Modèles mathématiques pour les milieux granulaires, et mélanges grains fluide en couche mince

F. Bouchut[1]

[1] *LAMA, CNRS & Université Gustave Eiffel*

Groupe de travail MathsinFluids, Lyon mai 2022

Plan

1. *Modèles viscoplastiques pour les milieux secs, incompressibles ou compressibles ?*

2. *Milieux mouillés et couche mince*

II. Modèles viscoplastiques incompressibles

▷ On part d'une modélisation dynamique classique

$$\boxed{\rho\phi(\partial_t u + u \cdot \nabla u) - \operatorname{div}\sigma = \phi f,}$$

avec σ le tenseur des contraintes (matrice symétrique). On peut décomposer

$$\boxed{\sigma = -p\,\mathrm{Id} + \sigma', \qquad \operatorname{tr}\sigma' = 0,}$$

avec p la pression (effective), et σ' le déviateur des contraintes, noté parfois τ.

▷ Pour un modèle incompressible on a

$$\operatorname{div} u = 0, \qquad \phi = cste,$$

et σ' est à définir. p est un multiplicateur de Lagrange pour la contrainte $\operatorname{div} u = 0$.

▷ Pour un modèle compressible on a

$$\partial_t \phi + \operatorname{div}(\phi u) = 0,$$

et σ (ou de façon équivalente p et σ') est à définir.

▷ Un modèle newtonien incompressible est

$$\sigma' = 2\eta Du,$$

avec $Du = (\nabla u + (\nabla u)^t)/2$ le taux de déformation, et $\eta = \eta(\phi)$ la viscosité.

▷ Un modèle newtonien compressible est

$$\sigma = -p_0(\phi)\,\mathrm{Id} + 2\eta Du + \lambda\,\mathrm{Id}\operatorname{div} u,$$

où $p_0(\phi)$ est la pression thermodynamique, $\eta(\phi)$ et $\lambda(\phi)$ les coefficients de viscosité.

▷ Un modèle viscoplastique est défini par une rhéologie de la forme

$$\boxed{\sigma \text{ fonction de } \phi,\ Du \quad \text{(compressible)},}$$

$$\boxed{\sigma' \text{ fonction de } \phi, Du,\ \text{éventuellement } p, \quad \text{(incompressible)}.}$$

▷ Dans les écoulements de laboratoire présentés on a $\operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div}(u(z), 0) = 0$. Cela amène naturellement à une modélisation dynamique incompressible.

▷ On considère maintenant le modèle incompressible défini par la rhéologie $\mu(I)$ locale :

$$\boxed{\sigma' = \mu(I) p \frac{Du}{|Du|},}$$

avec $|Du|^2 = (\sum_{ij} Du_{ij}^2)^{1/2}$ et

$$\boxed{I = \frac{\sqrt{2} d |Du|}{\sqrt{p/\rho}}.}$$

C'est la généralisation tensorielle du modèle à cisaillement simple puisque $|\sigma'| = \mu(I)p$.

▷ Le gros problème de la rhéologie incompressible $\sigma' = 2\eta Du$ où η dépend de p est qu'elle est en général mal posée !
▷ Pour la rhéologie $\mu(I)$ incompressible, Barker et al. 2015 ont montré si on prend une solution de référence régulière et qu'on fait une perturbation locale à nombre d'onde très grand, le problème linéarisé est mal posé (de type chaleur rétrograde), ceci pour une large plage de valeurs de I (pour I petit et pour I grand).
▷ Lorsqu'on raffine dans les simulations numériques, on voit apparaitre des "bandes de cisaillement", qui deviennent d'autant plus fines que le maillage est fin (Martin & al. 2017).

▷ La rhéologie $\mu(I)$ a les bonnes échelles physiques, mais pas la bonne structure algébrico-différentielle.

▷ Peut-il y avoir une formulation variationnelle pour un problème incompressible ?
▷ Une façon d'en écrire une est

$$\boxed{\alpha u - \operatorname{div} \sigma' + \nabla p = f, \qquad \operatorname{div} u = 0,}$$

avec $\alpha > 0$ et une rhéologie

$$\boxed{\sigma' \in \partial F(Du),}$$

où la non-linéarité est

$$F : \mathbb{M}^{s0}_{N\times N}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ convexe sci non identiquement } \infty.$$

▷ De façon explicite, F est définie sur l'espace des matrices symétriques $N \times N$ de trace nulle. Le sous-différentiel est défini par

$$\partial F(D') = \left\{\sigma' \text{tels que } \forall A \; F(A) \geq F(D') + \sigma' : (A - D')\right\}.$$

Ici, ":" représente le produit scalaire des matrices.
▷ Le problème est alors bien posé et on a de bonnes méthodes d'approximation numérique.

▷ Exemple : Bingham

$$\boxed{F(D') = \kappa |D'|.}$$

On a alors

$$\partial F(D') = \begin{cases} \kappa \dfrac{D'}{|D'|} & \text{si } D' \neq 0, \\ \overline{B}_{M^{s0}}(0, \kappa) & \text{si } D' = 0. \end{cases}$$

κ est le seuil de contraintes. Lorsqu'on a la relation $\sigma' \in \partial F(Du)$,

- $|\sigma'| \leq \kappa \rightarrow Du$ peut être nul,
- $|\sigma'| > \kappa \rightarrow Du$ doit être non nul.

Le fluide peut être à l'arrêt (ou plus généralement avoir $Du = 0$ ie un mouvement solide) avec des contraintes σ' non nulles (c'est le cas pour les écoulements uniformes si $\theta < \theta_{min}$). C'est un fluide à seuil.

▷ Example : Herschel-Bulkley

$$\boxed{F(D') = \tfrac{K}{1+n} |D'|^{1+n} + \kappa |D'|.}$$

▷ F n'est pas différentiable à l'origine, cela permet au matériau de pouvoir se comporter comme un solide (contraintes sous le seuil) ou comme un liquide/gaz (contraintes au dessus du seuil).

▷ Condition de dissipation

$$\boxed{\partial F(0) \ni 0.}$$

Propriété de monotonie du sous-différentiel des fonctions convexes :

$$\sigma_1 \in \partial F(D_1),\ \sigma_2 \in \partial F(D_2) \Rightarrow (\sigma_2 - \sigma_1) : (D_2 - D_1) \geq 0.$$

En particulier la condition de dissipation implique

$$\sigma \in \partial F(Du) \Longrightarrow \sigma : Du \geq 0,$$

et la dissipation d'énergie est bien positive,

$$\boxed{\text{il y a consistence thermodynamique}}$$

▷ Peut-on mettre la loi $\mu(I)$ sous la bonne forme $\sigma \in \partial F(Du)$ avec F convexe ?

$$\boxed{\text{Non, les échelles imposées empêchent la convexité,}}$$

et plus généralement empêchent la propriété de monotonie écrire ci-dessus.

III. Nécessité de modèles viscoplastiques compressibles pour les matériaux granulaires

▷ Barker & al. 2017, Heyman & al. 2017 : un modèle "$\mu(I)$ compressible" peut être bien posé linéairement, contrairement au cas incompressible.
▷ Bouchut & al. 2016 : pour avoir les effets de dilatance il faut un modèle compressible.
▷ Essai de modélisation compressible (sans élasticité)

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_t \phi + \operatorname{div}(\phi u) &= 0, \\ \rho\phi(\partial_t u + u \cdot \nabla u) &= \operatorname{div} \sigma + \phi f, \end{aligned}}$$

avec ϕ fraction volumique, u vitesse, ρ masse volumique (constante).
▷ Loi rhéologique

$$\boxed{\sigma \in \partial\Psi(\phi, s, Du),}$$

avec $\Psi(\phi, s, D)$ potentiel viscoplastique, convexe par rapport à D (D est aussi souvent noté $D = \dot{\epsilon}$). Le sous-différentiel est pris par rapport à D.
▷ Compatibilité thermodynamique

$$\boxed{\partial\Psi(\phi, s, 0) \ni -p_0(\phi, s)\,\mathrm{Id},}$$

où $p_0(\phi, s)$ est la loi de pression qui vérifie une identité thermodynamique

$$de_0 = -\frac{p_0}{\rho} d\left(\frac{1}{\phi}\right) + Tds,$$

où $e_0(\phi, s)$ est l'énergie spécifique, $T(\phi, s) > 0$ la température.
▷ On peut écrire $\sigma = -p\,\mathrm{Id} + \sigma'$, $\operatorname{tr}(\sigma') = 0$. p est la pression effective, qu'on mesure.

▷ On complète les deux équations de conservation de masse et quantité de mouvement par une équation d'énergie

$$\partial_t(\rho\phi\tfrac{|u|^2}{2} + \rho\phi e_0) + \mathrm{div}(\rho\phi\tfrac{|u|^2}{2}u + \rho\phi e_0 u) = \mathrm{div}(\sigma u) + \mathrm{div}(\kappa\nabla T) + \phi f \cdot u.$$

▷ Des trois lois de conservation on déduit l'identité d'entropie

$$\partial_t(\rho\phi s) + \mathrm{div}(\rho\phi s u) - \tfrac{1}{T}(\sigma : Du + p_0\,\mathrm{tr}(Du)) - \mathrm{div}\left(\kappa\tfrac{\nabla T}{T}\right) - \kappa\tfrac{|\nabla T|^2}{T^2} = 0.$$

La compatibilité thermodynamique implique

$$\sigma : Du + (p_0\,\mathrm{Id}) : Du \geq 0,$$

donc l'équation d'entropie a un terme source signé.

▷ Invariance par changement de référentiel : $\Psi(\phi, s, D)$ ne dépend que de ϕ, s et de $\mathrm{tr}(D^k)$, $k = 1, \ldots, N$. On peut décomposer

$$D = \frac{\mathrm{tr}(D)}{N}\,\mathrm{Id} + D', \qquad \mathrm{tr}(D') = 0.$$

C'est une décomposition orthogonale car $0 = tr(D') = D' : \mathrm{Id}$. Alors $\mathrm{tr}(D^2) = |D|^2 = |D'|^2 + \mathrm{tr}(D)^2/N$.

Donc en 2d Ψ ne dépend que de $\mathrm{tr}(D)$ et de $|D'|$.

En 3d Ψ peut en plus dépendre de $\det(D)$.

▷ Exemple : fluide newtonien

$$\Psi(\phi, s, D) = -p_0(\phi, s)\,\mathrm{tr}\,D + \eta(\phi, s)\frac{|D|^2}{2} + \lambda(\phi, s)\frac{(\mathrm{tr}\,D)^2}{2}.$$

On a $\partial\Psi(\phi, s, 0) = \{-p_0(\phi, s)\,\mathrm{Id}\}$, la compatibilité thermodynamique est vérifiée.
▷ Une loi est "purement plastique" (ie sans viscosité) si Ψ est homogène de degré 1, ie

$$\forall\lambda > 0 \quad \Psi(\lambda D) = \lambda\Psi(D).$$

Alors $\partial\Psi$ est homogène de degré 0, donc la loi $\sigma \in \partial\Psi(\phi, s, D)$ ne dépend (pour $D \neq 0$) que de $D/|D|$, et pas de $|D|$. On dit aussi qu'elle est "rate independent". Voir la thèse de D. Nguyen-Hoai [27] chapitre 2.
▷ Exemple de loi purement plastique :

$$\Psi(\phi, s, D) = -p_0(\phi, s)\,\mathrm{tr}(D) + \mu_s p_0(\phi, s)|D'|,$$

avec μ_s constant (ou dépendant de ϕ, s).

▷ Exemple : modèle Drucker dilatant (Andreotti-Forterre-Pouliquen p.158)

$$\Psi = p_0 \left(\sin\psi\, |D'| - \mathrm{tr}(D)\right)_+ .$$

Alors pour $D' \neq 0$

$$\partial_D \Psi = p_0 \mathbf{1}_{\mathrm{tr}(D) \leq \sin\psi\, |D'|} \left(\sin\psi\, \frac{D'}{|D'|} - \mathrm{Id}\right),$$

donc

$$p = p_0 \mathbf{1}_{\mathrm{tr}(D) \leq \sin\psi\, |D'|}, \qquad \sigma' = p_0 \sin\psi \mathbf{1}_{\mathrm{tr}(D) \leq \sin\psi\, |D'|} \frac{D'}{|D'|} = \sin\psi\, p \frac{D'}{|D'|}.$$

On retrouve une loi de type Drucker-Prager (compressible), mais avec $\sin\psi$ constant (pas de viscosité). On remarque que p est toujours positif ou nul (c'est le cas dans tous les modèles écrits ici). On a

$$\partial\Psi(0) = \{\sigma \mid \sigma = p_0 \alpha(\sin\psi\, V - \mathrm{Id}), \quad \text{avec } |V| \leq 1,\ \mathrm{tr}(V) = 0,\ 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

On a bien la compatibilité thermodynamique $\partial\Psi(0) \ni -p_0\, \mathrm{Id}$.

▷ Les modèles de la théorie cinétique étendue (Jenkins et al.) donnent des formules (compliquées) pour σ (en termes de ϕ, T, Du). Est-ce qu'elles s'écrivent sous la forme $\partial\Psi$?

▷ Barker et al. 2017 écrivent une loi sous la forme

$$\sigma' = Y(p,\phi,I)\frac{D'}{|D'|}, \qquad \operatorname{div} u \equiv \operatorname{tr}(D) = 2f(p,\phi,I)|D'|,$$

avec toujours $\sigma = -p\,\mathrm{Id} + \sigma'$ et $\operatorname{tr}(\sigma') = 0$. Ils soutiennent qu'on doit avoir

$$\frac{\partial Y}{\partial p} - \frac{I}{2p}\frac{\partial Y}{\partial I} = f + I\frac{\partial f}{\partial I}.$$

Quel est le sens et l'interprétation de cette relation ?

▷ Exemple : le modèle Cam-Clay

$$\Psi = \frac{p_0}{2}\frac{\sin\delta|D'|}{Y+\sqrt{1+Y^2}}, \quad \text{avec } Y = \frac{\mathrm{tr}(D)}{|D'|\sin\delta}.$$

Alors on vérifie que p vérifie $0 \leq p \leq p_0$, et p est déterminé par l'équation

$$\frac{\mathrm{tr}(D)}{|D'|} = \frac{1}{2}\sin\delta\frac{p_0/p-2}{\sqrt{p_0/p-1}},$$

tandis que σ' est donné par

$$\sigma' = \sin\delta p\sqrt{p_0/p-1}\frac{D'}{|D'|}.$$

▷ On a un effet de dilatance :

$$tr(D) \geq 0 \text{ pour } p \leq p_0/2, \qquad \mathrm{tr}(D) \leq 0 \text{ pour } p \geq p_0/2.$$

On dit que $p_0/2$ est la pression critique (et rappelons que $p_0 = p_0(\phi, s)$).
▷ C'est encore un modèle purement plastique (sans viscosité).

▷ Dilatance pour une loi générale. Pour une loi générale Ψ, par la relation $\sigma \in \partial\Psi(D)$, décomposant $D = (\operatorname{tr} D, D')$ on déduit (là où Ψ est différentiable) les lois $p(\operatorname{tr} D, D')$ et $\sigma'(\operatorname{tr} D, D')$. On peut alors définir

$$p_c(D') = -p(\operatorname{tr} D = 0, D').$$

Comme Ψ est convexe, $p = -\partial\Psi/\partial(\operatorname{tr} D)$ est décroissante par rapport à $\operatorname{tr} D$. On en déduit

$$\boxed{\begin{array}{c} \operatorname{div} u = \operatorname{tr} D > 0 \Leftrightarrow p < p_c(D'), \\ \operatorname{tr} D < 0 \Leftrightarrow p > p_c(D'). \end{array}}$$

Les modèles purement plastiques. Pour les modèles purement plastiques (Ψ homogène de degré 1), on a des propriétés particulières.
▷ En chaque D pour lequel Ψ est différentiable en D, $\sigma = \partial_D \Psi$ ne dépend que de $D/|D|$, il reste donc dans une sous-variété de codimension 1.
▷ En chaque D pour lequel Ψ est différentiable en D, une petite variation δD de D induit une variation $\delta\sigma$ de σ, qui vérifie

$$\delta\sigma : D = 0.$$

On dit que la rhéologie est "associée". La déformation est normale à la variété où vit σ.
▷ La démonstration est la suivante. Ψ est homogène de degré 1

$$\Psi(\lambda D) = \lambda \Psi(D).$$

Dérivant par rapport à D on trouve

$$\partial_D \Psi(\lambda D) = \partial_D \Psi(D),$$

ie $\partial_D \Psi$ est homogène de degré 0. Dérivant ensuite par rapport à λ on trouve

$$\partial^2_{DD} \Psi(\lambda D) D = 0.$$

Prenant $\lambda = 1$ et notant que $\partial^2_{DD} \Psi(D) = \delta\sigma$, on obtient le résultat.

Conclusion

▷ Les lois rhéologiques incompressibles sont insuffisantes à la fois pour des raisons de modélisation et des raisons mathématiques

▷ Plusieurs formes de lois rhéologiques compressibles sont proposées dans la littérature.

▷ Il faut trouver la bonne loi qui incorpore autant que possible les échelles de la loi $\mu(I)$!

[1] O. Pouliquen, Scaling laws in granular flows down rough inclined planes, Phys. Fluids 11, 542, 1999, http://dx.doi.org/10.1063/1.869928

[2] O. Pouliquen, Y. Forterre, Friction law for dense granular flows : Application to the motion of a mass down a rough inclined plane, J. Fluid Mech. 453, 133-151, 2002, http://dx.doi.org/10.1017/S0022112001006796

[3] B. Andreotti, Y. Forterre, O. Pouliquen, Les milieux granulaires, entre fluide et solide, EDP sciences et CNRS éditions, collection savoirs actuels, 2011.

[4] T. Barker, D.G. Schaeffer, P. Bohorquez, J.M.N.T. Gray, Well-posed and ill-posed behaviour of the $\mu(I)$-rheology for granular flow, J. Fluid Mech. 779, 794-818, 2015, http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2015.412

[5] N. Martin, I.R. Ionescu, A. Mangeney, F. Bouchut, M. Farin, Continuum viscoplastic simulation of a granular column collapse on large slopes : $\mu(I)$ rheology and lateral wall effects, Phys. Fluids 29, 013301, 2017, http://dx.doi.org/10.1063/1.4971320

[6] H. Brézis, Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973. North-Holland Mathematics Studies, No. 5. Notas de Matemática (50).

[7] G. Duvaut and J.-L. Lions, Inequalities in mechanics and physics, Springer-Verlag, Berlin, 1976. Translated from the French by C. W. John, Grundlehren der Mathematischen Wis- senschaften, 219.

[8] R. Glowinski, J.-L. Lions, and R. Trémolières, Numerical analysis of variational inequalities, volume 8 of Studies in Mathematics and its Applications. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981. Translated from the French.

[9] R. Temam, Problèmes mathématiques en plasticité, volume 12 of Méthodes Mathématiques de l'Informatique. Gauthier-Villars, Montrouge, 1983.

[10] R. Glowinski, Numerical methods for nonlinear variational problems, Springer 2008 (reprint from the 1984 edition).

[11] H. Brézis, Monotonicity in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations, 101-156, in "Contributions to nonlinear functional analysis", ed. by E. Zarantonello, Academic, New-York, 1971.

[12] M. Fortin, R. Glowinski, Studies in Mathematics and its Applications15(C), 1983.

[13] P. Saramito, N. Roquet, An adaptive finite element method for viscoplastic fluid flows in pipes, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 190, 5391-5412, 2001, http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(01)00175-X

[14] D. Bresch, E. D. Fernández-Nieto, I. R. Ionescu, P. Vigneaux, Augmented Lagrangian method and compressible visco-plastic flows : applications to shallow dense avalanches. In New directions in mathematical fluid mechanics, Adv. Math. Fluid Mech., 57-89. Birkhäuser Verlag, Basel, 2010.

[15] E. D. Fernández-Nieto, J. M. Gallardo, P. Vigneaux, Efficient numerical schemes for viscoplastic avalanches. Part 1 : The 1D case. J. Comput. Phys. 264, 55-90, 2014, http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2014.01.026

[16] P. Saramito, A damped Newton algorithm for computing viscoplastic fluid flows, J. Non-newtonian fluid mechanics 238, 6-15, 2016, http://dx.doi.org/10.1016/j.jnnfm.2016.05.007

[17] P. Saramito, A. Wachs, Progress in numerical simulation of yield stress fluid flows, Rheologica Acta 56, 211-230, 2017, http://dx.doi.org/10.1007/s00397-016-0985-9

[18] F. Bouchut, R. Eymard, A. Prignet, Convergence of conforming approximations for inviscid incompressible Bingham fluid flows and related problems, J. Evolution Eq., 14, 635-669, 2014. http://dx.doi.org/10.1007/s00028-014-0231-9

[19] Chambolle, T. Pock, An introduction to continuous optimization for imaging, Acta Numerica, 161-319, 2016, http://dx.doi.org/10.1017/S096249291600009X

[20] A. Chambolle, T. Pock, A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging, J. Math. Imaging and Vision 40, 120-145, 2011, http://dx.doi.org/10.1007/s10851-010-0251-1

[21] E.J. Dean, R. glowinski, G. Guidoboni, On the numerical simulation of Bingham visco-plastic flow : Old and new results, J. Non-newtonian Fluid Mech. 142, 36-62, 2007, http://dx.doi.org/10.1016/j.jnnfm.2006.09.002

[22] L. Chupin, T. Dubois, A bi-projection method for Bingham type flows, Computers and Mathematics with Applications 72, 1263-1286, 2016, http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.026

[23] C. Lusso, A. Ern, F. Bouchut, A. Mangeney, M. Farin, O. Roche, Two-dimensional simulation by regularization of free surface viscoplastic flows with Drucker-Prager yield stress and application to granular collapse, J. Comput. Phys. 333, 387-408, 2017, http://dx.doi.org/10.1016/j.jcp.2016.12.036

[24] T. Barker, D.G. Schaeffer, M. Shearer, J.M.N.T. Gray, Well-posed continuum equations for granular flow with compressibility and $\mu(I)$ rheology, Proc. Royal Soc. A 473, 20160846, 2017, http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2016.0846

[25] J. Heyman, R. Delannay, H. Tabuteau, A. Valance, Compressibility regularizes the $\mu(I)$-rheology for dense granular flows, preprint 2017.

[26] F. Bouchut, E.D. Fernandez-Nieto, A. Mangeney, G. Narbona-Reina, A two-phase two-layer model for fluidized granular flows with dilatancy effects, J. Fluid Mech. 801, 166-221, 2016. http://dx.doi.org/10.1017/jfm.2016.417

[27] D. Nguyen-Hoai, Analysis and approximation of compressible viscoplastic models with general nonlinearity for granular flows, PhD Univ. Gustave Eiffel, 2020, https ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-03078670

Dilatancy in granular/fluid mixtures

We consider a dry granular material. The only non Newtonian effect that we take into account is dilatancy.

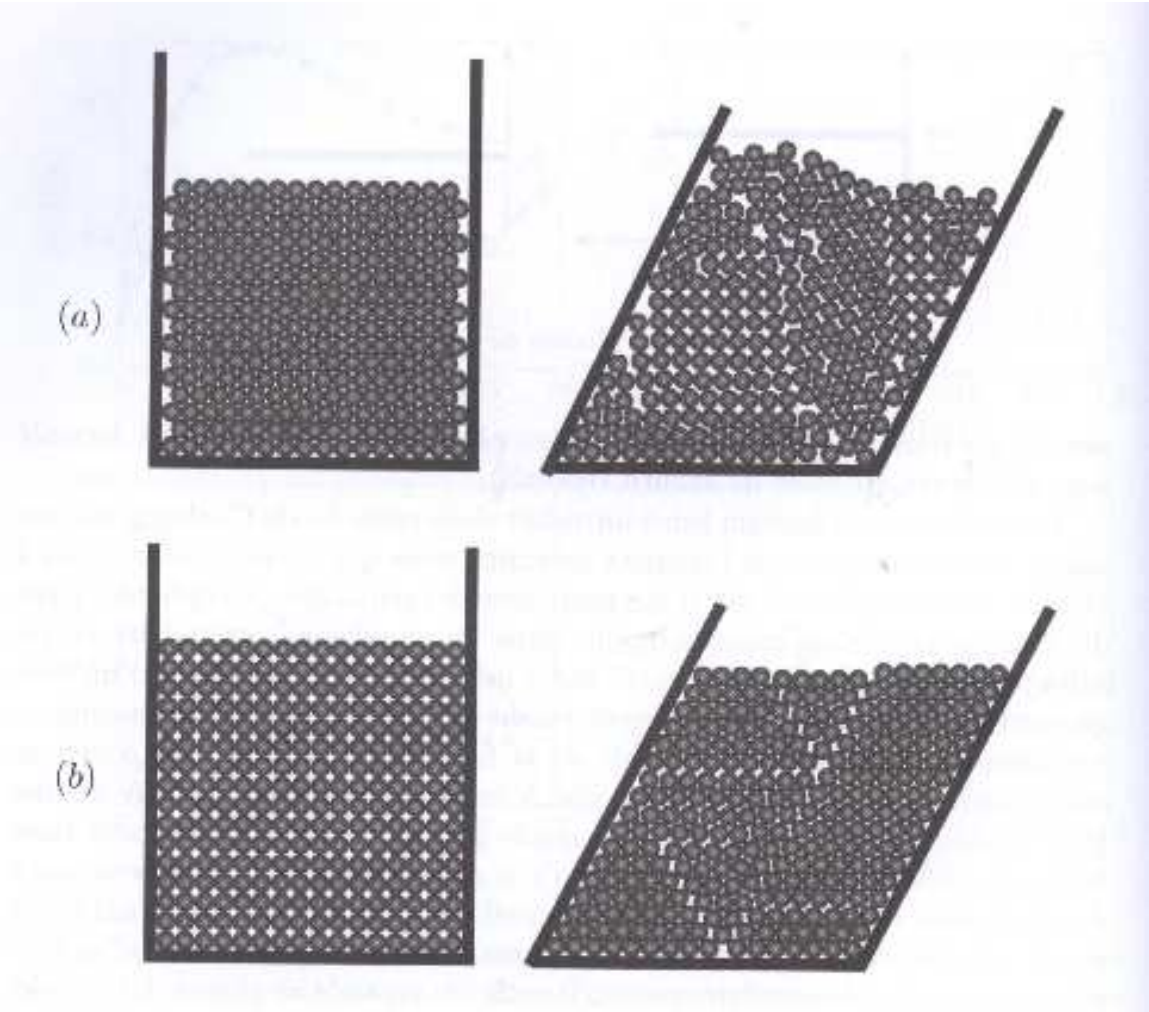

FIG. 4.9 – (a) Dilatance observée lorsqu'on cisaille un empilement bidimensionel triangulaire. (b) Contractance observée lorsqu'on cisaille un empilement carré (dessins inspirés d'expériences de Brown & Richards, 1970).

Figures from "Les milieux granulaires", B. Andreotti, Y. Forterre, O. Pouliquen

(a) The material dilates when deformed

(b) The material contracts when deformed

Relation between deformation and dilation/contraction !

We consider a wet granular material.
Figures from "Les milieux granulaires", B. Andreotti, Y. Forterre, O. Pouliquen

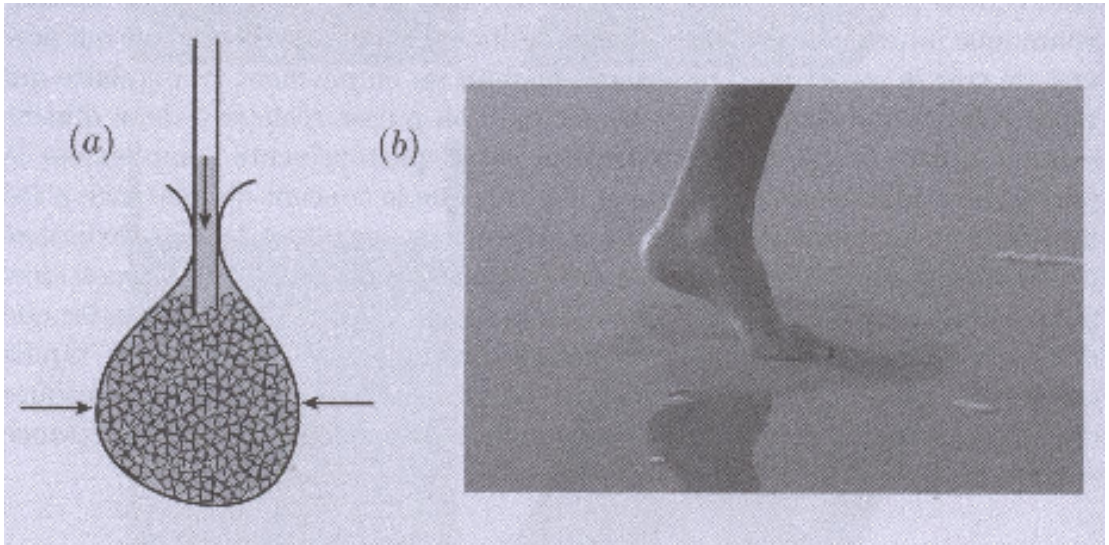

FIG. E4.1 – Exemple de phénomène induit par la dilatance des milieux granulaires. (a) Expérience de Reynolds. (b) Assèchement du sable sous le pied.

- (a), (b) When a dense packing of sand is deformed, the granular material dilates, and water is sucked
- When a loose packing of sand is deformed, the granular material contracts, and water is expelled (ex : landslide, quicksand "sables mouvants").

Basis of classical thin layer approximations :

- Saint Venant (shallow water) model derived from incompressible Euler equations above an almost flat topography
- Savage, Hutter (1989) take into account the bottom friction and main curvature,
- Submerged flows models proposed by Iverson, Denlinger (2001), Pitman, Le (2005), Pailha, Pouliquen (2009), Iverson, George (2014)

Difficulties :

- Complex rheology not taken into account in the above expansions, but only dilatancy effects.
- Physics of diphasic mixtures is involved. Dilatancy laws are not obvious to set.

Benefits :

- Replace viscoplatic laws by boundary friction
- Less space variables is better for simulation

In this talk :

- Use asymptotic expansions as far as possible without introducing heuristic rules.
- Keep the mathematical structure to avoid unphysical effects. In particular, keep an energy balance.

Bouchut, Fernandez-Nieto, Mangeney, Narbona-Reina, J. Fluid Mech. (2016)

We consider a wet granular material. The features to take into account are

- buoyancy force
- interphase friction force (*drag*)
- solid (granular) pressure and pore (fluid) pressure, both non hydrostatic because of the relative interphase velocity
- Dilatancy : the granular material dilates if its volume fraction is larger than a critical value, or contracts in the opposite case. In the first case the granular friction increases (stiffening of the granular matrix). In the second case the granular friction diminishes (fluidisation). Law proposed by Roux and Radjai (1998).

Jackson's model can be written as follows.

- Two mass equations

$$\boxed{\begin{aligned}\partial_t(\rho_s\varphi) + \nabla\cdot(\rho_s\varphi v) &= 0,\\ \partial_t(\rho_f(1-\varphi)) + \nabla\cdot(\rho_f(1-\varphi)u) &= 0,\end{aligned}}$$

  with ρ_s, ρ_f the (constant) solid/fluid mass densities, φ the solid volume fraction, v the solid velocity, and u the fluid velocity.

- Two momentum equations

$$\boxed{\begin{aligned}\rho_s\varphi(\partial_t v + v\cdot\nabla v) &= -\nabla\cdot T_s - \varphi\nabla p_{f_m} + f + \rho_s\varphi\mathbf{g},\\ \rho_f(1-\varphi)(\partial_t u + u\cdot\nabla u) &= -\nabla\cdot T_{f_m} + \varphi\nabla p_{f_m} - f + \rho_f(1-\varphi)\mathbf{g},\end{aligned}}$$

  where $\mathbf{g}$ is gravity, f is the drag force

$$f = \tilde{\beta}(u-v), \qquad \tilde{\beta} = \frac{18\nu_f\rho_f\varphi}{d^2}$$

  with ν_f the fluid viscosity and d the diameter of the grains.

- T_s, T_{f_m} are the solid and fluid stress tensors, taken as

$$T_s = p_s\mathrm{I}d + \widetilde{T}_s, \qquad T_{f_m} = p_{f_m}\mathrm{I}d + \widetilde{T}_{f_m},$$

  with $\widetilde{T}_k$ small far from shearing boundary layers.

Unknowns in Jackson's model :

- 5 unknowns : φ, v (vector), u (vector), p_s, p_{f_m}
- 4 equations (2 vectors)

A constitutive equation is required to close the system : dilatancy law

- Compression/dilation of the solid phase : Roux-Radjai law (1998)

$$\operatorname{div} v = \dot{\gamma} \tan \psi,$$

with ψ the dilation angle, $\dot{\gamma}$ the shear rate. The Pailha-Pouliquen law (2009) for ψ is

$$\tan \psi = K(\varphi - \varphi_c)$$

with φ_c the critical volume fraction. The closure law is finally

$$\operatorname{div} v = K\dot{\gamma}(\varphi - \varphi_c).$$

$$\varphi < \varphi_c \text{ implies compression,}$$
$$\varphi > \varphi_c \text{ implies dilation.}$$

- Impact of the dilatancy angle on the Coulomb friction force :

$$T_s^{xz} = -\tan(\delta + \psi)\frac{v}{|v|}T_s^{zz},$$

with δ the reference friction angle.

- With a slighly modified Roux-Radjai closure, Jackson's system has a relevant energy equation

$$\partial_t \left(\rho_s \varphi \frac{|v|^2}{2} + \rho_f (1-\varphi) \frac{|u|^2}{2} - (\mathbf{g} \cdot X)\big(\rho_s \varphi + \rho_f (1-\varphi)\big) + \rho_s \varphi e_c \right)$$
$$+ \nabla \cdot \left(\rho_s \varphi \frac{|v|^2}{2} v + \rho_f (1-\varphi) \frac{|u|^2}{2} u - (\mathbf{g} \cdot X)\big(\rho_s \varphi v + \rho_f (1-\varphi) u\big) \right.$$
$$\left. + p_{f_m} \big(\varphi v + (1-\varphi) u\big) + \widetilde{T}_{f_m} u + T_s v + \rho_s \varphi e_c v \right)$$
$$= (p_s - p_c) \nabla \cdot v + \widetilde{T}_s : \nabla v + \widetilde{T}_{f_m} : \nabla u + f \cdot (v - u).$$

with X the space position, and the closure is taken as

$$\nabla \cdot v = K_p \dot{\gamma} (p_c(\varphi) - p_s)$$

with $p_c(\varphi)$ the critical pressure, and $e_c(\varphi)$ the critical specific internal energy defined by $de_c/d\varphi = p_c/(\rho_s \varphi^2)$.

- The right-hand side of the energy balance equation is nonpositive
- The closure law can be interpreted as a compressible bulk viscoplastic rheology

$$p_s = p_c(\varphi) - \frac{\nabla \cdot v}{K_p \dot{\gamma}},$$

with $\dot{\gamma} = ||Dv||$, $Dv = (\nabla v + (\nabla v)^t)/2$.

Bouchut, Fernandez-Nieto, Mangeney, Narbona-Reina (2015).

- Two thin layers : one layer of solid/fluid mixture (volume fraction $0 < \varphi < 1$) treated via Jackson's model, and one layer of pure fluid above

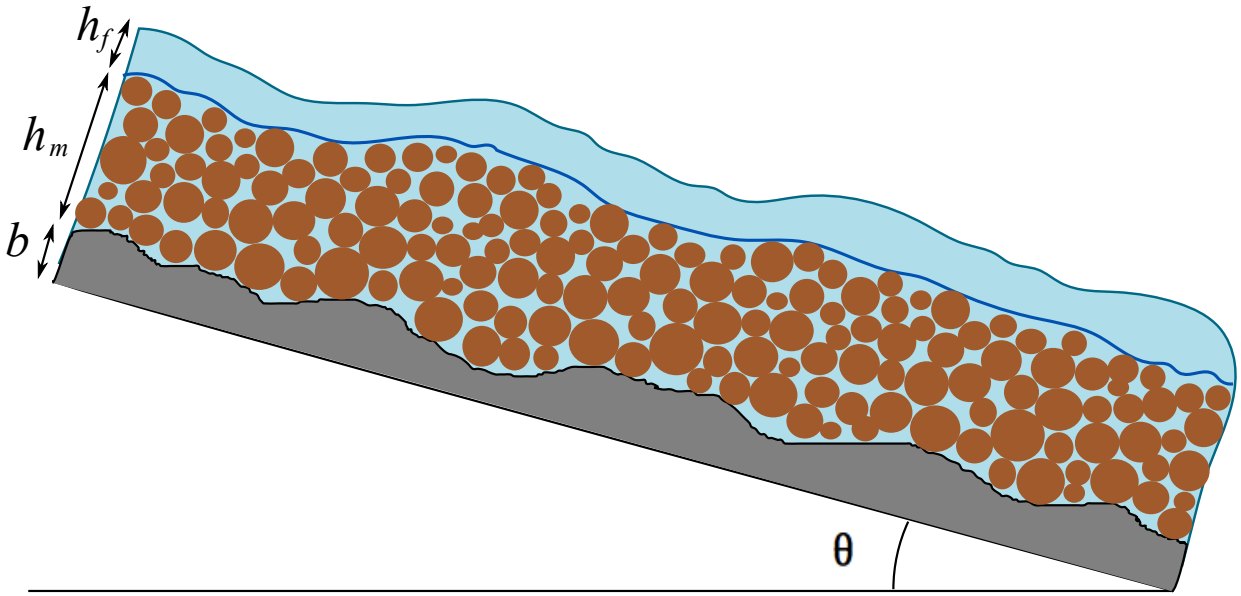

FIG.: Two-layer configuration

- The fluid can enter or get out of the mixture when the granular medium dilates or contracts
- In contrast with all previously proposed models, we have $h_f > 0$, and two unknown velocities (one for the solid and one for the fluid) instead of one.
- Suitable boundary conditions have to be set.

- At the bottom we put non penetration conditions

$$u \cdot n = 0, \qquad v \cdot n = 0,$$

a solid Coulomb friction law

$$(T_s n)_\tau = -\tan \delta_{\text{eff}} \frac{v}{|v|} (T_s n) \cdot n,$$

and a Navier friction condition for the fluid phase

$$(T_{f_m} n)_\tau = -k_b u.$$

- At the free surface we assume no tension for the fluid

$$T_f N_X = 0,$$

together with the kinematic condition

$$N_t + u_f \cdot N_X = 0,$$

where $N = (N_t, N_X)$ is a time-space normal to the free surface.

- At the interface, we have the kinematic condition for the solid phase

$$\tilde{N}_t + v \cdot \tilde{N}_X = 0,$$

where we denote by $\tilde{N} = (\tilde{N}_t, \tilde{N}_X)$ a time-space upward normal to the interface. The total fluid mass is conserved,

$$\tilde{N}_t + u_f \cdot \tilde{N}_X = (1 - \varphi^*)(\tilde{N}_t + u \cdot \tilde{N}_X) \equiv \mathcal{V}_f$$

where φ^* is the value of the solid volume fraction at the interface (the limit is taken from the mixture side). The term $\mathcal{V}_f$ defines the fluid mass that is transferred from the mixture to the fluid-only layer.
The conservation of the total momentum is written

$$\rho_f \mathcal{V}_f (u - u_f) + (T_s + T_{f_m})\tilde{N}_X = T_f \tilde{N}_X.$$

The energy balance through the interface yields the stress transfer condition

$$T_s \tilde{N}_X = \left(\frac{\rho_f}{2} \left((u - u_f) \cdot \frac{\tilde{N}_X}{|\tilde{N}_X|} \right)^2 + \left((T_{f_m} \tilde{N}_X) \cdot \frac{\tilde{N}_X}{|\tilde{N}_X|^2} - p_{f_m} \right) \frac{\varphi^*}{1 - \varphi^*} \right) \tilde{N}_X.$$

These conditions are completed by a Navier fluid friction condition

$$\left(\frac{T_{f_m} + T_f}{2} \tilde{N}_X \right)_\tau = -k_i (u_f - u)_\tau.$$

Velocity equations

$$\begin{aligned}
&\rho_s\bar{\varphi}(\partial_t\overline{v^{\mathsf{x}}} + \overline{v^{\mathsf{x}}}\cdot\nabla_{\mathsf{x}}\overline{v^{\mathsf{x}}}) = -\bar{\varphi}g\cos\theta(\rho_s\nabla_{\mathsf{x}}(b+h_m) + \rho_f\nabla_{\mathsf{x}}h_f)\\
&-(\rho_s-\rho_f)g\cos\theta\frac{h_m}{2}\nabla_{\mathsf{x}}\bar{\varphi} + (1-\bar{\varphi})\overline{\nabla_{\mathsf{x}}p_f^e}\\
&-\operatorname{sgn}(\overline{v^{\mathsf{x}}})\tan\overline{\delta_{eff}}\frac{\bar{\varphi}(\rho_s-\rho_f)g\cos\theta h_m - (p_f^e)_b}{h_m}\\
&+\bar{\beta}(\overline{u^{\mathsf{x}}}-\overline{v^{\mathsf{x}}}) - \bar{\varphi}\rho_s g\sin\theta(1,0)^t,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\rho_f(\partial_t\overline{u^{\mathsf{x}}} + \overline{u^{\mathsf{x}}}\cdot\nabla_{\mathsf{x}}\overline{u^{\mathsf{x}}}) = -\rho_f g\cos\theta\nabla_{\mathsf{x}}(b+h_m+h_f)\\
&-\frac{1-\bar{\varphi}}{(1-\bar{\varphi})h_m+h_f}h_m\overline{\nabla_{\mathsf{x}}p_f^e}\\
&-\frac{k_b\overline{u^{\mathsf{x}}} + \bar{\beta}h_m(\overline{u^{\mathsf{x}}}-\overline{v^{\mathsf{x}}})}{(1-\bar{\varphi})h_m+h_f} - \rho_f g\sin\theta(1,0)^t,
\end{aligned}$$

Contains the average gradient of excess pore pressure $\overline{\nabla_{\mathsf{x}}p_f^e}$.
Fluid and solid pressures are expressed as

$$p_f = \rho_f g\cos\theta(b+h_m+h_f-z) + p_f^e,$$

$$p_s = \bar{\varphi}(\rho_s-\rho_f)g\cos\theta(b+h_m-z) - p_f^e.$$

Additionally to the hydrostatic pressures, they contain the excess pressure p_f^e, that is related to the dilatancy law $\bar{\Phi}$.

Our thin-layer averaged model has three scalar equations on h_m, h_f, φ instead of two :

$$\boxed{\begin{aligned}&\partial_t(\bar\varphi h_m) + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot(\bar\varphi h_m \overline{v^{\mathbf{x}}}) = 0,\\ &\partial_t\big((1-\bar\varphi)h_m + h_f\big) + \nabla_{\mathbf{x}}\cdot\big((1-\bar\varphi)h_m\overline{u^{\mathbf{x}}} + h_f\overline{u_f^{\mathbf{x}}}\big) = 0,\\ &\partial_t\bar\varphi + \overline{v^{\mathbf{x}}}\cdot\nabla_{\mathbf{x}}\bar\varphi. = -\bar\varphi\bar\Phi.\end{aligned}}$$

with

$$\bar\Phi = K\bar{\dot\gamma}(\bar\varphi - \bar\varphi_c).$$

It satisfies

- conservation of granular and fluid mass
- conservation of total momentum
- decrease of energy
- dilatancy with excess pore pressure, and fluidisation/stiffening of the granular material
- convergence to hydrostatic equilibrium in case of no external forces
- diffusion term on the relative velocity similar to the George-Iverson model

We get a hyperbolic system of conservation laws. Numerical simulations in progress !

Open problem : include viscoplastic rheology with yield stress

The modeling of dry and wet granular materials faces several very difficult issues

- The used (incompressible) viscoplastic laws are not justified from microscopic laws
- They are ill-posed
- Need to write a geophysically, mechanically and mathematically relevant rheology for compressible viscoplastic materials with yield stress (to represent the static and flowing behaviours) and dilatancy
- We do not know the form of equations for which there would be well-posedness
- Need to derive associated thin-layer models