

Bonnafoux

Juin 2017

Clément

Mémoire de stage du M2R mathématiques fondamentales.

Institut Fourier.

OPÉRATEUR DE CHALKER-CODDINGTON : PROPRIÉTÉS, SYMÉTRIES ET SPECTRE.

Directeur de stage : Alain JOYE.

Ce travail a été partiellement soutenu par le LabEx PERSYVAL-Lab
(ANR-11-LABX-0025-01) financé par le programme français Investissement d'Avenir.

Table des matières

1	Introduction.	2
2	Présentation du modèle.	2
2.1	Le modèle.	2
2.2	Premières propriétés.	4
3	Un cas particulier : toutes les matrices de scattering sont identiques.	5
3.1	Transformation de Fourier.	5
3.2	Spectre de l'opérateur.	7
4	Le modèle de Chalker-Coddington avec symétrie verticale.	8
4.1	Transformation de Fourier selon l'axe vertical.	9
4.2	Lien avec les marches quantiques et propriétés de l'opérateur.	10
5	Chalker-Coddington avec interface séparant deux classes de matrices particulières.	12
5.1	Description du modèle.	12
5.2	Dans le cas où il n'y a pas d'interface.	14
5.3	Spectre de l'opérateur restreint à une interface quelconque.	16
6	Vecteurs propres généralisés.	17
6.1	Matrices de transferts.	18
6.2	Conditions pour avoir un vecteur propre dans $\ell^2(\mathbb{Z})$	19
7	Annexes.	23
A	Sur les marches quantiques.	23
B	Opérateur d'entrelacement.	24

1 Introduction.

Chalker et Coddington ont introduit en 1988 un modèle de transport quantique d'électrons dans le plan soumis à un potentiel désordonné et un champ magnétique perpendiculaire au plan (voir [3]). Ce modèle dit de Chalker-Coddington est effectif au sens où il se base sur les principaux aspects de la dynamique observée sans pour autant vraiment prendre en compte les propriétés physiques qui en sont à l'origine. Les propos qui suivent concernent seulement un point de vue mathématiques sur l'opérateur unitaire qui en découle.

Nous nous intéressons plus particulièrement aux propriétés spectrales de ce modèle bidimensionnel notamment lorsqu'il comporte certaines symétries. En effet, nous verrons que sous l'hypothèse d'une symétrie verticale il est possible de réduire le problème à l'étude d'un type de marches quantiques unidimensionnelles. Toujours sous l'hypothèse de la symétrie verticale on étudiera plus en détails certains cas particuliers, notamment lorsqu'il existe des sous-espaces stables sous l'opérateur.

2 Présentation du modèle.

2.1 Le modèle.

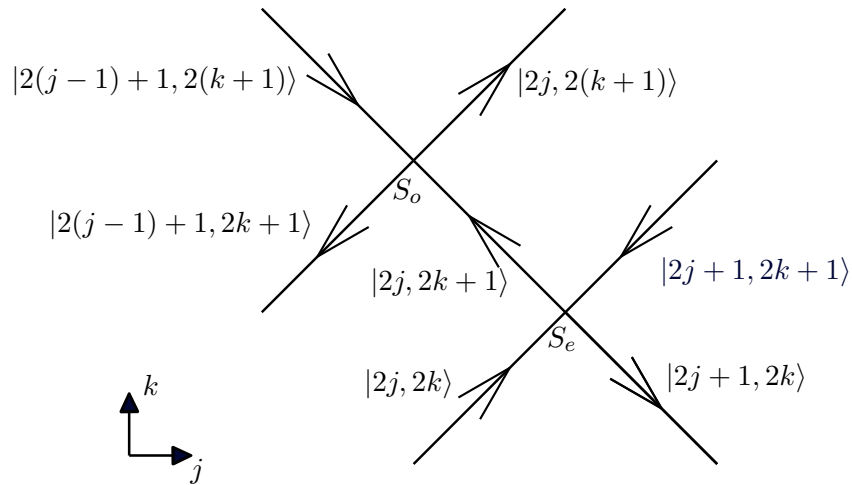
On considère l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}^2)$ munit de sa base canonique orthonormée :

$$(2.1) \quad \{|j, k\rangle, (j, k) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

C'est à dire que si $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$ alors :

$$|j, k\rangle(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = (j, k) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $\{S_{(j+1/2, k+1/2)}, (j, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ une collection de matrices de $O_2(\mathbb{R})$ (orthogonale 2×2 à coefficients réels). On décrit l'opérateur de Chalker-Coddington U_{cc} par son action sur les vecteurs de base. Graphiquement on représente le modèle de la manière suivante :



$$o = (2(j-1) + 1 + 1/2, 2k + 1 + 1/2)$$

$$e = (2j + 1/2, 2k + 1/2)$$

Définition 2.1. On appelle plaquette un élément du réseau $\{(2j + 1/2, 2k + 1/2), (j, k) \in \mathbb{Z}^2\} \cup \{(2j + 1 + 1/2, 2k + 1 + 1/2), (j, k) \in \mathbb{Z}^2\}$. Il y a donc deux types de plaquette : celles pour lesquelles les parties entières de ses coordonnées sont paires et celles pour lesquelles elles sont impaires.

Définition 2.2. Les matrices $\{S_{(j+1/2, k+1/2)}, (j, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ (associées aux plaquettes) sont appelées matrices de scattering. Elles représentent le lien entre les vecteurs entrant sur la plaquette et les vecteurs sortant.

Remarque 2.1. Pour plus de commodité on notera $S_{(j,k)}$ pour $S_{(j+1/2, k+1/2)}$.

Plus formellement l'action de U_{cc} sur les vecteurs de base se fait via les matrices de scattering autour des différentes plaquettes (les paires et les impaires). Soient $e = (2j+1/2, 2k+1/2)$, $o = (2j + 1 + 1/2, 2k + 1 + 1/2)$, on note :

$$S_e = \begin{pmatrix} r_e & -t_e \\ t_e & r_e \end{pmatrix} \text{ et } S_o = \begin{pmatrix} r_o & -t_o \\ t_o & r_o \end{pmatrix}$$

où r_e, t_e, r_o, t_o sont des réels tels que $r_e^2 + t_e^2 = 1$ et $r_o^2 + t_o^2 = 1$.

On pose alors :

$$U_{cc} \begin{pmatrix} |2j, 2k\rangle \\ |2j + 1, 2k + 1\rangle \end{pmatrix} = S_e \begin{pmatrix} |2j + 1, 2k\rangle \\ |2j, 2k + 1\rangle \end{pmatrix}$$

$$\text{et } U_{cc} \begin{pmatrix} |2j + 2, 2k + 1\rangle \\ |2j + 1, 2k + 2\rangle \end{pmatrix} = S_o \begin{pmatrix} |2j + 2, 2k + 2\rangle \\ |2j + 1, 2k + 1\rangle \end{pmatrix}$$

Au sens où :

$$U_{cc}(|2j, 2k\rangle) = r_e|2j + 1, 2k\rangle - t_e|2j, 2k + 1\rangle$$

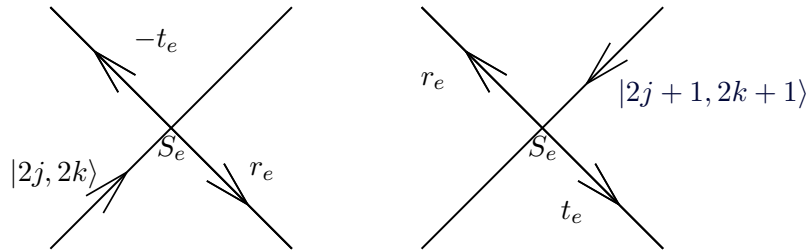
$$U_{cc}(|2j + 1, 2k + 1\rangle) = t_e|2j + 1, 2k\rangle + r_e|2j, 2k + 1\rangle$$

$$U_{cc}(|2j + 2, 2k + 1\rangle) = r_o|2j + 2, 2k + 2\rangle - t_o|2j + 1, 2k + 1\rangle$$

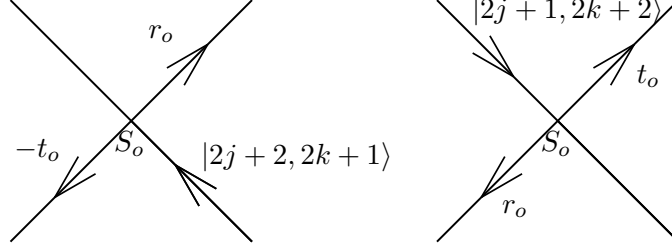
$$U_{cc}(|2j + 1, 2k + 2\rangle) = t_o|2j + 2, 2k + 2\rangle + r_o|2j + 1, 2k + 1\rangle$$

On représente cela de la manière suivante :

— Dans le cas où l'on rentre sur une plaquette paire (i.e dont les coordonnées sont telles que leur parties entières sont paires). Cela concerne les vecteurs de base (celle introduite en 2.1) dont les deux coordonnées sont de la même parité.



- Dans le cas où on rentre sur une plaquette impaire. Cela concerne les vecteurs de base dont les deux coordonnées sont de parité différente.



Remarque 2.2. Si l'on se donne une condition initiale $\psi \in \mathcal{H}$ qui s'écrit seulement selon des vecteurs de base qui rentrent sur des plaquettes paires (i.e selon des vecteurs $|j, k\rangle$ où $j, k \in \mathbb{Z}$ sont de même parité) alors $U_{cc}(\psi)$ s'écrit seulement selon des vecteurs de base qui rentrent sur des plaquettes impaires (i.e selon des vecteurs $|j, k\rangle$ où j et k sont de parité différente). De même, pour une condition initiale ψ qui s'écrit seulement selon des vecteurs de base qui rentrent sur des plaquette impaires on a que les composantes de $U_{cc}(\psi)$ dans la base canonique de \mathcal{H} seront toutes rentrantes sur des plaquettes paires.

2.2 Premières propriétés.

Proposition 2.1. L'opérateur de Chalker-Coddington U_{cc} est unitaire.

Démonstration. Il suffit de montrer que l'image la base canonique orthonormée de \mathcal{H} par U_{cc} est encore une base orthonormée. Soient $(j, k), (j_1, k_1) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $|j, k\rangle$ et $|j_1, k_1\rangle$ ne soient pas deux vecteurs entrant sur la même plaquette. Par définition de U_{cc} on a que $\langle U_{cc}|j, k\rangle | U_{cc}|j_1, k_1\rangle \rangle = 0$. Il reste à vérifier l'orthogonalité dans les autres cas : entre les images de deux vecteurs de base rentrant sur la même plaquette. On note $e = (2j + 1/2, 2k + 1/2)$ et $o = (2j + 1 + 1/2, 2k + 1 + 1/2)$

$$\begin{aligned} \langle U_{cc}(|2j, 2k\rangle) | U_{cc}(|2j + 1, 2k + 1\rangle) \rangle &= \langle r_e | 2j + 1, 2k\rangle - t_e | 2j, 2k + 1\rangle | t_e | 2j + 1, 2k\rangle + r_e | 2j, 2k + 1\rangle \rangle \\ &= r_e t_e - t_e r_e \text{ (les coefficients de } S_e \text{ sont réels)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

De même :

$$\langle U_{cc}(|2j + 2, 2k + 1\rangle) | U_{cc}(|2j + 1, 2k + 2\rangle) \rangle = 0.$$

De plus, $\{U_{cc}(|j, k\rangle), (j, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ contient $\{|j, k\rangle, (j, k) \in \mathbb{Z}^2\}$. En effet, on montre que $|2j + 1, 2k\rangle \in \{U_{cc}(|j, k\rangle), (j, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ (il faudrait faire exactement la même chose pour les autres vecteurs). Si $t_e = 0$ alors $r_e = \pm 1$ donc $r_e U_{cc}(|2j, 2k\rangle) = |2j + 1, 2k\rangle$. De même si $t_e = \pm 1$ alors $r_e = 0$ donc $t_e U_{cc}(|2j + 1, 2k + 1\rangle) = |2j + 1, 2k\rangle$. Sinon, t_e et r_e sont non nuls donc on peut écrire $|2j + 1, 2k\rangle = r_e t_e \left(\frac{1}{t_e} U_{cc}(|2j, 2k\rangle) + \frac{1}{r_e} U_{cc}(|2j + 1, 2k + 1\rangle) \right)$.

Enfin $\|U_{cc}(|j, k\rangle)\|^2 = r_g^2 + t_g^2 = 1$ où g est la coordonnée de la plaquette sur laquelle le vecteur $|j, k\rangle$ rentre. On en conclut que $\{U_{cc}(|j, k\rangle), (j, k) \in \mathbb{Z}^2\}$ est une base orthonormée de \mathcal{H} . \square

Comme U_{cc} est unitaire on a déjà que son spectre est inclus dans le cercle unité. Certaines symétries de l'opérateur nous permettent d'obtenir un peu plus d'informations. Dans toute la suite on note $\rho(U_{cc})$ l'ensemble résolvant et $\sigma(U_{cc})$ le spectre.

Proposition 2.2. λ appartient à $\sigma(U_{cc})$ si et seulement si $\bar{\lambda}$ appartient à $\sigma(U_{cc})$.

Démonstration. On définit l'application suivante :

$$\mathcal{C} : \mathcal{H} \ni \psi = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \psi(x)|x\rangle \mapsto \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \overline{\psi(x)}|x\rangle.$$

Comme les matrices de scattering sont à coefficients réels on a que $\mathcal{C} \circ U_{cc} \circ \mathcal{C} = U_{cc}$. Si $z \in \rho(U_{cc})$ alors $(U_{cc} - z)^{-1}$ existe et est borné. De plus on a que $\mathcal{C} \circ z\text{Id} \circ \mathcal{C} = \bar{z}\text{Id}$. Par conséquent :

$$(U_{cc} - \bar{z})^{-1} = (\mathcal{C}(U_{cc} - z)\mathcal{C})^{-1} = \mathcal{C}(U_{cc} - z)^{-1}\mathcal{C}$$

existe et est borné. On en déduit le résultat. \square

Proposition 2.3. λ appartient à $\sigma(U_{cc})$ si et seulement si $-\lambda$ appartient à $\sigma(U_{cc})$.

Démonstration. Soit \mathcal{S} l'endomorphisme de \mathcal{H} défini par son action sur les vecteurs de base comme suit :

$$\mathcal{S}(|j, k\rangle) = (-1)^{j+k}|j, k\rangle \text{ où } (j, k) \in \mathbb{Z}^2.$$

Grâce à la remarque 2.2 on a que $\mathcal{S} \circ U_{cc} \circ \mathcal{S} = -U_{cc}$. Si $z \in \rho(U_{cc})$ alors $(U_{cc} - z)^{-1}$ existe et est borné. Par conséquent :

$$(U_{cc} + z)^{-1} = (-\mathcal{S}U_{cc}\mathcal{S} + \mathcal{S}z\mathcal{S})^{-1} = -\mathcal{S}(U_{cc} - z)^{-1}\mathcal{S}$$

existe et est borné. On en déduit le résultat. \square

3 Un cas particulier : toutes les matrices de scattering sont identiques.

On suppose ici que toutes les matrices de scattering sont identiques égales à S , où

$$S = \begin{pmatrix} r & -t \\ t & r \end{pmatrix} \text{ avec } r \text{ et } t \text{ deux réels tels que } r^2 + t^2 = 1.$$

3.1 Transformation de Fourier.

Définition 3.1. On définit \mathcal{K} l'espace des fonctions $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)^T \in L^2([-\pi, \pi]^2, \mathbb{C}^4)$ telle que :

- f_1 est π -périodique en les deux variables.
- f_2 est π -antipériodique en les deux variables.
- f_3 est π -périodique en la première variable et π -antipériodique en la seconde variable.
- f_4 est π -antipériodique en la première variable et π -périodique en la seconde variable.

C'est un espace de Hilbert.

Proposition 3.1. U_{cc} est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication $M(y_1, y_2)$ défini sur \mathcal{Y} où :

$$M(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & re^{iy_2} & te^{iy_1} \\ 0 & 0 & -te^{-iy_1} & re^{-iy_2} \\ -te^{iy_2} & re^{-iy_1} & 0 & 0 \\ re^{iy_1} & te^{-iy_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque 3.1. On a bien que pour tout $y \in [-\pi, \pi]^2$, $M(y)$ est une matrice unitaire de \mathbb{C}^4 .

Démonstration. De la proposition 3.1.

Comme le modèle de Chalker-Coddington est ici supposé invariant sous les translations horizontales et verticales on effectue une transformation de Fourier en les variables j et k (coordonnées horizontale et verticale respectivement) afin d'obtenir le résultat annoncé. On définit l'application qui consiste à séparer les coordonnées d'un élément de \mathcal{H} dans sa base canonique en fonction du rôle qu'elle joue dans la dynamique.

$$\psi \in \mathcal{H} = \sum_{x \in \mathbb{Z}^2} \psi(x) |x\rangle \mapsto \tilde{\psi} = \begin{pmatrix} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi(2j, 2k) |2j, 2k\rangle \\ \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi(2j+1, 2k+1) |2j+1, 2k+1\rangle \\ \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi(2j, 2k+1) |2j, 2k+1\rangle \\ \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi(2j+1, 2k) |2j+1, 2k\rangle \end{pmatrix} \in \ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^4).$$

On définit alors l'application \mathcal{F} qui à $\tilde{\psi}$ dans $\ell^2(\mathbb{Z}^2, \mathbb{C}^4)$ écrit comme ci-dessus associe :

$$\mathcal{F}(\tilde{\psi}) : (y_1, y_2) \in [-\pi, \pi]^2 \mapsto \begin{pmatrix} \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi(2j, 2k) e^{i\langle 2j, 2k | y_1, y_2 \rangle} \\ \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi(2j+1, 2k+1) e^{i\langle 2j+1, 2k+1 | y_1, y_2 \rangle} \\ \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi(2j, 2k+1) e^{i\langle 2j, 2k+1 | y_1, y_2 \rangle} \\ \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \psi(2j+1, 2k) e^{i\langle 2j+1, 2k | y_1, y_2 \rangle} \end{pmatrix}$$

On note $\tilde{\mathcal{F}}(\psi)$ pour $\mathcal{F}(\tilde{\psi})$ et l'application :

$$\tilde{\mathcal{F}} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{K}$$

est bien définie et unitaire (on munit \mathcal{K} de la mesure $(2\pi)^{-2} d\lambda$ où $d\lambda$ est la mesure de Lebesgue sur $[-\pi, \pi]^2$). On s'intéresse à l'action de $\tilde{\mathcal{F}}U_{cc}$ sur les vecteurs de base. Soit donc $(j, k) \in \mathbb{Z}^2$. D'une part on a :

$$\tilde{\mathcal{F}}(|2j, 2k\rangle)(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} e^{i\langle 2j, 2k | y_1, y_2 \rangle} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'autre part :

$$\tilde{\mathcal{F}}(U_{cc}(|2j, 2k\rangle))(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -te^{iy_2} e^{i\langle 2j, 2k | y_1, y_2 \rangle} \\ re^{iy_1} e^{i\langle 2j, 2k | y_1, y_2 \rangle} \end{pmatrix}$$

On fait de même pour les vecteurs de la forme : $|2j+1, 2k+1\rangle$, $|2j, 2k+1\rangle$ et $|2j+1, 2k\rangle$. Finalement on obtient :

$$(3.1) \quad \tilde{\mathcal{F}}(U_{cc}(\psi))(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & re^{iy_2} & te^{iy_1} \\ 0 & 0 & -te^{-iy_1} & re^{-iy_2} \\ -te^{iy_2} & re^{-iy_1} & 0 & 0 \\ re^{iy_1} & te^{-iy_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tilde{\mathcal{F}}(\psi)(y_1, y_2).$$

On note $M(y_1, y_2)$ la matrice obtenue dans 3.1. Ainsi on a bien que $\tilde{\mathcal{F}}U_{cc}\tilde{\mathcal{F}}^{-1}$ agit comme opérateur de multiplication par $M(y)$. \square

3.2 Spectre de l'opérateur.

Comme $M(y)$ est unitaire (à $y \in [-\pi, \pi]^2$ fixé) on peut la diagonaliser dans une base de vecteurs propres orthonormés $\eta_j(y)$, $j = 1, \dots, 4$. On note les valeurs propres associées $\lambda_j(y)$, $j = 1, \dots, 4$.

Définition 3.2. *On dit que $y \in [-\pi, \pi]^2$ est un point exceptionnel si il existe $j_1, j_2 \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ tels que $\lambda_{j_1}(y) = \lambda_{j_2}(y)$.*

Proposition 3.2. *Si $M(y)$ ne possède pas de points exceptionnels alors :*

$$(3.2) \quad \sigma(U_{cc}) = \bigcup_{j=1}^4 \overline{\{\lambda_j(y), y \in [-\pi, \pi]^2\}}.$$

Démonstration. U_{cc} est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par $M(y)$ sur \mathcal{K} . Dans le cas où cette dernière ne possède pas de points exceptionnels on peut montrer (grâce à un opérateur dit d'entrelacement que l'on détaille dans B) que son spectre est exactement celui donné par (3.2). \square

Dans le cas de la matrice $M(y)$ définie en (3.1) on a en faite que les valeurs propres sont :

$$\left\{ \pm e^{i\frac{\theta(y_1, y_2)}{2}}, \pm e^{i\frac{\pi - \theta(y_1, y_2)}{2}} \right\}.$$

Où θ est tel que :

$$(3.3) \quad \begin{cases} \sin(\theta(y_1, y_2)) = \frac{rt(\sin(2y_1) - \sin(2y_2))}{\sqrt{1 - (rt)^2(\sin(2y_1) - \sin(2y_2))^2}} \\ \cos(\theta(y_1, y_2)) = \sqrt{1 - (rt)^2(\sin(2y_1) - \sin(2y_2))^2}. \end{cases}$$

Remarque 3.2. *On a bien que les valeurs propres sont π -périodiques en les deux variables.*

Une conséquence de (3.3) est que $M(y)$ possède des points exceptionnels si et seulement si $r = t = 2^{-1/2}$. Dans ce cas il y a exactement 2 points exceptionnels :

$$\left\{ \left(\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right), \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \right\}.$$

Sinon, avec la proposition 3.2 on obtient :

Corollaire 3.1. *Si $r, t \neq 2^{-1/2}$ alors $\sigma(U_{cc}) = \bigcup_{j=1}^4 \overline{\{\lambda_j(y), y \in [-\pi, \pi]^2\}}$.*

Remarque 3.3. *Comme U_{cc} est unitaire son spectre est inclus dans le cercle unité. Les valeurs propres $\lambda_j, j \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ sont continues donc si $r, t \neq 2^{-1/2}$ alors $\sigma(U_{cc})$ possède exactement 4 composantes connexes. La distance (sur le cercle unité) entre chacune de ces composantes dépend du produit rt . En effet, plus le produit rt est petit plus la distance est grande.*

Il est en faite possible de généraliser le résultat 3.1 au cas où $r = t = 2^{-1/2}$. Pour cela on a besoin de la notion d'opérateur fibré.

Définition 3.3. Soient \mathcal{H}' un espace de Hilbert séparable et (X, μ) un espace mesuré où μ est une mesure σ -finie. Soit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(X, d\mu, \mathcal{H}')$, on note :

$$\mathcal{H} = \int_X^\oplus \mathcal{H}' d\mu.$$

Une fonction $A(\cdot)$ de X dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$ est dite mesurable si pour tout $\phi, \psi \in \mathcal{H}'$ l'application $\langle \phi | A(\cdot) \psi \rangle$ est μ -mesurable. On note $L^\infty(X, d\mu, \mathcal{L}(\mathcal{H}'))$ l'ensemble des fonctions mesurables de X dans $\mathcal{L}(\mathcal{H}')$ telles que :

$$\|A\|_\infty = \text{ess sup} \|A(x)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}')} < \infty.$$

Définition 3.4. Un opérateur borné A de \mathcal{H} est dit décomposable si il existe une fonction $A(\cdot)$ dans $L^\infty(X, d\mu, \mathcal{L}(\mathcal{H}'))$ telle que pour tout $\phi \in \mathcal{H}$ on ait :

$$\text{Pour tout } x \in X, \quad (A\phi)(x) = A(x)\phi(x).$$

Les opérateurs $A(x)$, $x \in X$ sont appelés fibres de A et on note :

$$A = \int_X^\oplus A(x) d\mu(x).$$

Proposition 3.3. Soit $A = \int_X^\oplus A(x) d\mu(x)$ un opérateur fibré de \mathcal{H} tel que $A(\cdot)$ soit mesurable et $A(x)$ unitaire pour tout $x \in X$. Dans ce cas on a que λ appartient à $\sigma(A)$ si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\mu\left(\left\{x \in X \text{ tel que } \sigma(A(x)) \cap]\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon[\neq \emptyset\right\}\right) > 0.$$

Démonstration. Une preuve est faite dans [5] (théorème 13.85) dans laquelle les fibres $A(x)$ sont supposées auto-adjointes. Elles ne sont pas forcément bornées donc une autre notion de mesurabilité que celle que l'on a introduite ici doit être considérée. Néanmoins la preuve fonctionne pour les opérateurs dont les fibres sont supposées unitaires. \square

Dans le cas qui nous intéresse on a bien à faire à un opérateur fibré dont les fibres sont les matrices $M(y)$ de \mathbb{C}^4 pour $y \in [-\pi, \pi]^2$. Comme les valeurs propres de la matrice $M(y)$ sont continues on en déduit que le corollaire 3.1 reste valable même lorsque $r = t = 2^{-1/2}$.

4 Le modèle de Chalker-Coddington avec symétrie verticale.

Dans la partie précédente on a supposé que toutes les matrices de scattering étaient identiques (symétrie verticale et horizontale). Ici on s'intéresse au cas de la symétrie verticale seulement. Pour cela on se donne une collection de matrices de scattering $(S_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ et on considère le modèle de Chalker-Coddington introduit précédemment (partie 2.1) avec l'hypothèse supplémentaire suivante :

$$\text{Pour tout } j \in \mathbb{Z} \text{ on a } S_{j,k} = S_j \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Notre but est de nous ramener à une marche quantique $U_q(y)$ en dimension 1 où $y \in [-\pi, \pi]$ est le paramètre introduit lors de la transformation de Fourier selon l'axe vertical. On définit ce qu'est une marche quantique en dimension 1 dans l'annexe A.

4.1 Transformation de Fourier selon l'axe vertical.

Soit \mathcal{Y} l'espace des fonctions $f = (f_1, f_2)^T \in L^2([-\pi, \pi], \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2), d\lambda/2\pi)$ telles que $f_1 \in L^2([-\pi, \pi], \ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}))$ est π -périodique et f_2 est π -antipériodique. On définit l'application \mathcal{F} sur \mathcal{H} et à valeurs dans \mathcal{Y} de la manière suivante. Si $\psi \in \mathcal{H}$ est de coordonnées dans la base canonique notées $(\psi(j, k))_{j, k \in \mathbb{Z}}$ alors :

$$\mathcal{F}(\psi)(y) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \Psi_j^e(y) \\ \Psi_j^o(y) \end{pmatrix} \otimes |j\rangle.$$

Où :

$$(4.1) \quad \Psi_j^e(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(j, 2k) e^{i2ky} \quad \text{et} \quad \Psi_j^o(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi(j, 2k+1) e^{i(2k+1)y}.$$

Remarque 4.1. *L'application \mathcal{F} est unitaire. En effet, son image est dense dans \mathcal{Y} et c'est une isométrie :*

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(\psi)\|_{L^2}^2 &= \int_0^{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\psi(j, 2k)|^2 + |\psi(j, 2k+1)|^2 \right) \frac{d\lambda}{2\pi} \\ &= \|\psi\|_{\ell^2}^2. \end{aligned}$$

On note $|+1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ les deux vecteurs de base de \mathbb{C}^2 . On s'intéresse maintenant à l'action de $\mathcal{F}U_{cc}\mathcal{F}^{-1}$ sur les vecteurs de la forme suivante. Soient j, k dans \mathbb{Z} :

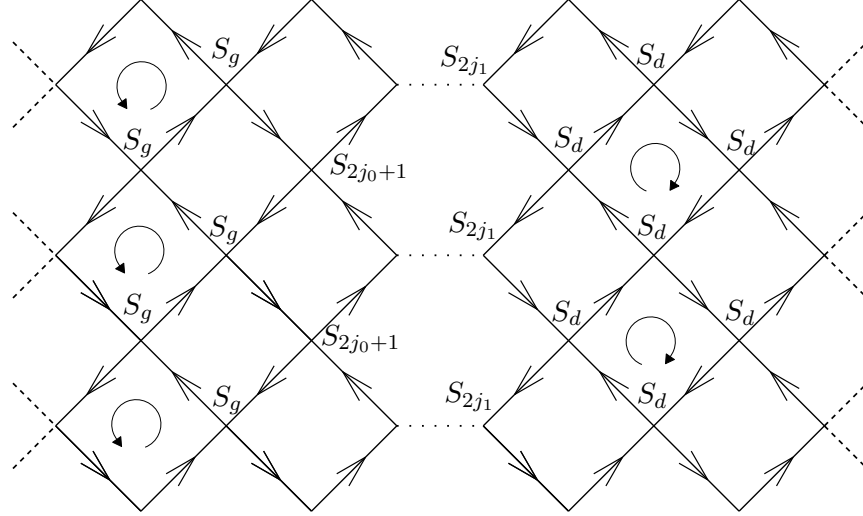
$$\begin{aligned} y &\mapsto e^{i2ky} |+1\rangle \otimes |2j\rangle, & y &\mapsto e^{i2ky} |+1\rangle \otimes |2j+1\rangle \\ \text{et } y &\mapsto e^{i(2k+1)y} |-1\rangle \otimes |2j\rangle, & y &\mapsto e^{i(2k+1)y} |-1\rangle \otimes |2j+1\rangle \end{aligned}$$

Ainsi on a :

$$(4.2) \quad \begin{aligned} \mathcal{F}U_{cc}\mathcal{F}^{-1}(e^{i2k\cdot} |+1\rangle \otimes |2j\rangle)(y) &= \begin{aligned} &-t_{2j} e^{iy} e^{i2ky} |-1\rangle \otimes |2j\rangle \\ &+ r_{2j} e^{i2ky} |+1\rangle \otimes |2j+1\rangle \end{aligned} \\ \mathcal{F}U_{cc}\mathcal{F}^{-1}(e^{i2k\cdot} |+1\rangle \otimes |2j+1\rangle)(y) &= \begin{aligned} &r_{2j+1} e^{-iy} e^{i2ky} |-1\rangle \otimes |2j+1\rangle \\ &+ t_{2j+1} e^{i2ky} |+1\rangle \otimes |2j+2\rangle \end{aligned} \\ \mathcal{F}U_{cc}\mathcal{F}^{-1}(e^{i(2k+1)\cdot} |-1\rangle \otimes |2j\rangle)(y) &= \begin{aligned} &r_{2j-1} e^{iy} e^{i(2k+1)y} |+1\rangle \otimes |2j\rangle \\ &- t_{2j-1} e^{i(2k+1)y} |-1\rangle \otimes |2j-1\rangle \end{aligned} \\ \mathcal{F}U_{cc}\mathcal{F}^{-1}(e^{i(2k+1)\cdot} |-1\rangle \otimes |2j+1\rangle)(y) &= \begin{aligned} &t_{2j} e^{-iy} e^{i(2k+1)y} |+1\rangle \otimes |2j+1\rangle \\ &+ r_{2j} e^{i(2k+1)y} |-1\rangle \otimes |2j\rangle. \end{aligned} \end{aligned}$$

Proposition 4.1. *Si $\hat{\psi} = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \psi_j^e \\ \psi_j^o \end{pmatrix} \otimes |j\rangle \in \mathcal{Y}$ où ψ_j^e et ψ_j^o sont définis comme dans (4.1) alors :*

$$\mathcal{F}U_{cc}\mathcal{F}^{-1}(\hat{\psi}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \begin{pmatrix} \Psi_j^e \\ \Psi_j^o \end{pmatrix} \otimes |j\rangle.$$



C'est à dire que l'on suppose toujours qu'il y a une symétrie verticale et on fait les hypothèses supplémentaires suivantes :

- Pour tout $j \leq 2j_0$, les matrices de scattering S_j sont identiques égales à :

$$S_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cela correspond au cas $r = 0$ et $t = 1$ dans la description générale faite du modèle dans la partie 2.1. Cela se traduit par le fait que dès qu'une composante d'un vecteur rentre sur une plaquette où la matrice de scattering est S_g alors "on tourne à gauche". Par exemple, si la composante entrante était de la forme $|2j, 2k\rangle$ (on rentre sur la plaquette par le bas) il y aura qu'une seule composante sortante qui sera $|2j, 2k + 1\rangle$. De même avec $|2j + 1, 2k + 1\rangle$ comme composante entrante (par le haut) et $|2j + 1, 2k\rangle$ comme composante sortante.

- Pour tout $j \geq 2j_1 + 1$, les matrices de scattering S_j sont identiques égales à :

$$S_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cela correspond au cas $r = 1$ et $t = 0$. Dans ce cas "on tourne à droite" lorsque qu'on rentre sur une plaquette dont la matrice de scattering est S_d .

- Pour les j tels que $2j_0 + 1 \leq j \leq 2j_1$ les matrices de scattering sont quelconques. Elles constituent ce que l'on appelle *l'interface* entre les deux classes de matrices décrites précédemment.

Notre but est de comprendre le spectre de ce type d'opérateur de Chalker-Coddington. En particulier de montrer que quelque soit l'interface on aura toujours que le spectre continu de U_{cc} contient tout le cercle unité.

Proposition 5.1. $\{\pm 1, \pm i\} \subset \rho_p(U_{cc})$ le spectre ponctuel de U_{cc} et ces valeurs propres sont infiniment dégénérées.

Démonstration. Soit $j \in \mathbb{Z}$ tel que $2j \leq 2j_0$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les sous espace $\mathcal{H}_g(j, k) = \text{Span} \{|2j, 2k\rangle, |2j, 2k + 1\rangle, |2j - 1, 2k + 1\rangle, |2j - 1, 2k\rangle\}$ sont stable sous U_{cc} . Par conséquent,

U_{cc} restreint à $\mathcal{H}_g(j, k)$ est juste une matrice 4×4 de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ses valeurs propres sont exactement $\{\pm 1, \pm i\}$. Comme il y a une infinité de sous espace $\mathcal{H}_g(j, k)$ distinct stable sous U_{cc} on a bien que chacune de ces valeurs propres est infiniment dégénérées. On peut faire pareils pour les sous espaces $\mathcal{H}_d(j, k) = \text{Span} \{|2j, 2k\rangle, |2j + 1, 2k\rangle, |2j + 1, 2k - 1\rangle, |2j, 2k - 1\rangle\}$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $j \in \mathbb{Z}$ et tel que $2j_1 + 1 < 2j$. On obtient alors les mêmes valeurs propres. \square

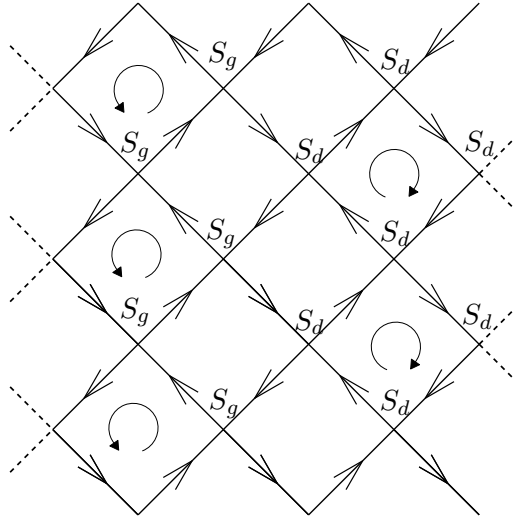
Proposition 5.2. $\mathcal{H}_I = \text{Span} \{|2j_0 + 1, k\rangle, \dots, |2j_1 + 1, k\rangle, k \in \mathbb{Z}\}$ est stable sous U_{cc} .

Remarque 5.1. Dans toute cette partie (5) on a supposé que les matrices de scattering appartenant à l'interface couvraient toutes les plaquette dont les coordonnées sont comprises entre $2j_0 + 1$ et $2j_1$ inclus. En effet, c'est dans ce cas que l'on obtient le comportement le plus simple. On aurait très bien pu supposer que que les matrices de scattering appartenant à l'interface débutaient sur une plaquette dont la coordonnée sur \mathbb{Z} était de la forme $2j_0$ et quelle terminées sur une plaquette de la forme $2j_1 + 1$. Dans ce cas le comportement est un peu différent, les sous espace stable sous l'opérateur ne sont pas tout à fait de la même forme mais tous les résultats restent les mêmes. Pour un exemple voir 5.1.

Dans la suite on se contente donc d'étudier U_{cc} restreint à \mathcal{H}_I que l'on note $U_{cc|\mathcal{H}_I}$. Avant de montrer le résultat dans le cas générale on s'intéresse au cas particulier suivant.

5.2 Dans le cas où il n'y a pas d'interface.

Dans cette section on suppose qu'il n'y a pas d'interface, $S_j = S_g$ pour $j \leq 2j_0$ et $S_j = S_d$ pour $j > 2j_0$ où $j_0 \in \mathbb{Z}$ est fixé. On représente ce cas comme suit :



On commence par ce ramener à la forme matricielle de l'opérateur en utilisant la proposition 4.2. De plus par la proposition 5.2 sur la stabilité de l'opérateur à l'interface, on obtient le résultat suivant :

Proposition 5.3. Soit \mathcal{Y}_2 le sous-espace hilbertien de $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}^2)$ des fonctions $f = (f_1, f_2)^\top$ telles que $f_1 \in L^2$ est π -antipériodique et f_2 est π -périodique. $U_{cc|\mathcal{H}_I}$ est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication sur \mathcal{Y}_2 par la matrice :

$$M(y) = \begin{pmatrix} 0 & e^{-iy} \\ e^{-iy} & 0 \end{pmatrix}.$$

A $y \in [-\pi, \pi]$ fixé les valeurs propres de la matrice $M(y)$ sont $\{\pm e^{-iy}\}$. Par un raisonnement similaire à celui effectué dans la partie 3.2 on a :

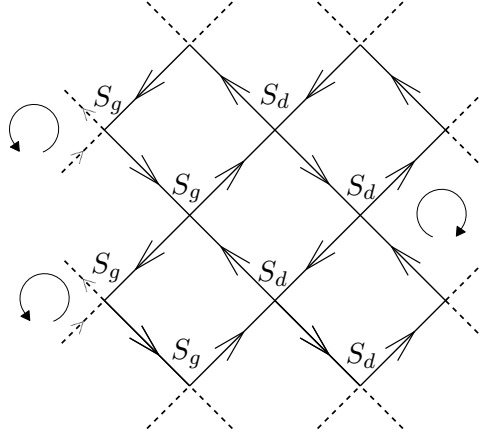
Proposition 5.4. Le spectre absolument continu de $U_{cc|\mathcal{H}_I}$, et donc celui de U_{cc} non restreint, contient tout le cercle unité. De plus le spectre ponctuel de U_{cc} est donné par $\{\pm 1, \pm i\}$ (proposition 5.1)

On donne l'exemple suivant en guise d'illustration de la remarque 5.1.

Exemple 5.1. On se place toujours dans le cas où il n'y a pas d'interface. Néanmoins on suppose que la transition entre les matrices de scattering de la forme S_g et celles de la forme S_d est positionnée de la manière suivante : soit $j_0 \in \mathbb{Z}$,

- Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ tel que $j \leq 2j_0 + 1$, $S_j = S_g$.
- Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ tel que $j > 2j_0 + 1$, $S_j = S_d$.

Ainsi on représente le modèle par :



Dans ce cas l'opérateur $U_{cc|\mathcal{H}_I}$ est unitairement équivalent à l'opérateur de multiplication par la matrice $M(y)$ (celle de (5.1)) défini sur un sous-espace hilbertien \mathcal{Y}_6 de $L^2([-\pi, \pi], \mathbb{C}^6)$. \mathcal{Y}_6 est l'espace des fonctions $f = (f_1, \dots, f_6)^\top$ telles que $f_j \in L^2$ est π -périodique si j est paire et π -antipériodique si j est impaire.

$$(5.1) \quad M(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ e^{-iy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-iy} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{où } y \in [-\pi, \pi].$$

A y fixé les valeurs propre de $M(y)$ sont :

$$\left\{ \pm e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{y}{3})}, \pm e^{i\frac{\pi}{3}} e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{y}{3})}, \pm e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{i(\frac{\pi}{6} - \frac{y}{3})} \right\}.$$

On aimerait maintenant en déduire qu'il existe un ensemble de valeurs propres telles que l'union de leurs supports lorsque y parcourt $[-\pi, \pi]$ donne tout le cercle unité. Soit $y_0 \in [-\pi, \pi]$ un point non exceptionnel (i.e pour lequel les valeurs propres sont toutes différentes), on sait que les points exceptionnels sont en nombre fini sur $[-\pi, \pi]$ (voir [4]). Comme $y \mapsto M(y)$ est 2π -périodique on a que les ensembles $\{\lambda_1(y_0), \dots, \lambda_N(y_0)\}$ et $\{\lambda_1(y_0 + 2\pi), \dots, \lambda_N(y_0 + 2\pi)\}$ sont les mêmes. Par conséquent il existe une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_N$ (comme y_0 est non exceptionnel on a bien N éléments distincts) telle que :

$$\lambda_{\sigma(1)}(y_0) = \lambda_1(y_0 + 2\pi), \dots, \lambda_{\sigma(N)}(y_0) = \lambda_N(y_0 + 2\pi).$$

De plus σ se décompose en cycles à supports disjoints que l'on note τ_q , $q = 1, \dots, \kappa$. Ainsi pour tout $q \in \llbracket 1, \kappa \rrbracket$, $\prod_{j \in \text{Supp}(\tau_q)} \lambda_j$ est 2π -périodique donc on peut définir son indice et comme

$\bigsqcup_{q=1}^{\kappa} \text{Supp}(\tau_q) = \{1, \dots, N\}$ on a que :

$$-2 = \text{Ind}(\det(M)) = \sum_{q=1}^{\kappa} \text{Ind} \left(\prod_{j \in \text{Supp}(\tau_q)} \lambda_j \right).$$

Par conséquent il existe $q_0 \in \llbracket 1, \kappa \rrbracket$ tel que :

$$(5.2) \quad \text{Ind} \left(\prod_{j \in \text{Supp}(\tau_{q_0})} \lambda_j \right) \neq 0.$$

Soit $\mathcal{E} \subset [-\pi, \pi]$ l'ensemble des points exceptionnels (qui sont en nombre fini). On note $\{a_1, \dots, a_p\} = \text{Supp} \tau_{q_0}$, pour tout $y \in [-\pi, \pi] \setminus \mathcal{E}$ on a les relations suivantes :

$$\lambda_{a_1}(y + 2\pi) = \lambda_{a_2}(y), \dots, \lambda_{a_{p-1}}(y + 2\pi) = \lambda_{a_p}(y), \quad \lambda_{a_p}(y + 2\pi) = \lambda_{a_1}(y).$$

Avec (5.2) on en déduit que l'union des supports des λ_j pour $j \in \text{Supp}(\tau_{q_0})$ donne tout le cercle unité. Cela conclut la démonstration. \square

6 Vecteurs propres généralisés.

Dans cette partie on s'intéresse au modèle de Chalker-Coddington avec symétrie verticale pour lequel les matrices de scattering se répartissent de la manière suivante :

— Pour $j \leq 0$ on suppose que $S_j = S_g$ où

$$S_g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

— Pour $j > 0$ les matrices de scattering sont toutes égales à une matrice $S \in O_2(\mathbb{R})$ que l'on note :

$$S = \begin{pmatrix} r & -t \\ t & r \end{pmatrix} \text{ où } r^2 + t^2 = 1.$$

On suppose en plus que $rt \neq 0$.

Remarque 6.1. Les sous espace $\mathcal{H}_- = \text{Span}(|j, k\rangle, j \leq 0, k \in \mathbb{Z})$ et $\mathcal{H}_+ = \text{Span}(|j, k\rangle, j \geq 1, k \in \mathbb{Z})$ sont stables sous U_{cc} et $\mathcal{H} = \mathcal{H}_- \oplus \mathcal{H}_+$.

Et pour tout $j \geq 1$:

$$\begin{pmatrix} \psi_{4j} \\ \psi_{4j+1} \end{pmatrix} = T_0 \begin{pmatrix} \psi_{4j-2} \\ \psi_{4j-1} \end{pmatrix}$$

et
$$\begin{pmatrix} \psi_{4j+2} \\ \psi_{4j+3} \end{pmatrix} = T_1 \begin{pmatrix} \psi_{4j} \\ \psi_{4j+1} \end{pmatrix}.$$

T_0 et T_1 sont ce que l'on appelle les matrices de transferts et elles sont définies par :

$$T_0 = \begin{pmatrix} -\frac{z}{t} & \frac{r}{t} e^{-iy} \\ -\frac{r}{t} e^{iy} & \frac{1}{tz} \end{pmatrix}$$

et
$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{z}{r} & \frac{t}{r} e^{iy} \\ \frac{t}{r} e^{-iy} & \frac{1}{rz} \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Ces égalités proviennent juste de l'écriture de l'équation (6.2) sous forme matricielle. \square

Remarque 6.3. On a $\det(T_0) = -1$ et $\det(T_1) = 1$.

Par récurrence on obtient ainsi que pour tout $j \in \mathbb{N}^*$:

$$(6.4) \quad \begin{pmatrix} \psi_{2j} \\ \psi_{2j+1} \end{pmatrix} = T_{\delta(2j)} \dots T_0 \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}.$$

Où $\delta(2j) = 0$ si j est paire et $\delta(2j) = 1$ si j est impaire. Par conséquent si $j \geq 3$ est impaire on a :

$$\begin{pmatrix} \psi_{2j} \\ \psi_{2j+1} \end{pmatrix} = T^{(j-1)/2} \begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}.$$

Où

$$(6.5) \quad T = T_1 T_0 = \begin{pmatrix} -\frac{z^2}{rt} - e^{2iy} & \frac{z}{t} e^{-iy} + \frac{1}{rz} e^{iy} \\ -\frac{z}{r} e^{-iy} - \frac{1}{tz} e^{iy} & \frac{1}{rtz^2} + e^{-2iy} \end{pmatrix}.$$

Remarque 6.4. On a $\det(T) = -1$ et $\text{Tr}(T) = \frac{1}{rt}(z^{-2} - z^2) - 2i \sin(2y)$.

Dans la suite on cherche à savoir si il est possible d'obtenir un vecteur ψ dans $\ell^2(\mathbb{Z})$ qui satisfasse l'équation (6.2). Bien sûr cela dépendra de y et z .

6.2 Conditions pour avoir un vecteur propre dans $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Soient $y \in [-\pi, \pi]$ et $z \in \mathbb{U}$ fixés, $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in [-\pi, \pi]$. On note λ_1, λ_2 les valeurs propres de la matrice T obtenue en (6.5). Comme $\det(T) = -1$ on a $|\lambda_1| |\lambda_2| = 1$. Il s'agit de savoir si l'une des valeurs propres de T est de module strictement plus petit que 1 et s'il est possible de trouver un vecteurs propre pour cette valeur propre dont les coordonnées satisfont l'équation (6.3). En effet :

Proposition 6.2. *Si T possède une valeur propre λ de module strictement inférieur à 1 et un vecteur propre η dont les coordonnées satisfont (6.3) alors il existe $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$ solution $T\psi = z\psi$. C'est à dire que z est une valeur propre de la marche quantique $U_q(y)$.*

Démonstration. Il est possible de construire $(\psi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de la manière suivante :

- Si $j \geq 4$ on obtient ψ_j par récurrence grâce à la formule (6.4) à partir de la condition initiale

$$\begin{pmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \eta.$$

- Si $j \leq 1$ on peut prendre $\psi_j = 0$. (remarque 6.2)

Par construction on a que ψ est solution de (6.2). En effet, on a supposé que les coordonnées de η satisfont (6.3) . Il reste à vérifier que ψ est bien dans $\ell^2(\mathbb{Z})$. Comme $\psi_j = 0$ pour tout $j \leq 1$ il n'y a aucun problème en moins l'infini. De plus si $j \geq 3$ est impaire alors comme η est un vecteur propre de T pour λ on a :

$$|\psi_{2j}| \leq |\lambda|^{(j-1)/2} \|\eta\| \quad \text{et} \quad |\psi_{2j+1}| \leq |\lambda|^{(j-1)/2} \|\eta\|.$$

De même si $j \geq 2$ est paire alors :

$$|\psi_{2j}| \leq \|T_0\| |\lambda|^{(j-2)/2} \|\eta\| \quad \text{et} \quad |\psi_{2j+1}| \leq \|T_0\| |\lambda|^{(j-2)/2} \|\eta\|.$$

Comme $|\lambda| < 1$ on a bien que $\psi \in \ell^2(\mathbb{Z})$. □

Remarque 6.5. On définit les exposants de Lyapunov dans le cas qui nous intéresse :

$$\gamma_{\pm} = \limsup_{j \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|j|} \ln(\|T^j\|).$$

Si pour z et y donnés les deux valeurs propres de la matrice T sont de module égale à 1 alors on a que γ_+ est nul. Par conséquent z appartient au spectre de $M(y)$ mais comme z ne peut pas être une valeur propre on a que z est dans le spectre continu de $M(y)$.

On regarde le comportement des valeurs propres de la matrice T .

Proposition 6.3. Si $y \in [-\pi, \pi]$ et $z = e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ sont tels que :

$$\left| \frac{1}{rt} \sin(2\theta) + \sin(2y) \right| > 1.$$

Alors une des deux valeurs propres de T est de module strictement inférieur à 1. Sinon λ_1 et λ_2 sont de module égale à 1.

Démonstration. On note $\lambda_1 = \rho e^{i\alpha}$ où $\rho \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in [-\pi, \pi]$. Comme $\lambda_1 \lambda_2 = \det(T) = -1$ on a que $\lambda_2 = -\rho^{-1} e^{-i\alpha}$. De plus :

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(T) &= \frac{1}{rt} \left(\frac{1}{z^2} - z^2 \right) - 2i \sin(2y) \\ &= -2i \left(\frac{1}{rt} \sin(2\theta) + \sin(2y) \right). \end{aligned}$$

En prenant les parties réelles et imaginaires on obtient :

$$\begin{cases} \cos(\alpha)(\rho - \rho^{-1}) &= 0 \\ \sin(\alpha)(\rho + \rho^{-1}) &= -2 \left(\frac{1}{rt} \sin(2\theta) + \sin(2y) \right) \end{cases} \Leftrightarrow (1) \text{ ou } (2) \text{ ou } (3).$$

Où :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \pi/2 \\ \rho + \rho^{-1} = -2\left(\frac{1}{rt} \sin(2\theta) + \sin(2y)\right) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\pi/2 \\ \rho + \rho^{-1} = +2\left(\frac{1}{rt} \sin(2\theta) + \sin(2y)\right) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = 1 \\ \sin(\alpha) = -\left(\frac{1}{rt} \sin(2\theta) + \sin(2y)\right) \end{cases}$$

Comme $\rho > 0$, il y a exactement deux couples (ρ, α) solution (1) si et seulement si $(rt)^{-1} \sin(2\theta) + \sin(2y) \leq -1$. Dans le cas où $(rt)^{-1} \sin(2\theta) + \sin(2y) = -1$ les solutions sont telles que $\rho = 1$. Dans les autres cas, i.e $(rt)^{-1} \sin(2\theta) + \sin(2y) < -1$, une des solution est telle que $0 < \rho < 1$ et l'autre telle que $1 < \rho$.

Le raisonnement est le même pour (2) à une différence près : la condition pour qu'il y ait des solutions telles que $\rho \neq 1$ est $(rt)^{-1} \sin(2\theta) + \sin(2y) > 1$.

Enfin (3) possède exactement deux solutions si et seulement si $|(rt)^{-1} \sin(2\theta) + \sin(2y)| \leq 1$. Néanmoins ces solutions sont telles que $\rho = 1$. □

Remarque 6.6. Si $\theta = \pm\pi/4$ alors il n'existe pas de $y \in [-\pi, \pi]$ tel que z soit une valeur propre de $M(y)$.

Dans la proposition 6.2 on a également supposé qu'il était possible de prendre $\eta \in \mathbb{C}^2$ qui soit vecteur propre de T et dont les coordonnées satisfont l'équation (6.3).

Proposition 6.4. Il existe $\eta \in \mathbb{C}^2$ un vecteur propre de T (non nul) pour la valeur propre λ et tel que ses coordonnées satisfont l'équation (6.3) si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$(6.6) \quad z \in \left\{ \pm e^{i\frac{\xi}{2}}, \pm e^{i\frac{\pi-\xi}{2}} \right\}.$$

Où $\xi \in]0, \pi[$ est tel que :

$$(6.7) \quad \begin{cases} \cos(\xi) = r \cos(2y) \\ \sin(\xi) = \sqrt{1 - r^2 \cos^2(2y)}. \end{cases}$$

$$\text{Et } \lambda = -\frac{z^2}{rt} - e^{2iy} + \frac{e^{-2iy}}{t} + \frac{1}{rz^2}.$$

Démonstration. Comme les coordonnées de η satisfont l'équation (6.3) il existe $\kappa \in \mathbb{C}$ tel que $\eta = \kappa(1, z^{-1}e^{-iy})^T$ ainsi le système d'équations pour le vecteur propre de T pour la valeur propre λ devient :

$$\begin{cases} \kappa \left(-\frac{z^2}{rt} - e^{2iy} - \lambda + \frac{e^{-2iy}}{t} + \frac{1}{rz^2} \right) = 0 \\ \kappa \left(-\frac{z}{r}e^{-iy} - \frac{e^{iy}}{tz} + \frac{e^{-iy}}{rtz^3} + \frac{e^{-3iy}}{z} - \frac{\lambda}{z}e^{-iy} \right) = 0. \end{cases}$$

Donc on peut prendre $\kappa \neq 0$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} -\frac{z^2}{rt} - e^{2iy} + \frac{e^{-2iy}}{t} + \frac{1}{rz^2} = \lambda \\ -\frac{z}{r}e^{-iy} - \frac{e^{iy}}{tz} + \frac{e^{-iy}}{rtz^3} + \frac{e^{-3iy}}{z} - \frac{\lambda}{z}e^{-iy} = 0. \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -\frac{z^2}{rt} - e^{2iy} + \frac{e^{-2iy}}{t} + \frac{1}{rz^2} = \lambda \\ z^4 - 2r \cos(2y)z^2 + 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -\frac{z^2}{rt} - e^{2iy} + \frac{e^{-2iy}}{t} + \frac{1}{rz^2} = \lambda \\ z \in \{ \pm e^{i\xi/2}, \pm e^{-i\xi/2} \}. \end{cases} \end{aligned}$$

Où $\xi \in]0, \pi[$ est tel que :

$$\begin{cases} \cos(\xi) = r \cos(2y) \\ \sin(\xi) = \sqrt{1 - r^2 \cos(2y)^2}. \end{cases}$$

□

Remarque 6.7. Dans le cas où $z \in \{ \pm e^{i\xi/2}, \pm e^{-i\xi/2} \}$ on a que $\lambda = -\frac{z^2}{rt} - e^{2iy} + \frac{e^{-2iy}}{t} + \frac{1}{rz^2}$ est bien solution d'un des systèmes (1) ou (2) que l'on avait posé dans la démonstration de la proposition 6.3. Si $z = \pm e^{i\xi/2}$ alors $\lambda = -i(1+t)t^{-1}(r^{-1}\sqrt{1-r^2\cos(2y)^2} + \sin(2y))$ et si $z = \pm e^{-i\xi/2}$ alors $\lambda = -i(1+t)t^{-1}(-r^{-1}\sqrt{1-r^2\cos(2y)^2} + \sin(2y))$. On en déduit :

$$|\lambda| = (1+t)t^{-1} \left| \pm r^{-1}\sqrt{1-r^2\cos(2y)^2} + \sin(2y) \right|.$$

Finalement on obtient le critère suivant :

Proposition 6.5. Soit $y \in [-\pi, \pi]$, $z \in \mathbb{U}$ est une valeur propre de $M(y)$ si et seulement si

$$\begin{aligned} & \begin{cases} z = \pm e^{i\xi/2} \\ (1+t)(rt)^{-1} \left(\sqrt{1-r^2\cos(2y)^2} + r \sin(2y) \right) < 1 \end{cases} \\ \text{ou} & \begin{cases} z = \pm e^{-i\xi/2} \\ (1+t)(rt)^{-1} \left(\sqrt{1-r^2\cos(2y)^2} - r \sin(2y) \right) < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Où ξ est défini par (6.7).

Remarque 6.8. Sur la proposition 6.5.

- Le "ou" de la proposition est exclusif. Les deux inégalités ne peuvent pas être vérifiées simultanément.
- Il est possible d'avoir les inégalités des systèmes seulement dans le cas où :

$$(6.8) \quad r \notin [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}].$$

- Dans le cas où la condition (6.8) est vérifiée alors l'inégalité du premier système correspond aux $y \in [-\pi, \pi]$ tels que :

$$\sin(2y) < -\frac{1-r^2}{r^2}.$$

Et l'inégalité du deuxième système correspond aux y tels que :

$$\sin(2y) > \frac{1-r^2}{r^2}.$$

7 Annexes.

A Sur les marches quantiques.

On donne ici une définition de ce qu'est une marche quantique (déterministe) en dimension 1. Soit $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \ell^2(\mathbb{Z})$. La notation employée pour définir \mathcal{H} est une commodité, on peut voir \mathcal{H} comme $\ell^2(\mathbb{Z}, \mathbb{C}^2)$. L'opérateur de marche quantique est obtenu par composition de deux opérateurs : celui agissant sur ce qu'on appelle les spins (modélisés par des éléments de \mathbb{C}^2), et celui générant le shift sur \mathbb{Z} . On commence par munir \mathcal{H} de sa base canonique que l'on note $\{|\tau\rangle \otimes |j\rangle, \tau = \pm 1 \text{ et } j \in \mathbb{Z}\}$. $\{|\tau\rangle, \tau = \pm 1\}$ est la base canonique sur \mathbb{C}^2 au sens où $|+1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\{|j\rangle, j \in \mathbb{Z}\}$ est la base canonique de $\ell^2(\mathbb{Z})$ au sens où si $j \in \mathbb{Z}$ est fixé, $|j\rangle(k) = \delta_{j,k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

On définit maintenant les deux parties de l'opérateur de marche quantique :

- Soit $(C(j))_{j \in \mathbb{Z}}$ une collection de matrices unitaires. On note $C \otimes \mathbb{1}$ l'opérateur agissant sur les spins. Si $\psi = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi^+(j) |+1\rangle \otimes |j\rangle + \psi^-(j) |-1\rangle \otimes |j\rangle$ est un élément de \mathcal{H} (pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\psi^+(j), \psi^-(j) \in \mathbb{C}$) alors :

$$(C \otimes \mathbb{1})(\psi) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi^+(j)(C(j)|+1\rangle) \otimes |j\rangle + \psi^-(j)(C(j)|-1\rangle) \otimes |j\rangle.$$

- On note $P_\tau, \tau = \pm 1$ les projecteurs orthogonaux sur les éléments de base de \mathbb{C}^2 . On définit alors l'opérateur de shift par :

$$S = \sum_{j \in \mathbb{Z}, \tau = \pm 1} P_\tau \otimes |j + \tau\rangle\langle j|.$$

Définition A.1. On définit l'opérateur de marche quantique sur \mathcal{H} par :

$$U_q = S(C \otimes \mathbb{1}) = \sum_{j \in \mathbb{Z}, \tau = \pm 1} P_\tau C(j) \otimes |j + \tau\rangle\langle j|.$$

Proposition A.1. Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on note :

$$C(j) = \begin{pmatrix} a_j & c_j \\ b_j & d_j \end{pmatrix} \in \mathcal{U}_2(\mathbb{C}).$$

U_q est unitairement équivalent à un opérateur sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ qui se met sous la forme matricielle suivante :

$$M = \begin{pmatrix} \ddots & & & & & & & \\ & 0 & b_j & d_j & & & & \\ c_{j-1} & & 0 & 0 & & & & \\ & & 0 & 0 & b_{j+1} & d_{j+1} & & \\ & a_j & c_j & 0 & 0 & & & \\ & & & 0 & 0 & b_{j+2} & & \\ & & & a_{j+1} & c_{j+1} & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \end{pmatrix}$$

Démonstration. Il suffit de considérer l'application $J : \mathbb{C}^2 \otimes \ell^2(\mathbb{Z}) \mapsto \ell^2(\mathbb{Z})$ définie par son action sur les vecteurs de base de la manière suivante :

$$J(|\tau\rangle \otimes |j\rangle) = \begin{cases} |2j\rangle & \text{si } \tau = +1 \\ |2j+1\rangle & \text{si } \tau = -1 \end{cases}$$

J est unitaire et on a $M = JU_q J^{-1}$.

□

B Opérateur d'entrelacement.

On se place sur un espace de Hilbert quelconque. Soit $P(y)$ un projecteur dépendant analytiquement de $y \in [-\pi, \pi]^d$ où $d \in \mathbb{N}^*$. L'opérateur d'entrelacement permet d'obtenir une base de $\text{Ran}(P(y))$ pour tout y à partir d'une base de $\text{Ran}(P(0))$ et de sorte que chaque vecteur de base soit analytique en y . Les preuves des résultats suivant sont faites dans [4].

Proposition B.1. *Si $P(y)$ est un projecteur analytique en y alors il existe un opérateur dit d'entrelacement noté \mathcal{T}_y tel que :*

- \mathcal{T}_y est analytique et pour tout y , \mathcal{T}_y^{-1} existe et dépend analytiquement de y .
- Pour tout y on a $\mathcal{T}_y P(0) \mathcal{T}_y^{-1} = P(y)$.

Proposition B.2. *Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Si $P_1(y), \dots, P_N(y)$ sont des projecteurs qui dépendent analytiquement de y et tels que :*

$$P_{j_1}(y)P_{j_2}(y) = \delta_{j_1, j_2} P_{j_1}(y) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^N P_j(y) = 1.$$

Alors il existe un opérateur d'entrelacement \mathcal{T}_y commun à tout ces projecteurs. C'est à dire que pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, \mathcal{T}_y est un opérateur d'entrelacement pour P_j .

Dans le cas qui nous intéresse on a $d = N = 2$ et si la matrice $M(y)$ de l'expression (3.1) ne possède pas de points exceptionnels alors les projecteurs propre vérifient toutes les hypothèses de la proposition B.2 (l'analyticité des projecteurs dans ce cas est faite dans [4]). Ce résultat permet de compléter la preuve de la proposition 3.2.

Références

- [1] O. Bourget, J. Asch, and A. Joye. Spectral stability of unitary network models. *Rev. Math. Phys.*, 2015.
- [2] O. Bourget, J.S. Howland, and A. Joye. Spectral analysis of unitary band matrices. *Comm. Math. Phys.*, 2003.
- [3] J. T. Chalker and P. D. Coddington. Percolation, quantum tunneling and the integer hall effect. *J. Phys. C : Solid State Phys.*, 1988.
- [4] Tosio Kato. *Perturbation Theory for Linear Operators*. 1995.
- [5] Barry Simon and Reed Michael C. *Analysis of Operators (Methods of Modern Mathematical Physics)*. 1978.