}{\underline{v}'} \frac{1}{c - \underline{v}} \right]_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{g\underline{h}}{\underline{v}'} \right)' \frac{1}{c - \underline{v}} \, dr$

$$= \left[\frac{g\underline{h}}{\underline{v}'} \frac{\bar{c} - \underline{v}}{|c - \underline{v}|^2} \right]_0^1 - \underbrace{\int_0^1 \left(\frac{g\underline{h}}{\underline{v}'} \right)' \frac{\bar{c} - \underline{v}}{|c - \underline{v}|^2} \, dr}_{= (\bar{c} - v_*) \int_0^1 \left(\frac{g\underline{h}}{\underline{v}'} \right)' \frac{1}{|c - \underline{v}|^2} dr}$$

avec $v_* \in \mathrm{Im}(\underline{v})$ car $\left(\frac{g\underline{h}}{\underline{v}'} \right)' \neq 0 \; \forall r$

$\mathrm{Im}(F(c)) = 0 \Rightarrow F(c) = \left[\frac{g\underline{h}}{\underline{v}'} \times \frac{v_* - \underline{v}}{|c - \underline{v}|^2} \right]_0^1$

≤ 0 car $\begin{cases} v(0) \leq v_* \leq v(1) & \text{si } \underline{v}' \geq 0 \\ v(0) \geq v_* \geq v(1) & \text{si } \underline{v}' \leq 0 \end{cases}$

↯

- <u>Critère de Miles & Howard</u> pour (SV_∞) [Chumakova, Menzaque, Milewski, Rosales, Tabak, Turner (2000)]

Un mode propre du système (SV_∞) linéarisé autour de $(\underline{h}, \underline{v})$

vérifie $(\underline{v} - c)^2 \partial_r \left(\frac{\partial_r \psi}{\varrho' \varrho} \right) = g \frac{\underline{h}}{\varrho} \psi$ où $\psi = \int_0^r \varrho(r') h(r') dr' + \varrho(r) \int_r^1 h(r') dr'$

vérifie $\partial_r \psi_{|r=1} = 0$ et $\partial_r \psi_{|r=0} = \frac{\varrho'(0)}{\varrho(0)} \psi_{|r=0}$

Supposons $\mathrm{Im}(c) \neq 0$

En posant $\phi = \frac{\psi}{(\underline{v} - c)^{1/2}} \varrho^{-1}$, on a

$$((\underline{v} - c)\phi')' + \frac{1}{2} \underline{v}'' \phi + \frac{\frac{\underline{h}\varrho'}{\varrho} - \frac{1}{4}(\underline{v}')^2}{\underline{v} - c} \phi = 0$$

$\partial_\varrho \phi_{|\varrho = \varrho_1} = 0$

$\partial_\varrho \phi_{|\varrho = \varrho_0} = \frac{1}{\varrho(0)} \phi_{|r=0} - \frac{1}{2} \frac{1}{\underline{v}(0) - c} \phi_{|r=0}$

En testant contre $\bar{\phi}$ il suit

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} -(\underline{v} - c)|\phi'|^2 \, d\varrho - (\underline{v}(0) - c) \frac{1}{\varrho(0)} |\phi(0)|^2 + \frac{1}{2\varrho(0)} |\phi(0)|^2 + \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{1}{2} \underline{v}'' |\phi|^2 + \frac{\frac{\underline{h}\varrho'}{\varrho} - \frac{1}{4}(\underline{v}')^2}{\underline{v} - c} |\phi|^2 \, d\varrho = 0$$

En prenant la partie imaginaire, il suit ($\mathrm{Im}(c) \neq 0$)

$$\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} |\phi'|^2 d\varrho + \frac{1}{\varrho(0)} |\phi(0)|^2 = \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} \frac{\frac{1}{4}(\underline{v}')^2 - \frac{\underline{h}\varrho'}{\varrho}}{|\underline{v} - c|^2} |\phi|^2 \, d\varrho$$

L'identité est impossible à vérifier si $\forall \varrho \in (\varrho_0, \varrho_1)$, $\frac{1}{4}(\underline{v}')^2(\varrho) \leq \frac{\underline{h}(r) \varrho'(r)}{\varrho(r)}$

(en utilisant $\frac{\varrho'(0)}{\varrho(0)} \geq 0$)

Echec de la méthode d'énergie pour les fluides stratifiés

Coordonnées Euleriennes

$$\begin{cases} \partial_t \rho + u\cdot\nabla_x \rho + w\partial_z \rho = 0 \\ \partial_t u + (u\cdot\nabla_x)u + w\partial_z u + \frac{1}{\rho}\nabla_x P = 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} w(\cdot,z) = \int_{\text{fond}}^{z} -\nabla_x\cdot u(\cdot,z')\,dz' \\ P(\cdot,z) = g\int_z^{\text{surf}} \rho(\cdot,z')\,dz' \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \dot\rho = \Lambda^s\rho \\ \dot u = \Lambda^s u \\ \Lambda^s = (\mathrm{Id}-\Delta_x)^{s/2} \end{array} \rightsquigarrow \begin{cases} \partial_t\dot\rho + u\cdot\nabla_x\dot\rho + w\partial_z\dot\rho \boxed{-(\partial_z\rho)\int_{\text{fond}}^{z}\nabla_x\cdot\dot u(\cdot,z')dz'} = RHS \\ \partial_t\dot u + (u\cdot\nabla_x)\dot u + w\partial_z\dot u \boxed{-(\partial_z u)\int_{\text{fond}}^{z}\nabla_x\cdot\dot u(\cdot,z')dz'} + \boxed{\frac{g}{\rho}\int_z^{\text{surf}}\nabla_x\rho(\cdot,z')dz'} = RHS \end{cases}$$

En utilisant que $\left(\int_z^{\text{surf}}\cdot\right)^* = \int_{\text{fond}}^{z}\cdot$ pour $(\ ,\ )_{L^2_{x,z}}$,

les termes en vert peuvent être "symmetrisés" si $\frac{g}{\rho}>0$, $-\partial_z\rho>0$
(stratification stable)

Le terme en violet ne possède pas de structure évidente si $\partial_z u \not\equiv 0$

Coordonnées isopycnales

$$\begin{cases} \partial_t h + v\cdot\nabla_x h + h\nabla_x\cdot v = 0 \\ \partial_t v + (v\cdot\nabla_x)v + \frac{g}{\varrho}\mathcal{M}\nabla_x h = 0 \end{cases}$$

où $\mathcal{M}(f)(r) = \varrho(0)\int_0^1 f(r')dr' + \int_0^r \varrho'(r')\int_{r'}^1 f(r'')dr''\,dr'$
$= (\mathcal{L}_0^*\mathcal{L}_0 f)(r) + (\mathcal{L}_1^*\mathcal{L}_1 f)(r)$

où $\mathcal{L}_0 f(r) = \varrho(0)^{1/2}\int_0^1 f(r')dr'$

$\mathcal{L}_1 f(r) = \varrho'(r)^{1/2}\int_r^1 f(r')dr'$

$$\begin{array}{l} \dot h = \Lambda^s h \\ \dot v = \Lambda^s v \\ \Lambda^s = (\mathrm{Id}-\Delta_x)^{s/2} \end{array} \rightsquigarrow \begin{cases} \partial_t\dot h + \boxed{v\cdot\nabla_x\dot h} + \boxed{h\nabla_x\cdot\dot v} = RHS \\ \partial_t\dot v + v\cdot\nabla_x\dot v + \boxed{\frac{g}{\varrho}\mathcal{M}\nabla_x\dot h} = RHS \end{cases}$$

Puisque l'opérateur $\mathcal{M}$ est défini positif dans $L^2_{x,r}$, ~~si~~ $\varrho'(r)>0$
(stratification stable)

les termes en vert peuvent être "symmetrisés" en appliquant $g\mathcal{M}$ à la première équation
ϱ à la seconde équation

Le terme en violet n'est plus symmétrique car $[\mathcal{L}_0, v\cdot\nabla_x]\neq 0$, $[\mathcal{L}_1, v\cdot\nabla_x]\neq 0$
si $\partial_r v\not\equiv 0$

L'équation de Vlasov - Dirac - Benney

- Soit (h,u) solution de l'équation d'Euler homogène hydrostatique à surface libre (Benney) en coordonnées isopycnales Zakharov '80

$$(B)\begin{cases} \partial_t h + \nabla_x\cdot(hu) = 0 \\ \partial_t u + (u\cdot\nabla_x)u + \int_0^1 \nabla h(\cdot,r')\,dr' = 0 \end{cases}$$

Alors $f : (t,x,v) \longmapsto \int_0^1 h(t,x,r)\,\delta(v-u(t,x,r))\,dr \qquad (*)$

vérifie l'équation de Vlasov-Dirac :

$$(V\text{-}D) \quad \partial_t f + v\cdot\nabla_x f - E\cdot\nabla_v f = 0 \qquad E = \nabla_x\left(\int f(t,x,v)\,dv\right)$$

La réciproque est vraie mais la décomposition $(*)$ n'est pas unique en général.
Si $r \mapsto u(t,x,r)$ est monotone, alors $f(t,x,u(t,x,r)) = \dfrac{h(t,x,r)}{\partial_r u(t,x,r)}$.

- Si $f(t,x,v) = \sum_{i=1}^N h_i(t,x)\,\delta(v-u_i(t,x))$ vérifie (V-D), alors

$$(SV_N)\begin{cases} \partial_t h_i + \nabla_x\cdot(h_i u_i) = 0 & (1\le i\le N) \\ \partial_t u_i + (u_i\cdot\nabla_x)u_i + \sum_{i=1}^N \nabla h_i = 0 & (1\le i\le N) \end{cases}$$

Th (Han Kwan & Rousset '16) : Caractère localement bien posé de (V-D) pour des données initiales suffisamment régulières et vérifiant la condition de Penrose :

$\exists c_0>0$ t.q. $\forall x\in\mathbb{R}^d$, $\forall(\gamma,\tau,\eta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d-\{0\}$, $\left|1-(2\pi)^d\int_0^{+\infty} e^{-(\gamma+i\tau)s}\,\dfrac{i\eta}{1+|\eta|^2}\cdot\left(\underbrace{\mathcal{F}_v}_{\text{Fourier}}\nabla_v f(x,\cdot)\right)(\eta s)\,ds\right| \ge c_0$

Rq:
- Si f vérifie la condition $(u_*-v)\partial_v f \ge 0$ (profil "une bosse") alors f vérifie la condition de Penrose
- Dans le cadre où $f(t,x,u(t,x,r)) = \dfrac{h(t,x,r)}{\partial_r u(t,x,r)}$ avec $r\mapsto u(t,x,r)$ strictement croissante,

$$(u_*-v)\partial_v f \ge 0 \iff \frac{1}{|\partial_r u|}(u_*-u)\,\partial_r\left(\frac{h}{\partial_r u}\right) \ge 0 \iff \text{condition de Fjørtoft}$$

Contributions de diffusivité dans les variables Eulériennes

La paramétrisation des effets macroscopiques de tourbillons de moyenne échelle non résolus proposée par Redi (1982) et Gent & Mc Williams (1990) se lit dans les variables Eulériennes

$$\partial_t C + U_3 \cdot \nabla_3 C = \nabla_3 \cdot (K_R \nabla_3 C) + \nabla_3 \cdot (K_{GM} \nabla_3 C)$$

où C est un traceur (salinité, température) et

$$K_R = \frac{k_I}{1+|L|^2} \begin{pmatrix} 1+L_y^2 & -L_x L_y & L_x \\ -L_x L_y & 1+L_x^2 & L_y \\ L_x & L_y & |L|^2 \end{pmatrix} + \frac{k_D}{1+|L|^2} \begin{pmatrix} L_x^2 & L_x L_y & -L_x \\ L_x L_y & L_y^2 & -L_y \\ -L_x & -L_y & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } 0 \leq k_D \ll k_I$$

$$K_{GM} = k \begin{pmatrix} 0 & 0 & -L_x \\ & & -L_y \\ L_x & L_y & 0 \end{pmatrix} \qquad k>0 \qquad L = (L_x, L_y) = \frac{-\nabla_x \rho}{\partial_z \rho}$$

Rq: K_R est symétrique, défini positif. K_{GM} est anti-symétrique.

On a les identités remarquables suivantes :

$$\nabla_3 \cdot (K_R \nabla_3 \rho) = k_D \Delta_3 \rho$$

$$\nabla_3 \cdot (K_{GM} \nabla_3 \rho) = U_3^* \cdot \nabla_3 \rho \quad \text{où } U_3^* = \left(k\, \partial_z \left(\frac{\nabla_x \rho}{\partial_z \rho}\right), -k \nabla_x \cdot \left(\frac{\nabla_x \rho}{\partial_z \rho}\right)\right)$$

est la vitesse "bolus"

La paramétrisation de Redi - Gent & McWilliams appliquée à la variable ρ se lit donc

$$\partial_t \rho + (U_3 + U_3^*) \cdot \nabla_3 \rho = k_D \Delta_3 \rho$$

Rq: Dans les variables isopycnales, U_3^* devient $\left(-k \frac{\nabla_x h}{h}, -k h \nabla_x \cdot \frac{\nabla_x l}{h}\right) = (v^*, w^*)$