Corrigé de l'examen MAT201

17 mai 2019

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine.
2. Soit $\dim E = \dim F = n$, $b_E = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $b_F = (f_1, ..., f_n)$ une base de F. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de base. Soit $\ell \in L(E, F)$ l'application linéaire telle que $\ell(e_i) = b_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Comme ℓ transforme la base b_E en la base b_F, on a $M_{b_F}^{b_E}(\ell) = I_n$ et ℓ est un isomorphisme.
3. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$
On trouve
$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = BA.$$
4. Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel quelconque. Soit f une application linéaire de E dans F.
   (a) $\mathrm{Im} f$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\mathrm{Ker} f$ dans E.
   (b) $\dim \mathrm{Ker} f + \dim \mathrm{Im} f = \dim E$.

Exercice 2 (Groupes) Soient $a, a' \in \mathbb{R}^*$ et $b, b' \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_{a,b}(f_{a',b'}(x)) = a(a'x + b') + b = aa'x + ab' + b.$$

Comme $aa' \in \mathbb{R}^*$ et $ab' + b \in \mathbb{R}$, on a donc

$$f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa',ab'+b} \in G. \quad (1)$$

On en déduit que

1. La loi $\circ$ est interne dans G.
2. La loi $\circ$ est associative puisque la loi de composition d'applications l'est.
3. $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} = \mathrm{f}_{1,0}$ est élément neutre.
4. Si $f_{a,b} \in G$, on voit grâce à (1) que $f_{1/a,-b/a}$ est l'inverse de $f_{a,b}$.

Exercice 3 (Dimension des espaces vectoriels)

1. Comme $\{u, v\}$ engendre F et u est non nul, on a $1 \leq \dim F \leq 2$. De plus, $\dim F = 1$ ssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha u = v$. Or

$$\alpha u = v \iff (\alpha = t \text{ et } \alpha t = 1 \text{ et } -\alpha = 1). \tag{2}$$

Si $t = -1$, alors $\alpha = -1$ est solution de (2) et $\dim F = 1$. Sinon le système n'a pas de solution. En effet dans ce cas, la troisième équation de (2) donne $\alpha = -1$, alors que la première donne $\alpha = t \neq -1$. Dans ce cas on a alors $\dim F = 2$.

2. Il y a deux cas de figure :

   (a) $w \in F$. Dans ce cas $\dim(F \cap G) = \dim G = 1$.

   (b) $w \notin F$. Dans ce cas $\dim(F \cap G) = \dim\{0_{\mathbb{R}^3}\} = 0$.

On a

$$\begin{aligned} w \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha u + \beta v = w \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \begin{cases} \alpha + t\beta = 1 \\ t\alpha + \beta = 1 \\ -\alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \begin{cases} \alpha + t\beta = 1 \\ (1-t^2)\beta = 1 - t \\ (1+t)\beta = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

On distingue trois cas :

   (a) $t = -1$. Dans ce cas le système n'a pas de solution et on a $\dim(F \cap G) = 0$.

   (b) $t = 1$. Alors $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ est une solution et $\dim(F \cap G) = 1$.

   (c) $t^2 \neq 1$. Alors la deuxième ligne donne $\beta = \frac{1}{1+t}$, alors que la troisième ligne donne $\beta = \frac{2}{1+t}$. Le système n'a alors pas de solution et $\dim(F \cap G) = 0$.

Exercice 4 (Applications linéaires et matrices associées)

1. Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, il suffit de montrer que U_1, U_2, U_3 sont linéairement indépendants. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En considérant dans l'ordre les lignes 2, 3, 1, on voit que ce système ne possède que la solution nulle, ce qui conclut.

2. On trouve $f_A(U_1) = U_1$, $f_A(U_2) = -U_2$, $f_A(U_3) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

3. On a donc

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. La matrice échelonnée A' représente A dans la base b' donc $\text{rang} f_A = 2$. D'après le théorème du rang, $\dim \text{Ker} f_A = 1$.

5. Les colonnes de P sont les vecteurs colonnes de U_1, U_2, U_3 dans la base b. Comme b est la base canonique, ce sont U_1, U_2, U_3.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. L'algorithme de Gauss montre que

$$\begin{aligned} P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad & \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 + y_1 \\ x_3 = y_2 - y_1 \\ -x_2 = -x_3 + y_3 - y_1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 + y_1 \\ x_2 = x_3 + y_1 - y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_2 \end{cases} \end{aligned}$$

On trouve donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Notons $X' = P^{-1}X$ et x'_1, x'_2, x'_3 les composantes de X'. Alors

$$\begin{aligned} AX \quad & = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}X) = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A'X' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = 1 \\ x'_2 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions sont donc les vecteurs X de la forme

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 + x'_3 \\ 1 + x'_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } x'_3 \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble des solutions est alors $S = (2, 2, 1) + \mathrm{Vect}(0, 1, 1)$.

Exercice 5 (Projecteurs)

1. Il suffit de montrer que $q^2 = q$. On a

$$q^2 = (\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - 2p + p^2 = \mathrm{Id}_E - p = q.$$

2. (a) Montrons que $\operatorname{Ker} q = \operatorname{Im} p$. Si $x \in \operatorname{Ker} q$, alors $q(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$ donc $x = p(x) \in \operatorname{Im} p$. Réciproquement, si $y \in \operatorname{Im} p$, il existe $x \in \mathbb{R}^3$ tel que $y = p(x)$, ce qui entraîne $q(y) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0_{\mathbb{R}^3}$, d'où $y \in \operatorname{Ker} q$.

   (b) On a $\operatorname{Im} q = \operatorname{Ker} p$. Sachant que q est une projection, on peut inverser les rôles de p et de q ($p = \mathrm{Id}_E - q$) et utiliser (a).

3. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Comme $(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$ avec $(x, y, 0) \in F$ et $(0, 0, z) \in G$, on a $p((x, y, z)) = (x, y, 0)$ et $q((x, y, z)) = (x, y, z) - (x, y, 0) = (0, 0, z)$. Ainsi, q est la projection sur G parallèlement à F.