Asymptotiques quasi-géostrophiques pour un système de Navier-Stokes stratifié et tournant

Frédéric Charve

LAMA - UPEC

GT MathsInFluids Lyon (25 juin 2021)

Plan

Présentation des modèles

- Fluide géophysique
- Rotation de la Terre et stratification verticale de la densité.
- Echelles, nombres de Rossby et Froude.
- Petits paramètres $Ro = \varepsilon$, $Fr = \varepsilon F$ $(F > 0)$

Equations primitives

- $U_\varepsilon(t,x) = (v_\varepsilon, \theta_\varepsilon) = (v_\varepsilon^1, v_\varepsilon^2, v_\varepsilon^3, \theta_\varepsilon)$,
- Vitesse: $v_\varepsilon(t,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$,
- température potentielle scalaire: $\theta_\varepsilon(t,x)$,
- Géopotentiel: $\phi_\varepsilon(t,x)$.

Equations primitives

(PE_ε), généralise le syst. des fluides tournants

$$\begin{cases} \partial_t U_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla U_\varepsilon - LU_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{A}U_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(-\nabla\Phi_\varepsilon, 0), \\ \mathrm{div}\ v_\varepsilon = 0, \\ U_{\varepsilon|t=0} = U_{0,\varepsilon}. \end{cases} \qquad (PE_\varepsilon)$$

$$LU_\varepsilon \overset{\text{def}}{=} (\nu\Delta v_\varepsilon, \nu'\Delta\theta_\varepsilon), \quad \mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F^{-1} \\ 0 & 0 & -F^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarques

- Les termes $\mathcal{A}U_\varepsilon$ et $(\nabla\Phi_\varepsilon, 0)$ sont dits pénalisés.
- Equilibre géostrophique.
- $\mathcal{A}$ antisymétrique, méthodes d'énergie, Leray et Fujita-Kato s'adaptent dans les espaces ($s \in \mathbb{R},\ T \in]0,\infty]$)

$$\begin{cases} \dot{E}^s_T = \mathcal{C}([0,T], \dot{H}^s) \cap L^2([0,T], \dot{H}^{s+1}), \\ \|f\|^2_{\dot{E}^s_T} \overset{def}{=} \|f\|^2_{L^\infty_T \dot{H}^s} + \min(\nu,\nu')\|f(\tau)\|^2_{L^2_T \dot{H}^{s+1}}. \end{cases}$$

L'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ correspond à la norme $\|f\|_{\dot{H}^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$.

Solutions faibles et fortes

Théorème (J. Leray, 1933)

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, si $U_{0,\varepsilon} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ alors il existe une solution de Leray $U_\varepsilon \in \dot{E}^0_\infty$ (+ énergie).

Question de l'unicité ($d \geq 3$). Scaling du système, $\dot{H}^{\frac{d}{2}-1}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème (H. Fujita et T. Kato, 1963)

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, si $U_{0,\varepsilon} \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, alors il existe un unique temps maximal $T^*_\varepsilon > 0$ et une unique sol $U_\varepsilon \in \dot{E}^{\frac{1}{2}}_T$ $(\forall T < T^*_\varepsilon)$.

- Solution locale à données quelconques,
- Solution globale à données petites,
- Unicité fort-faible et critères d'explosion.

Asymptotiques

Question :

Si on suppose que la suite des données initiales $(U_{0,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ converge vers un $\widetilde{U}_0$, peut-on déterminer le comportement des solutions en forte rotation et stratification ($\varepsilon \to 0$) ?

Approche formelle: si l'on suppose que $U_\varepsilon \to \widetilde{U}$ et $\Phi_\varepsilon \to \widetilde{\Phi}$ lorsque $\varepsilon \to 0$, on est naturellement amené à introduire le tourbillon potentiel:

$$\widetilde{\Omega} \stackrel{def}{=} \partial_1 \widetilde{U}^2 - \partial_2 \widetilde{U}^1 - F\partial_3 \widetilde{U}^4 = \partial_1 \widetilde{v}^2 - \partial_2 \widetilde{v}^1 - F\partial_3 \widetilde{\theta},$$

qui vérifie le système suivant:

Système quasi-géostrophique

$$\begin{cases} \partial_t\widetilde{\Omega} + \widetilde{v}.\nabla\widetilde{\Omega} - \Gamma\widetilde{\Omega} = 0 \\ \widetilde{U} = (\widetilde{v}, \widetilde{\theta}) = (-\partial_2, \partial_1, 0, -F\partial_3)\Delta_F^{-1}\widetilde{\Omega}, \end{cases} \qquad \text{(QG)}$$

avec

$$\begin{cases} \Gamma \overset{def}{=} \Delta\Delta_F^{-1}(\nu\partial_1^2 + \nu\partial_2^2 + \nu' F^2\partial_3^2), \\ \Delta_F \overset{def}{=} \partial_1^2 + \partial_2^2 + F^2\partial_3^2, \\ \widetilde{\Omega} \overset{def}{=} \partial_1\widetilde{U}^2 - \partial_2\widetilde{U}^1 - F\partial_3\widetilde{U}^4, \end{cases}$$

- Couplage entre une équation de transport diffusion et une loi d'inversion de type Biot-Savart.
- L'opérateur Γ est un opérateur non-local, non radial nettement plus intriqué qu'un Laplacien anisotrope comme Δ_F (sauf si $\nu = \nu'$ ou $F = 1$).

Système quasi-géostrophique 2D (surfacique):

$$\begin{cases} \partial_t\theta + v\cdot\nabla\theta + |D|^\alpha\theta = 0, \\ \theta_{|t=0} = \theta^0, \end{cases} \qquad (2DQG)$$

Avec v déterminée par:

$$v = (-\partial_2|D|^{-1}, \partial_1|D|^{-1})\theta = (-R_2, R_1)\theta.$$

Voir aussi un autre modèle quasi-géostrophique (Fanelli, De Anna):

$$\partial_t(r - \Delta r) + \nabla^\perp r\cdot\nabla\Delta r + \nu\Delta^2 r = 0.$$

L'opérateur Γ

Décomposition de Γ: parties purement locale et non-locale

$$\Gamma = \Gamma_L + (\nu - \nu')F^2(1-F^2)\Lambda^2,$$

avec:

$$\begin{cases} \Gamma_L = \nu\partial_1^2 + \nu\partial_2^2 + \left((1-F^2)\nu + F^2\nu'\right)\partial_3^2, \\ \Lambda = \partial_3^2(-\Delta_F)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases} \tag{1}$$

$$\Lambda f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y|\geq\varepsilon} K(y)\big(f(x-y)-f(x)\big)dy, \tag{2}$$

$$\text{avec noyau } K(y) = -\frac{2C}{F^3}\frac{y_1^2+y_2^2-\frac{3}{F^2}y_3^2}{\left(y_1^2+y_2^2+\frac{1}{F^2}y_3^2\right)^3}. \tag{3}$$

Retour aux équations primitives:

On définit le tourbillon potentiel $\Omega(U)$ d'un champ de vecteurs (à valeurs dans $\mathbb{R}^4$) $U = (v, \theta)$ par:

$$\Omega(U) \stackrel{def}{=} \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1 - F\partial_3\theta,$$

puis les parties quasi-géostrophique et oscillante de U:

$$U_{QG} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \\ 0 \\ -F\partial_3 \end{pmatrix} \Delta_F^{-1}\Omega(U), \quad \text{et } U_{osc} \stackrel{def}{=} U - U_{QG}. \tag{4}$$

Remarque

On introduit ainsi deux opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ tels que $U_{osc} = \mathcal{P}(U)$ et $U_{QG} = \mathcal{Q}(U)$.

1. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0,
2. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, $(\mathcal{P}(U)|\mathcal{Q}(U))_{\dot{H}^s/H^s} = (\mathcal{A}U|\mathcal{P}(U))_{\dot{H}^s/H^s} = 0$,
3. Si $\mathbb{P}$ est le projecteur de Leray, $\mathbb{P}\mathcal{P} = \mathcal{P}\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathbb{P} = \mathcal{Q}$.
4. $\mathcal{P}(U) = U \iff \mathcal{Q}(U) = 0 \iff \Omega(U) = 0$. Un tel champ est dit *oscillant*.
5. $\mathcal{Q}(U) = U \iff \mathcal{P}(U) = 0 \iff$ il existe une fonction scalaire Φ telle que $U = (-\partial_2, \partial_1, 0, -F\partial_3)\Phi$. Un tel champ de vecteurs est dit *quasi-géostrophique* (QG) et est de plus à divergence nulle.
6. Si $U = (v, \theta)$ est un champ de vecteurs quasi-géostrophique, alors $v \cdot \nabla\Omega(U) = \Omega(v \cdot \nabla U)$.
7. Si U est un champ de vecteurs quasi-géostrophique, alors $\Gamma U = \mathcal{Q}LU$ (cas général: $\Gamma\mathcal{Q}U = \mathcal{Q}LU$).

Le système limite peut se reformuler selon:

Système quasi-géostrophique

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{U}_{QG} + \mathcal{Q}(\widetilde{v}_{QG}.\nabla \widetilde{U}_{QG}) - \Gamma \widetilde{U}_{QG} = 0, \\ \widetilde{U}_{QG} = \mathcal{Q}(\widetilde{U}_{QG}), \\ \widetilde{U}_{QG|t=0} = \widetilde{U}_{0,QG}, \end{cases} \qquad (QG)$$

ou encore

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{U}_{QG} + \widetilde{v}_{QG}.\nabla \widetilde{U}_{QG} - L\widetilde{U}_{QG} = \mathcal{P}\Psi, \\ \mathcal{P}\widetilde{U}_{QG} = 0, \\ \widetilde{U}_{QG|t=0} = \widetilde{U}_{0,QG}, \end{cases} \qquad (QG)$$

Les théorèmes de Leray et Fujita-Kato s'appliquent et on prouve même que dès que $\widetilde{U}_{0,QG} \in H^1$ (inhomogène), il existe une unique solution globale dans $\dot{E}^0_\infty \cap \dot{E}^1_\infty$ (pas de terme de stretching).

Propagation de la régularité et PS dans L^2 sur l'équation en Ω ou (Pour tout F):

$$\|U_\varepsilon\|^2_{\dot{H}^1_F} \overset{def}{=} -(\Delta_F U_\varepsilon | U_\varepsilon)_{L^2}.$$

Utilisation du fait que pour toute fonction f à valeur dans $\mathbb{R}^4$,

$$(f|U_{\varepsilon,QG})_{\dot{H}^1_F} = -(f| \begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \\ 0 \\ -F\partial_3 \end{pmatrix} \Omega_\varepsilon)_{L^2} = (\Omega(f)|\Omega_\varepsilon)_{L^2},$$

et de: $v \cdot \nabla\Omega(U) = \Omega(v \cdot \nabla U)$

Parties QG et oscillante

Revenant à (PE_ε), on introduit $\Omega_\varepsilon = \Omega(U_\varepsilon)$, $U_{\varepsilon,QG} = \mathcal{Q}(U_\varepsilon)$ et $U_{\varepsilon,osc} = \mathcal{P}(U_\varepsilon) = U_\varepsilon - \mathcal{P}(U_\varepsilon)$, alors ces termes vérifient:

Equation sur le tourbillon potentiel

$$\partial_t \Omega_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla \Omega_\varepsilon - \Gamma \Omega_\varepsilon = (\nu - \nu') F \Delta \partial_3 \theta_{\varepsilon,osc} + \nabla U_{\varepsilon,osc} \cdot \nabla U_\varepsilon, \quad (5)$$

Equation sur la partie oscillante

$$\partial_t U_{\varepsilon,osc} - (L - \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P} \mathcal{A}) U_{\varepsilon,osc} = G_\varepsilon. \quad (6)$$

G_ε: somme de 3 termes bilinéaires et 1 terme linéaire (non locaux).
$-(L - \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}) = \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}(\mathcal{A} - \varepsilon L)$: perturbation d'un opérateur antisymétrique par un petit opérateur symétrique.

Première approche: données bien préparées

Données initiales proches de la structure du système limite ((QG) pour (PE_ε) et (NS-2D) pour RF_ε).

- J.-L. Lions, R. Temam, S. Wang ('92, '94),
- T. Beale, A. Bourgeois ('94),
- P. Embid, A. Majda ('96, '98),
- E. Grenier ('97)
- J.-Y. Chemin (F=1, $\nu \sim \nu'$) ('97),
- B. Desjardins, E. Grenier ('98),
- I. Gallagher ('98),
- D. Iftimie (F=1, $\nu = \nu' = 0$) ('99)
- A. Babin, A. Mahalov, B. Nicolaenko ('96, '99, '01).

Approche alternative

Une autre approche dans le cas dispersif ($F \neq 1$), initiée par les travaux de J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, E. Grenier ('00, '01) consiste à tirer parti de phénomènes dispersifs pour le système linéaire ($\mathbb{P}$ projecteur de Leray):

$$\partial_t W_\varepsilon - (L - \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A})W_\varepsilon = F_\varepsilon.$$

En Fourier, le système homogène associé est de la forme:

Système homogène

$$\partial_t \widehat{W_\varepsilon} = \mathbb{B}(\xi, \varepsilon)\widehat{W_\varepsilon}.$$

où:

$$\mathbb{B}(\xi,\varepsilon) = \widehat{L - \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}}$$

$$= \begin{pmatrix} -\nu|\xi|^2 + \dfrac{\xi_1\xi_2}{\varepsilon|\xi|^2} & \dfrac{\xi_2^2+\xi_3^2}{\varepsilon|\xi|^2} & 0 & \dfrac{\xi_1\xi_3}{\varepsilon F|\xi|^2} \\ -\dfrac{\xi_1^2+\xi_3^2}{\varepsilon|\xi|^2} & -\nu|\xi|^2 - \dfrac{\xi_1\xi_2}{\varepsilon|\xi|^2} & 0 & \dfrac{\xi_2\xi_3}{\varepsilon F|\xi|^2} \\ \dfrac{\xi_2\xi_3}{\varepsilon|\xi|^2} & -\dfrac{\xi_1\xi_3}{\varepsilon|\xi|^2} & -\nu|\xi|^2 & -\dfrac{\xi_1^2+\xi_2^2}{\varepsilon F|\xi|^2} \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\varepsilon F} & -\nu'|\xi|^2 \end{pmatrix}.$$

Linéarisé

Troncature en fréquence sur $\mathcal{C}_{r,R}$, étude de la matrice $\mathbb{B}(\xi,\varepsilon)$: si $\xi \in \mathcal{C}_{r,R}$ et ε proche de zéro, quatre valeurs propres distinctes: μ_0, μ, λ et $\overline{\lambda}$ (on note $|\xi|_F^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + F^2\xi_3^2$):

$$\mu_0(\xi) = -\nu|\xi|^2 \quad \text{(n'interviendra pas)}$$

$$\mu(\xi,\varepsilon) = -(\nu\xi_1^2 + \nu\xi_2^2 + \nu' F^2\xi_3^2)\frac{|\xi|^2}{|\xi|_F^2} + reste$$

$$\lambda(\xi,\varepsilon) = -\tau(\xi)|\xi|^2 + i\frac{|\xi|_F}{\varepsilon F|\xi|} + reste \quad \text{cas } F = 1$$

Notons les projecteurs $\mathbb{P}_{i,\varepsilon} = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{P}_i(\xi,\varepsilon))$ $(i = 2, 3, 4)$

Estimations de Strichartz:

Supposons que $W_\varepsilon = (v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$ *est solution sur* $[0, T[$ *du système:*

$$\begin{cases} \partial_t W_\varepsilon - (L - \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A})W_\varepsilon = F_\varepsilon \\ W_{\varepsilon/t=0} = W_0 \in L^2(\mathbb{R}^3) \end{cases} \tag{7}$$

Supposons que W_0 *et* F_ε *sont à div et* Ω *nuls, et que* $supp\widehat{W_0} \cup supp\widehat{F_\varepsilon}(t) \subset \mathcal{C}_{r,R}$.
Alors dans certaines normes, les deux dernières projections de W_ε *sont petites: il existe une constante* $C = C_{r,R,F}$ *telle que*

pour tout $i = 3$ ou 4:

$$\|\mathbb{P}_{i,\varepsilon} W_\varepsilon\|_{L^4([0,T[,L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{4}} \Big(\|\mathbb{P}_{i,\varepsilon} W_0\|_{L^2} + \|\mathbb{P}_{i,\varepsilon} F_\varepsilon\|_{L^1_T L^2(\mathbb{R}^3))} \Big)$$

Approche dispersive: données mal préparées pour RF_ε

- J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, and E. Grenier ('00, '02, '02 (Ekman),'06),
- A. Dutrifoy ('05),
- V.-S. Ngo ($\nu \to 0$) ('09),
- M. Hieber, Y. Shibata ('10),
- T. Iwabuchi, R. Takada ('15, '13, '14),
- Y. Koh, S. Lee, R. Takada (Littman) ('14)

Voir aussi:

- M. Paicu ('04, '05),
- I. Gallagher, L. Saint Raymond ('06, '06),
- I. Gallagher ('08)

Approche dispersive: données mal préparées

Pour PE_ε

- A. Dutrifoy ('04),
- FC ('05, '04, '06, '08, '16, '18, '18, '20),
- FC, V.-S. Ngo ('11),
- H. Koba, A. Mahalov, T. Yoneda ($\nu = \nu'$, '12),
- T. Iwabuchi, A. Mahalov, R. Takada ($\nu = \nu'$, '17),
- S. Scrobogna ($\mathbb{T}^3$, '18),

Approche dispersive: données mal préparées

Pour le système fortement stratifié (Boussinesq)

- S. Lee, R. Takada ($\nu = \nu'$, '17),
- V.-S. Ngo, S. Scrobogna ('17),
- S. Scrobogna ('17, '20),
- K. Widmayer ('18),

Voir aussi:

- R. Danchin et M. Paicu ('08, '08, '09 et '11)
- H. Houamed, M. Zerguine ('20) et P. Dreyfus, H. Houamed ('21)

Voir aussi

Système RF_ε compressible, inhomogène/capillaire, Oseen

- E. Feireisl, I. Gallagher, D. Gérard-Varet, A. Novotny ('12),
- E. Feireisl, I. Gallagher, A. Novotny ('12),
- E. Feireisl, A. Novotny ('14),
- F. Fanelli ('16),
- F. Fanelli, I. Gallagher ('19),
- R. Goh, C.-E. Wayne (Oseen $\nu = \nu'$, '19)

Boussinesq, Equatorial shallow water, résultats "Fourier-Besov"

- A. Dutrifoy, A. Majda ('07)
- A. Dutrifoy, A. Majda, S. Schochet ('09),
- V. Angulo-Castillo, L. Ferreira ('19, '20),
- A. Abassi, C. Allalou, Y. Oulha ('21),

Cas particulier

Cas $F = 1$: pas de dispersion

- Cas visqueux J.-Y. Chemin ('97, $\nu \sim \nu'$), FC ('18)
- Cas non-visqueux: D. Iftimie ('99).

Méthodes très différentes:

- Données bien préparées.
- On reformule le système et on estime $\partial_t U_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathcal{A}U_{\varepsilon,osc}$ et $\partial_t U_\varepsilon$.
- La quantité qui contrôle T_ε^* est $\int_0^T \|U_{\varepsilon,osc}(t)\|_{\dot{H}^{\frac{3}{2}}}^2 dt$.

Asymptotiques

Données fixes, Asymptotiques sans petitesse des données (FC '04)

Si $U_{0,\varepsilon} = U_{0,QG} + U_{0,osc}$, avec $U_{0,QG} \in H^1$ et $U_{0,osc} \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}$, alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tous $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, U_ε est globale et converge vers l'unique solution globale de (QG) avec donnée $U_{0,QG}$.

- Solutions faibles,
- Solutions fortes (+ partie osc en $|\ln|\ln\varepsilon||$ ($|\ln\varepsilon|$ si $\nu = \nu'$) vitesse de convergence en $|\ln\varepsilon|$ (ou ε).
- Poches de tourbillons régularisées ($\nu = \nu'$ puis cas général avec étude de Γ, partie osc en $\varepsilon^{-\alpha}$)
- Partie QG initiale moins régulière (interpolation réelle: méthode Calderon, I. Gallagher et F. Planchon)
- Viscosités tendant vers zéro (en ε^α).

Iwabuchi-Mahalov-Takada ('17) ont obtenu l'existence globale de solutions mild pour $U_{0,QG} \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}$ et $\|U_{0,osc}\| \in \dot{H}^s$ avec:

- $\|U_{0,QG}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})}\|U_{0,osc}\|_{\dot{H}^s} \leq \eta \quad (\frac{1}{2} < s \leq \frac{5}{8})$,
- ou $\|U_{0,QG}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \eta \quad (s = \frac{1}{2})$.

On va généraliser nos résultats pour une suite $(U_{0,\varepsilon})_{\varepsilon>0}$ de données initiales:

1. ne convergeant pas, mal préparées ($\|U_{\varepsilon,osc}\|$ en $\varepsilon^{-\gamma}$),
2. partie QG moins régulière ($U_{0,\varepsilon,QG}$ converge).
3. Asymptotiques et vitesse de CV, pas d'hyp. de petitesse.

Théorème (FC '20 PAA, FC '20 Preprint)

Pour tous $\mathbb{C}_0 > 0$, $\delta \in]0, \frac{1}{4}[$, $\alpha_0 > 0$, il existe $\varepsilon_0, \eta, \mathbb{B}_0, \kappa, \beta > 0$ (dépendant de $F, \nu, \nu', \mathbb{C}_0, \alpha_0$) telles que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et toute donnée initiale à divergence nulle $U_{0,\varepsilon} = U_{0,\varepsilon,QG} + U_{0,\varepsilon,osc}$ satisfaisant:

1. $U_{0,\varepsilon,QG}$ converge vers $\widetilde{U}_{0,QG} \in H^{\frac{1}{2}+\delta}$ QG avec:

$$\begin{cases} \|U_{0,\varepsilon,QG} - \widetilde{U}_{0,QG}\|_{H^{\frac{1}{2}+\delta}} \leq \mathbb{C}_0 \varepsilon^{\alpha_0}, \\ \|\widetilde{U}_{0,QG}\|_{H^{\frac{1}{2}+\delta}} \leq \mathbb{C}_0. \end{cases} \tag{8}$$

2. $\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{F}_\delta} \leq \mathbb{C}_0 \varepsilon^{-\kappa\delta}$ où $\dot{F}_\delta$ est donné par ($q = \frac{2}{1+\delta}$):

$$\dot{F}_\delta = \begin{cases} \dot{H}^{\frac{1}{2}-\delta} \cap \dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta} & \text{si } \nu = \nu', \\ \dot{B}^{\frac{1}{2}}_{q,q} \cap \dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta} & \text{si } \nu \neq \nu', \end{cases}$$

Alors le système (PE_ε) a une unique solution globale $U_\varepsilon \in \dot{E}^s$ pour tout $s \in [\frac{1}{2} - \eta\delta, \frac{1}{2} + \eta\delta]$, qui converge vers l'unique solution globale $\widetilde{U}_{QG} \in \dot{E}^0 \cap \dot{E}^{\frac{1}{2}+\delta}$ du système (QG) selon:

$$\|U_\varepsilon - \widetilde{U}_{QG}\|_{L^2L^\infty} \leq \mathbb{B}_0 \varepsilon^{\min(\alpha_0, \delta\beta)}.$$

Remarque: κ est petit $(\kappa \leq \frac{1}{4000})$ dans le cas où aucune hypothèse n'est faite sur les viscosités, mais si $\nu = \nu'$ on peut prendre tout $\kappa \leq \frac{1}{2}$.

Système limite (cas général)

On a prouvé (FC '04) que si $\widetilde{U}_{0,QG} \in H^1$ alors (QG) a une unique solution globale $\widetilde{U}_{QG} \in \dot{E}^0 \cap \dot{E}^1$, et il existe une constante $C>0$ telle que pour tout $s \in [0,1]$ et $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\|\widetilde{U}_{QG}\|^2_{L^\infty_t \dot{H}^s} + \min(\nu,\nu') \int_0^t \|\nabla \widetilde{U}_{QG}(\tau)\|^2_{\dot{H}^s} d\tau \leq C(\|\widetilde{U}_{0,QG}\|^{1-s}_{L^2} \|\widetilde{U}_{0,QG}\|^s_{\dot{H}^1})^2 \leq C\|\widetilde{U}_{0,QG}\|^2_{H^1}. \quad (9)$$

Système limite

Interpolation réelle ([FC'08]): pour tout $\delta > 0$ il existe une constante $C(\delta) > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\|\widetilde{U}_{QG}\|^2_{L^\infty_t H^{\frac{1}{2}+\delta}} + \min(\nu, \nu') \int_0^t \|\nabla \widetilde{U}_{QG}(\tau)\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\delta}} d\tau \\ \leq C_{\delta,\nu} \|\widetilde{U}_{0,QG}\|^2_{H^{\frac{1}{2}+\delta}} \max(1, \|\widetilde{U}_{0,QG}\|^{\frac{1}{\delta}}_{H^{\frac{1}{2}+\delta}}). \quad (10)$$

Théorème d'existence et unicité globales:

Soient $\delta > 0$ et $\widetilde{U}_{0,QG} \in H^{\frac{1}{2}+\delta}$ un champ quasi-géostrophique ($\widetilde{U}_{0,QG} = \mathcal{Q}\widetilde{U}_{0,QG}$). Alors le système (QG) admet une unique solution globale dans $E^{\frac{1}{2}+\delta} = \dot{E}^0 \cap \dot{E}^{\frac{1}{2}+\delta}$ et l'inégalité précédente reste vraie.

Ecriture unifiée des différents systèmes (sans hyp. sur ν, ν')

Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, on note $f \cdot \nabla f = \sum_{i=1}^3 f_i \partial_i f$.

$$\begin{cases} \partial_t U_\varepsilon - LU_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}U_\varepsilon = -\mathbb{P}(U_\varepsilon.\nabla U_\varepsilon). \\ U_{\varepsilon|t=0} = U_{0,\varepsilon}. \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} \partial_t \widetilde{U}_{QG} - LU_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}\widetilde{U}_{QG} = -\mathbb{P}(\widetilde{U}_{QG}.\nabla \widetilde{U}_{QG}) + G, \\ \widetilde{U}_{QG|t=0} = \widetilde{U}_{0,QG}. \end{cases} \tag{QG}$$

où $G = G^b + G^l$ avec $G^b \overset{def}{=} \mathbb{P}\mathcal{P}(\widetilde{U}_{QG}.\nabla \widetilde{U}_{QG})$, et

$$G^l \overset{def}{=} \mathcal{P}(L\widetilde{U}_{QG}) = -F(\nu - \nu')\Delta\Delta_F^{-2} \begin{pmatrix} -F\partial_2\partial_3^2 \\ F\partial_1\partial_3^2 \\ 0 \\ (\partial_1^2 + \partial_2^2)\partial_3 \end{pmatrix} \widetilde{\Omega}_{QG}. \tag{12}$$

Les différents systèmes (désormais $\nu = \nu'$)

Remarque: on est forcé de "grignotter" le terme $G = G^b$.

$$\begin{cases} \partial_t W_\varepsilon - LW_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}W_\varepsilon = -G, \\ W_{\varepsilon|t=0} = U_{0,\varepsilon,osc} \end{cases} \tag{13}$$

On définit enfin $\delta_\varepsilon = U_\varepsilon - \widetilde{U}_{QG} - W_\varepsilon$, qui vérifie le système:

$$\begin{cases} \partial_t \delta_\varepsilon - L\delta_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}\delta_\varepsilon = \sum_{i=1}^{8} F_i, \\ \delta_{\varepsilon|t=0} = U_{0,\varepsilon,QG} - \widetilde{U}_{0,QG}, \end{cases} \tag{14}$$

Les différents systèmes

Avec

$$\begin{cases} F_1 \overset{def}{=} -\mathbb{P}(\delta_\varepsilon \cdot \nabla \delta_\varepsilon), \\ F_2 \overset{def}{=} -\mathbb{P}(\delta_\varepsilon \cdot \nabla \widetilde{U}_{QG}), \\ F_3 \overset{def}{=} -\mathbb{P}(\widetilde{U}_{QG} \cdot \nabla \delta_\varepsilon), \\ F_4 \overset{def}{=} -\mathbb{P}(\delta_\varepsilon \cdot \nabla W_\varepsilon), \\ F_5 \overset{def}{=} -\mathbb{P}(W_\varepsilon \cdot \nabla \delta_\varepsilon), \\ F_6 \overset{def}{=} -\mathbb{P}(\widetilde{U}_{QG} \cdot \nabla W_\varepsilon), \\ F_7 \overset{def}{=} -\mathbb{P}(W_\varepsilon \cdot \nabla \widetilde{U}_{QG}), \\ F_8 \overset{def}{=} -\mathbb{P}(W_\varepsilon \cdot \nabla W_\varepsilon), \end{cases} \tag{15}$$

Formulation précise du th

Théorème (FC PAA '20, preprint'20)

Pour tous $\mathbb{C}_0 > 0$, $\delta \in]0, \frac{1}{4}[$, $\gamma \in]0, \frac{\delta}{2}[$ et $\alpha_0 > 0$, si l'on définit $\eta_0 > 0$ tel que $\gamma = (1 - 2\eta_0)\frac{\delta}{2}$ (c'est-à-dire $\eta_0 = \frac{1}{2}(1 - \frac{2\gamma}{\delta})$), alors il existe $\varepsilon_0, \mathbb{B}_0, \eta > 0$ (dépendant de $F, \nu, \mathbb{C}_0, \delta, \gamma, \alpha_0, \eta_0$) tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et toute donnée à divergence nulle $U_{0,\varepsilon} = U_{0,\varepsilon,QG} + U_{0,\varepsilon,osc}$ satisfaisant:

1. Il existe un champ de vecteurs quasi-géostrophique $\widetilde{U}_{0,QG} \in H^{\frac{1}{2}+\delta}$ tel que

$$\begin{cases} \|U_{0,\varepsilon,QG} - \widetilde{U}_{0,QG}\|_{H^{\frac{1}{2}+\delta}} \leq \mathbb{C}_0 \varepsilon^{\alpha_0}, \\ \|\widetilde{U}_{0,QG}\|_{H^{\frac{1}{2}+\delta}} \leq \mathbb{C}_0. \end{cases} \tag{16}$$

2. $U_{0,\varepsilon,osc} \in \dot{H}^{\frac{1}{2}} \cap \dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}$ avec $\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}} \leq \mathbb{C}_0 \varepsilon^{-\gamma}$,

Alors le système (PE_ε) admet une unique solution globale $U_\varepsilon \in \dot{E}^s$ pour tout $s \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \eta_0\delta]$, et avec les notations précédentes pour tous $s \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \eta_0\delta]$

$$\|\delta_\varepsilon\|_{\dot{E}^s} \leq \mathbb{B}_0 \varepsilon^{\min\left(\alpha_0, \frac{\delta}{2}-\gamma, \frac{\delta}{2}-\gamma+\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-s)\right)} \leq \mathbb{B}_0 \varepsilon^{\min(\alpha_0, \frac{\delta\eta_0}{2})}.$$

Enfin, si l'on demande plus de régularité basse fréquence à la partie oscillante initiale, $U_{0,\varepsilon,osc} \in \dot{H}^{\frac{1}{2}-\delta} \cap \dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}$ avec $\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+c\delta} \cap \dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}} \leq \mathbb{C}_0 \varepsilon^{-\gamma}$ (pour une constante $c \in]0,1[$ aussi proche de 1 qu'on veut) alors pour tout $s \in [\frac{1}{2} - \eta\delta, \frac{1}{2} + \eta\delta]$ (avec $0 < \eta \leq \min(\eta_0, \ldots)$).

$$\|\delta_\varepsilon\|_{\dot{E}^s} \leq \mathbb{B}_0 \varepsilon^{\min(\alpha_0, (2\eta_0 - \eta)\frac{\delta}{2})}.$$

Enfin, on peut se débarrasser des oscillations W_ε et obtenir que:

$$\|U_\varepsilon - \widetilde{U}_{QG}\|_{L^2L^\infty} \leq \mathbb{B}_0 \varepsilon^{\min(\alpha_0, k\eta_0\delta)},$$

pour tout $k < 1$ aussi proche de 1 qu'on veut.

Remarques:

- $\delta > 0$ est le supplément de régularité qu'on demande à la donnée initiale.
- On autorise la partie oscillante initiale à exploser en $\varepsilon^{-\gamma}$ avec $\gamma < \frac{\delta}{2}$.
- Plus γ est proche de δ, plus η_0 sera petit.

On peut atteindre une taille en $\varepsilon^{-\frac{\delta}{2}}$.

Théorème (FC preprint'20)

Supposons toujours $F \neq 1$ et $\nu = \nu'$. Pour tous $\mathbb{C}_0 \geq 1$, $\delta \in]0, \frac{1}{4}[$, et $\alpha_0 > 0$, il existe $\varepsilon_0, m_0 > 0$ (petits et dépendant de $F, \nu, \mathbb{C}_0, \delta, \alpha_0$) tels que pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et toute donnée initiale à divergence nulle $U_{0,\varepsilon} = U_{0,\varepsilon,QG} + U_{0,\varepsilon,osc}$ avec $U_{0,\varepsilon,QG}$ (et $\widetilde{U}_{0,QG}$) comme précédemment et $U_{0,\varepsilon,osc} \in \dot{H}^{\frac{1}{2}} \cap \dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}$ avec

$$\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}} \leq m_0 \varepsilon^{-\frac{\delta}{2}},$$

alors le système (PE_ε) admet une unique solution globale $U_\varepsilon \in \dot{E}^{\frac{1}{2}}$.

Si de plus on suppose qu'il existe une function $m(\varepsilon)$ telle que $m(\varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$ et:

$$\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}} \leq m(\varepsilon)\varepsilon^{-\frac{\delta}{2}}, \tag{17}$$

et avec les mêmes notations que précédemment il existe $\mathbb{B}_0$ (dépendant de $F, \nu, \mathbb{C}_0, \delta, \gamma, \alpha_0$) telle qu'on ait

$$\|\delta_\varepsilon\|_{\dot{E}^{\frac{1}{2}}} \leq \mathbb{B}_0 \min(\varepsilon^{\alpha_0}, m(\varepsilon)). \tag{18}$$

En résumé:

- Si $U_{0,\varepsilon,osc} \in \dot{H}^{\frac{1}{2}} \cap \dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}$ et $\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}} \varepsilon^{\frac{\delta}{2}} \leq m_0$, avec m_0 suffisamment petit, existence globale dans $\dot{E}^{\frac{1}{2}}$ pour $\varepsilon \leq \varepsilon_0$,
- Si $\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}} \varepsilon^{\frac{\delta}{2}} \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$, alors de plus $\|\delta_\varepsilon\|_{\dot{E}^{\frac{1}{2}}}$ tend vers zéro (même si $\|U_\varepsilon\|_{\dot{E}^{\frac{1}{2}}}$ peut exploser lorsque ε tend vers zéro),
- Si $\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}} \leq \mathbb{C}_0 \varepsilon^{-\gamma}$, avec $\gamma < \frac{\delta}{2}$, alors on a en plus une vitesse de convergence de $\|\delta_\varepsilon\|_{\dot{E}^{\frac{1}{2}} \cap \dot{E}^{\frac{1}{2}+\eta_0 \delta}}$ comme puissance positive de ε.
- Si $U_{0,\varepsilon,osc} \in \dot{H}^{\frac{1}{2}-\delta} \cap \dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}$ et $\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}+c\delta} \cap \dot{H}^{\frac{1}{2}+\delta}} \leq \mathbb{C}_0 \varepsilon^{-\gamma}$ (pour $c \in]0,1]$), avec $\gamma < \frac{\delta}{2}$, alors on a en plus que $\|U_\varepsilon - \widetilde{U}_{QG}\|_{L^2 L^\infty}$ est bornée par une puissance positive de ε.

Preuve dans le cas $\nu = \nu'$

Pour le système limite: utilisation de l'estimation fine et suites de Cauchy. Ceci permet d'obtenir la majoration pour tout $\delta \in]0, \frac{1}{2}]$ et tout $s \in [0, \frac{1}{2} + \delta]$:

$$\int_0^\infty \|G(\tau)\|_{\dot{H}^s} d\tau \leq \frac{C_F}{\nu_0} \|\widetilde{U}_{0,QG}\|_{H^{\frac{1}{2}+\delta}}^{2+\frac{1}{\delta}},$$

ainsi que pour tout $s \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \delta]$

$$\begin{aligned} \|W_\varepsilon\|_{\dot{E}^s}^2 &\leq \left(\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{H}^s}^2 + C \int_0^t \|G^l(\tau)\|_{\dot{H}^s}^2 d\tau \right) e^{\frac{1}{2}\int_0^t \|G^b(\tau)\|_{\dot{H}^s} d\tau} \\ &\leq \mathbb{D}_0 \left(\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{H}^s}^2 + 1 \right), \qquad (19) \end{aligned}$$

Estimation d'énergie pour δ_ε

$$\begin{cases} \partial_t \delta_\varepsilon - L\delta_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}\delta_\varepsilon = \sum_{i=1}^{8} F_i, \\ \delta_{\varepsilon|t=0} = U_{0,\varepsilon,QG} - \widetilde{U}_{0,QG}, \end{cases} \tag{20}$$

- $\widetilde{U}_{QG}$ et W_ε existent globalement, a priori δ_ε existe sur un $[0, T_\varepsilon^*[$ puis argument de bootstrap reposant sur estim fines.
- Produit scalaire dans $\dot{H}^s$ et estimation des termes $(F_i|\delta_\varepsilon)_{\dot{H}^s}$.

Trois termes s'estiment avec des lois de produits classiques comme dans [FC '04]:

$$|(F_1|\delta_\varepsilon)_{\dot{H}^s}| = |(\mathbb{P}(\delta_\varepsilon\cdot\nabla\delta_\varepsilon)|\delta_\varepsilon)_{\dot{H}^s}| \leq \|\delta_\varepsilon\cdot\nabla\delta_\varepsilon\|_{\dot{H}^{s-1}}\|\delta_\varepsilon\|_{\dot{H}^{s+1}} \leq C\|\delta_\varepsilon\|_{\dot{H}^{\frac12}}\|\delta_\varepsilon\|^2_{\dot{H}^{s+1}}, \quad (21)$$

$$|(F_2|\delta_\varepsilon)_{\dot{H}^s}| = |(\mathbb{P}(\delta_\varepsilon\cdot\nabla\widetilde{U}_{QG})|\delta_\varepsilon)_{\dot{H}^s}| \leq C\|\nabla\widetilde{U}_{QG}\|_{\dot{H}^{\frac12}}\|\delta_\varepsilon\|_{\dot{H}^s}\|\delta_\varepsilon\|_{\dot{H}^{s+1}} \leq \frac{\nu}{16}\|\delta_\varepsilon\|^2_{\dot{H}^{s+1}} + \frac{C}{\nu}\|\nabla\widetilde{U}_{QG}\|^2_{\dot{H}^{\frac12}}\|\delta_\varepsilon\|^2_{\dot{H}^s}, \quad (22)$$

$$|(F_3|\delta_\varepsilon)_{\dot{H}^s}| = |(\mathbb{P}(\widetilde{U}_{QG}\cdot\nabla\delta_\varepsilon)|\delta_\varepsilon)_{\dot{H}^s}| \leq C\|\widetilde{U}_{QG}\|_{\dot{H}^1}\|\delta_\varepsilon\|_{\dot{H}^{s+\frac12}}\|\delta_\varepsilon\|_{\dot{H}^{s+1}} \leq \frac{\nu}{16}\|\delta_\varepsilon\|^2_{\dot{H}^{s+1}} + \frac{C}{\nu^3}\|\widetilde{U}_{QG}\|^4_{\dot{H}^1}\|\delta_\varepsilon\|^2_{\dot{H}^s}. \quad (23)$$

1. On pourrait utiliser ces lois pour certains termes, par exemple $F_7 = -\mathbb{P}(W_\varepsilon \cdot \nabla \widetilde{U}_{QG})$.
2. Par contre pour F_8 on ne peut pas espérer mieux que $\gamma < \frac{\delta}{4}$.
3. Problème avec les autres termes, par ex $F_4 = -\mathbb{P}(\delta_\varepsilon \cdot \nabla W_\varepsilon)$ (produits ou paraproduits)

PLUS: Pb de répartition des dérivées sur le premier terme du paraproduit...

$\rightarrow$ Pour améliorer les choses, on devra:

- Affiner les estimations de Strichartz,
- Forcer la répartition des dérivées.
- Dans la mesure du possible n'impliquer W_ε qu'à travers les estimations de Strichartz pour compenser la norme de $U_{0,\varepsilon,osc}$ par une puissance de ε.

Estimations de Strichartz ($\nu=\nu'$), FC PAA '20, Preprint

Pour tous $d\in\mathbb{R}$, $r\geq 2$, $q\geq 1$, $\theta\in[0,1]$ et $p\in[1,\frac{4}{\theta(1-\frac{2}{r})}]$, il existe $C=C(F,p,\theta,r,\nu)>0$ telle que pour toute W_ε, solution du système (D_ε) avec donnée $U_{0,\varepsilon,osc}$ et force extérieure $-G$ (toutes deux à divergence et tourbillon potentiel nuls), alors

$$\||D|^d W_\varepsilon\|_{\widetilde{L}_t^p \dot{B}_{r,q}^0} \leq C\varepsilon^{\frac{\theta}{4}(1-\frac{2}{r})} \times \left(\|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{B}_{2,q}^{\sigma}} + \int_0^t \|G(\tau)\|_{\dot{B}_{2,q}^{\sigma}} d\tau\right) \tag{24}$$

avec

$$\sigma = d+\frac{3}{2}-\frac{3}{r}-\frac{2}{p}+\frac{\theta}{2}(1-\frac{2}{r}).$$

Pour déplacer une fraction de dérivée, le prix à payer est l'introduction d'un opérateur non local ($s \in]0,1[$):

$$|D|^s f(x) = C_s \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)-f(y)}{|x-y|^{3+s}} dy = C_s \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(x)-f(x-y)}{|y|^{3+s}} dy.$$

Formulation non-locale bien adaptée au cadre Besov:

Théorème (voir Bahouri-Chemin-Danchin):

Si $s \in]0,1[$ et $p, r \in [1,\infty]$, on a pour $u \in \dot{B}^s_{p,r}$,

$$\|u\|_{\dot{B}^s_{p,r}} \sim \| \frac{\|u(\cdot - y) - u(\cdot)\|_{L^p}}{|y|^s} \|_{L^r(\mathbb{R}^d; \frac{dy}{|y|^d})} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\|u(\cdot - y) - u(\cdot)\|_{L^p}^r}{|y|^{d+sr}} \right)^{\frac{1}{r}}.$$

Proposition (FC '16, '18 et '19)

Pour tout $s \in]0,1[$ et toutes f, g on a la décomposition:

$$|D|^s(fg) = (|D|^s f)g + f|D|^s g + M_s(f,g),$$

où l'opérateur bilinéaire M_s est défini pour tous $x \in \mathbb{R}^3$ par:

$$M_s(f,g)(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\big(f(x) - f(x-y)\big)\big(g(x) - g(x-y)\big)}{|y|^{3+s}} dy. \quad (25)$$

De plus...

...il existe une constante C_s telle que pour toutes f, g, tous $p, p_1, p_2, r_1, r_2 \in [1, \infty]$ et $s_1, s_2 > 0$ satisfaisant:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}, \quad 1 = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}, \quad s_1 + s_2 = s,$$

alors on a

$$\|M_s(f,g)\|_{L^p} \leq C_s \|f\|_{\dot{B}^{s_1}_{p_1,r_1}} \|g\|_{\dot{B}^{s_2}_{p_2,r_2}}. \tag{26}$$

Ex pour F_4.

Dans ces conditions on peut écrire:

$$\begin{aligned}\left|(F_6|\delta_\varepsilon)_{\dot{H}^s}\right| &= \left|(\mathrm{div}\,(\widetilde{U}_{QG} \otimes W_\varepsilon)|\delta_\varepsilon)_{\dot{H}^s}\right| = \left|(|D|^{s+\alpha_1}(\widetilde{U}_{QG} \cdot W_\varepsilon)\big||D|^{s-\alpha_1}\nabla\delta_\varepsilon)_{L_2}\right| \\ &\leq \|(|D|^{s+\alpha_1}\widetilde{U}_{QG}) \cdot W_\varepsilon + \widetilde{U}_{QG} \cdot |D|^{s+\alpha_1} W_\varepsilon + M_{s+\alpha_1}(\widetilde{U}_{QG}, W_\varepsilon)\|_{L^{\frac{6}{3+2\alpha_1}}} \\ &\qquad \times \||D|^{s-\alpha_1}\nabla\delta_\varepsilon\|_{L^{\frac{6}{3-2\alpha_1}}}\end{aligned} \tag{27}$$

Majoration de $F_{4/5}$, $F_{6/7}$ et F_8.

Bootstrap: si on définit:

$$T_\varepsilon \stackrel{def}{=} \sup\{t \in [0, T_\varepsilon^*[, \quad \forall t' \leq t, \|\delta_\varepsilon(t')\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\nu}{4C}\},$$

alors on obtient que pour tout $t < T_\varepsilon$ et $s \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \eta\delta]$:

$$\frac{d}{dt}\|\delta_\varepsilon(t)\|_{\dot{H}^s}^2 + \frac{\nu}{2}\|\delta_\varepsilon(t)\|_{\dot{H}^{s+1}}^2 \leq C\|\delta_\varepsilon(t)\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}}\|\delta_\varepsilon(t)\|_{\dot{H}^{s+1}}^2 + \dots$$

Puis...

$$
\begin{aligned}
&\|\delta_\varepsilon(t)\|_{\dot H^s}^2+\frac{\nu}{2}\int_0^t\|\nabla\delta_\varepsilon(\tau)\|_{\dot H^s}^2 d\tau\\
&\leq \exp\frac{C}{\nu}\left\{\|\nabla\widetilde{U}_{QG}\|^2_{L^2\dot H^{\frac12}}(1+\frac{1}{\nu^2}\|\widetilde{U}_{QG}\|^2_{L^\infty\dot H^{\frac12}})+\frac{1}{\nu^{\frac{2\alpha_2}{1-\alpha_2}}}\|W_\varepsilon\|^{\frac{2}{1-\alpha_2}}_{L^{\frac{2}{1-\alpha_2}}L^{\frac{3}{\alpha_2}}}+\|W_\varepsilon\|^2_{L^2\dot B^{\alpha_2}_{\frac{3}{\alpha_2},2}}\right\}\\
&\quad\times\left\{\|\delta_\varepsilon(0)\|^2_{\dot H^s}+\frac{C}{\nu}\Bigg[\|\widetilde{U}_{QG}\|^{2(1-\alpha_1)}_{L^\infty\dot H^s}\|\widetilde{U}_{QG}\|^{2\alpha_1}_{L^2\dot H^{s+1}}\|W_\varepsilon\|^2_{L^{\frac{2}{1-\alpha_1}}L^{\frac{3}{\alpha_1}}}\right.\\
&\quad+\|\widetilde{U}_{QG}\|^2_{L^\infty\dot H^{\frac12}}\||D|^{s+\alpha_1}W_\varepsilon\|^2_{L^2L^{\frac{6}{1+2\alpha_1}}}+\|\widetilde{U}_{QG}\|^2_{L^\infty\dot H^s}\|W_\varepsilon\|^2_{L^2\dot B^{\alpha_1}_{\frac{3}{\alpha_1},2}}\\
&\quad+\frac{\nu}{4C}\||D|^{s+\alpha_2}W_\varepsilon\|^2_{L^2L^{\frac{6}{1+2\alpha_2}}}+\|W_\varepsilon\|^4_{L^4\dot B^{\frac{s+\alpha_3}{2}}_{\frac{12}{3+2\alpha_3},2}}\\
&\quad\left.+\||D|^{s+\alpha_3}W_\varepsilon\|^2_{L^{p_1}\dot B^0_{\frac{12}{3+2\alpha_3},2}}\|W_\varepsilon\|^2_{L^{p_2}\dot B^0_{\frac{12}{3+2\alpha_3},2}}\Bigg]\right\}\qquad(28)
\end{aligned}
$$

L'oscillation W_ε interviendra exclusivement via les estimations de Strichartz améliorées:

$$\begin{cases} \left\| |D|^{s+\alpha} W_\varepsilon \right\|_{L_t^2 L^{\frac{6}{1+2\alpha}}}, \\ \left\| W_\varepsilon \right\|_{\widetilde{L}_t^2 \dot{B}^{\alpha}_{\frac{3}{\alpha},2}}, \\ \left\| W_\varepsilon \right\|_{L_t^{\frac{2}{1-\alpha}} L^{\frac{3}{\alpha}}}, \\ \left\| |D|^{s+\alpha} W_\varepsilon \right\|_{L^{p_1} \dot{B}^0_{\frac{12}{3+2\alpha},2}}, \\ \left\| W_\varepsilon \right\|^2_{L^{p_2} \dot{B}^0_{\frac{12}{3+2\alpha},2}}, \\ \left\| W_\varepsilon \right\|_{L^4 \dot{B}^{\frac{s+\alpha}{2}}_{\frac{12}{3+2\alpha},2}}, \end{cases}$$

Si l'on suppose $T_\varepsilon < T_\varepsilon^*$ ($T_\varepsilon > 0$ si ε suffisamment petit), alors (conditions α, δ) pour tout $t \leq T_\varepsilon$,

$$\|\delta_\varepsilon(t)\|_{\dot{H}^s}^2 + \frac{\nu}{2}\int_0^t \|\nabla\delta_\varepsilon(\tau)\|_{\dot{H}^s}^2 d\tau$$
$$\leq \mathbb{D}_0 e^{2\mathbb{D}_0}(\varepsilon^{2\alpha_0} + \varepsilon^{2(\frac{\delta}{2}-\gamma)-(s-\frac{1}{2})}) \leq \mathbb{B}_0(\varepsilon^{2\alpha_0} + \varepsilon^{(2\eta_0-\eta)\delta}). \quad (29)$$

Il suffit de prendre ε suffisamment petit pour que le membre de droite soit inférieur à $(\frac{\nu}{8C})^2$ et obtenir une contradiction sur la définition de T_ε. On obtient donc $T_\varepsilon = T_\varepsilon^*$ ainsi que l'estimation du théorème, ce qui entraîne que $T_\varepsilon = T_\varepsilon^* = \infty$.

On procède de même si l'on veut l'estimation pour tout $s \in [\frac{1}{2} - \eta\delta, \frac{1}{2} + \eta\delta]$ (conditions α, δ). En couplant l'estimation de Strichartz $L^2 L^\infty$ (pour $(d, p, r, q) = (0, 2, \infty, 1)$) ainsi que l'estimation:

$$\|\delta_\varepsilon\|_{L^2 L^\infty} \leq \|\delta_\varepsilon\|_{L^2 \dot{B}^0_{\infty,1}} \leq \left(\|\delta_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}^{\frac{3}{2} - \eta\delta}} \|\delta_\varepsilon\|_{L^2 \dot{H}^{\frac{3}{2} + \eta\delta}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

on aboutit à l'estimation $L^2 L^\infty$ de $U_\varepsilon - \widetilde{U}_{QG} = \delta_\varepsilon + W_\varepsilon$.
Deuxième théorème: $(s = \frac{1}{2})$.

Théorème (Littman '63):

Soit $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction régulière à support compact dans K et $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction régulière telle que pour tout $\xi \in K$, la hessiènne $D^2\phi(\xi)$ admet au moins k valeurs propres non nulles. Alors il existe une constante A telle que pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi+i\lambda\phi(\xi)}\psi(\xi)d\xi| \leq A\sqrt{|x^2|+\lambda^2}^{-\frac{k}{2}} \leq A|\lambda|^{-\frac{k}{2}}.$$

Et comme ψ est à support comptact, on utilisera le théorème sous la forme

$$|\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi+i\lambda\phi(\xi)}\psi(\xi)d\xi| \leq C\min(1, |\lambda|^{-\frac{k}{2}}).$$

Merci pour votre attention !