

Géométrie différentielle

D. HÄFNER

4 janvier 2020

Table des matières

1	Rappels de calcul différentiel dans l'espace euclidien	5
1.1	Vecteurs tangents	5
1.2	Dérivées directionnelles	5
1.3	Courbes dans \mathbb{R}^3	6
1.4	1-formes	7
1.5	Formes différentielles	7
1.6	Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m	9
2	Courbes et repères	11
2.1	Courbes	11
2.2	Repères de Frénet	12
2.3	Dérivées covariantes	15
2.4	Champs de repères	16
2.5	Formes de connexion	16
2.6	Les équations structurelles	18
3	Calcul différentiel sur les surfaces de \mathbb{R}^3	21
3.1	Surfaces de \mathbb{R}^3	21
3.2	Fonctions différentiables et vecteurs tangents	23
3.3	Formes différentielles sur une surface	25
3.4	Applications différentiables entre surfaces	27
3.5	Intégration de formes différentielles	28
3.6	Propriétés topologiques des surfaces	32
4	Variétés abstraites	35
4.1	Variétés abstraites	35
4.2	Dénombrabilité à l'infini	37
4.3	Le théorème de Whitney	38

5	Courbure	41
5.1	Application de Weingarten	41
5.2	Courbure normale	42
5.3	Courbure de Gauss	46
5.4	Techniques de calcul	47
5.5	Surfaces de révolution	49
5.6	Géodésiques	50
6	Géométrie des surfaces de \mathbb{R}^3	55
6.1	Les équations fondamentales	55
6.2	Calculs de formes	57
6.3	Quelques théorèmes globaux	59
6.4	Isométries et isométries locales	63
6.5	La géométrie intrinsèque des surfaces de \mathbb{R}^3	64
6.6	Intégration et orientation	66
7	Le théorème de Gauss-Bonnet	69
7.1	Préparations	69
7.2	Le théorème de Gauss-Bonnet	70

Chapitre 1

Rappels de calcul différentiel dans l'espace euclidien

1.1 Vecteurs tangents

Définition 1.1.1 Un vecteur tangent v_p à \mathbb{R}^3 est un couple de deux points de \mathbb{R}^3 : sa partie vectorielle et son point de base.

Définition 1.1.2 Soit p un point de \mathbb{R}^3 . L'ensemble $T_p(\mathbb{R}^3)$ est l'ensemble de tous les vecteurs qui ont p comme point de base et il est appelé espace tangent de \mathbb{R}^3 au point p .

Définition 1.1.3 Un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 est une fonction qui associe à tout point p de \mathbb{R}^3 un vecteur tangent à \mathbb{R}^3 au point p .

Définition 1.1.4

$$U_1(p) = (1, 0, 0)_p,$$

$$U_2(p) = (0, 1, 0)_p,$$

$$U_3(p) = (0, 0, 1)_p,$$

On appelle U_1, U_2, U_3 le champ de repère naturel.

Lemme 1.1.1 Pour tout champ de vecteurs V il existe des fonctions réelles v_1, v_2, v_3 telles que

$$V = v_1 U_1 + v_2 U_2 + v_3 U_3.$$

Les fonctions v_i sont appelées les fonctions de coordonnées euclidiennes.

1.2 Dérivées directionnelles

Définition 1.2.1 Soit f une fonction différentiable réelle sur \mathbb{R}^3 , et soit v_p un vecteur tangent à \mathbb{R}^3 . Alors le nombre

$$v_p[f] = \frac{d}{dt}(f(p + tv))|_{t=0}$$

est appelé la dérivée de f par rapport à v_p .

Lemme 1.2.1 Si $v_p = (v_1, v_2, v_3)_p$, alors

$$v_p(f) = \sum v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Extension à des champs de vecteurs. Si V est un champ de vecteur et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 à valeurs réelles, alors $V[f] : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à valeurs réelles.

Règles de calcul

Soit V et W des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 et f, g, h des fonctions réelles. Alors

- i) $(fV + gW)[h] = fV[h] + gW[h]$.
- ii) $V[af + bg] = aV[f] + bV[g]$ pour tous nombres réels a, b .
- iii) $V[f g] = V[f]g + fV[g]$.

1.3 Courbes dans \mathbb{R}^3

Définition 1.3.1 Une courbe est une fonction différentiable $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, où I est un intervalle ouvert.

Définition 1.3.2 Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe dans \mathbb{R}^3 avec $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Pour tout $t \in I$, le vecteur vitesse de α est le vecteur tangent

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}(t), \frac{d\alpha_2}{dt}, \frac{d\alpha_3}{dt} \right) |_{\alpha(t)}$$

au point $\alpha(t)$ de \mathbb{R}^3 .

Définition 1.3.3 Soit $\alpha : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une courbe. Si $h : J \rightarrow I$ est une fonction différentiable sur un intervalle ouvert J , alors la fonction composée

$$\beta = \alpha \circ h : J \rightarrow \mathbb{R}^3$$

est une courbe qu'on appelle une reparamétrisation de α .

Lemme 1.3.1 Soit α est une courbe dans \mathbb{R}^3 et f une fonction différentiable sur \mathbb{R}^3 . Alors

$$\alpha'(t)[f] = \frac{d(f(\alpha))}{dt}(t).$$

Preuve

$$\alpha'(t)[f] = \sum \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha(t)) \frac{d\alpha_i}{dt}(t) = \frac{d(f(\alpha))}{dt}(t).$$

□

1.4 1-formes

Définition 1.4.1 Une 1- forme ϕ sur \mathbb{R}^3 est une fonction à valeurs réelles sur l'ensemble des vecteurs tangents de \mathbb{R}^3 qui est linéaire à chaque point, c.à.d.

$$\phi(av + bw) = a\phi(v) + b\phi(w)$$

pour tous a, b réels et vecteurs tangents v, w au même point.

Note que $\phi_p : T_p(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire. A tout point p ϕ_p est un élément de l'espace dual de $T_p(\mathbb{R}^3)$ (on note cet espace $T_p^*\mathbb{R}^3$). On définit l'addition et la multiplication par des fonctions réelles par

$$\begin{aligned}(\phi + \psi)(v) &= \phi(v) + \psi(v), \\ (f\phi)(v_p) &= f(p)\phi(v_p).\end{aligned}$$

Définition 1.4.2 Si f est une fonction différentiable sur \mathbb{R}^3 , la différentielle de f est la 1- forme telle que

$$df(v_p) = v_p[f] \quad \text{pour tous les vecteurs tangents } v_p.$$

Exemple 1.4.1 Les différentielles des fonctions de coordonnées naturelles dx_1, dx_2, dx_3 . Grâce au Lemme 1.2.1 on a

$$dx_i(v_p) = v_p[x_i] = \sum_j v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) = \sum_j v_j \delta_{ij} = v_i.$$

Lemme 1.4.1 Si ϕ est une 1- forme sur \mathbb{R}^3 , alors $\phi = \sum \phi_i dx_i$, où $\phi_i = \phi(U_i)$. Les fonctions ϕ_i sont appelées les fonctions de coordonnées euclidiennes de ϕ . Si les ϕ_i sont différentiables, alors on parle d'une 1- forme différentielle.

Règles de calcul

$$\begin{aligned}df &= \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i, \\ d(f + g) &= df + dg, \\ d(fg) &= gdf + fdg, \\ d(h(f)) &= h'(f)df.\end{aligned}$$

1.5 Formes différentielles

Définition 1.5.1 Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $\Lambda^k T_p^*\mathbb{R}^n$ l'ensemble de toutes les applications k -linéaires alternées

$$(1.5.1) \quad \begin{aligned}\phi &: T_p\mathbb{R}^n \times \dots \times T_p\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}. \\ &k \text{ - fois}\end{aligned}$$

Remarque 1.5.1 i) $\Lambda^k T_p^*\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel.

ii) $\Lambda^k T_p^* \mathbb{R}^n = 0$ pour tout $k \geq n + 1$.

Définition 1.5.2 Une k -forme extérieure sur \mathbb{R}^n est une application qui associe à tout point $p \in \mathbb{R}^n$ un élément $\omega(p) \in \Lambda^k T_p^* \mathbb{R}^n$.

Si $\phi \in \Lambda^k T_p^* \mathbb{R}^n$, $\psi \in \Lambda^l T_p^* \mathbb{R}^n$, on définit

$$(\phi \wedge \psi)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in \sigma_{k+l}} \epsilon(\sigma) \phi(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \psi(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}),$$

où σ_{k+l} est le groupe des permutations de $\{1, \dots, k+l\}$. On note

$$(dx_i)_p \wedge (dx_j)_p = (dx_i \wedge dx_j)_p.$$

Note que

$$\begin{aligned} (dx_i \wedge dx_j)_p &= -(dx_j \wedge dx_i)_p \quad i \neq j, \\ (dx_i \wedge dx_i)_p &= 0. \end{aligned}$$

Remarque 1.5.2 Si $k \leq n$ la famille

$$\{(dx_{i_1})_p \wedge \dots \wedge (dx_{i_k})_p; 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n\}$$

est une base de $\Lambda^k T_p^* \mathbb{R}^n$, en particulier $\dim \Lambda^k T_p^* \mathbb{R}^n = \binom{n}{k}$.

A partir de maintenant on se concentre au cas $n = 3$. On a

- Une 1-forme est une expression de la forme $fdx_1 + gdx_2 + hdx_3$.
- Une 2-forme est une expression de la forme $fdx_1 \wedge dx_2 + gdx_1 \wedge dx_3 + hdx_2 \wedge dx_3$.
- Une 3-forme est une expression de la forme $fdx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$.

avec des fonctions f, g, h . Si dans les expressions ci-dessus les fonctions f, g, h sont différentiables on parle de k -forme différentielle. Une 0-forme différentielle est une fonction différentiable. On va supposer dans la suite que toutes les fonctions de coordonnées sont suffisamment lisses pour que les dérivées successives qu'on utilisera existent et sont continues.

Définition 1.5.3 Soit $\phi = \sum f_i dx_i$ une 1-forme différentielle sur \mathbb{R}^3 , la dérivée extérieure de ϕ est la 2-forme $d\phi = \sum df_i \wedge dx_i$. Pour une 2-forme différentielle $\omega = f dx_1 \wedge dx_2 + g dx_1 \wedge dx_3 + h dx_2 \wedge dx_3$ on définit la dérivée extérieure

$$d\omega = df \wedge dx_1 \wedge dx_2 + dg \wedge dx_1 \wedge dx_3 + dh \wedge dx_2 \wedge dx_3.$$

Théorème 1.5.1 i) $d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$.

ii) $d(\omega \wedge \phi) = d\omega \wedge \phi + (-1)^k \omega \wedge d\phi$, où ω est une k -forme et ϕ est une s -forme.

iii) $d(d\omega) = d^2\omega = 0$.

Remarque 1.5.3 i) Si f est une fonction $f \wedge \phi = f\phi$.

ii) Comme d'habitude on applique d'abord la multiplication et ensuite l'addition, donc $d(\omega \wedge \phi) = (d\omega \wedge \phi) + (-1)^k (\omega \wedge d\phi)$ dans ii).

1.6 Fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^m

Définition 1.6.1 Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction. On ote f_i les fonctions à valeurs réelles sur \mathbb{R}^n telles que

$$F(p) = (f_1(p), f_2(p), \dots, f_m(p))$$

pour tous les points p de \mathbb{R}^n . Ces fonctions sont appelées les fonctions de coordonnées euclidiennes de F .

Définition 1.6.2 Si $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe dans \mathbb{R}^n et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application différentiable, alors la fonction composée $\beta = F(\alpha) : I \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une courbe dans \mathbb{R}^m qu'on appelle l'image de α par l'application F .

Définition 1.6.3 Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable. Soit v est un vecteur tangent à \mathbb{R}^n au point p . Soit dF_p la vitesse initiale de la courbe $t \mapsto F(p + tv)$. La fonction qui en résulte envoie des vecteurs tangents à \mathbb{R}^n sur des vecteurs tangents à \mathbb{R}^m et est appelée l'application tangente de F .

Proposition 1.6.1 Soit $F = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ une application différentiable de \mathbb{R}^n sur \mathbb{R}^m . Si v est un vecteur tangent à \mathbb{R}^n au point p , alors

$$dF_p(v) = (v[f_1], \dots, v[f_m]) \quad \text{au point } F(p).$$

Corollaire 1.6.1 Si $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application différentiable, alors à chaque point p de \mathbb{R}^n l'application tangente $dF_p : T_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow T_{F(p)}(\mathbb{R}^m)$ est une transformation linéaire.

Définition 1.6.4 Une application différentiable $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est régulière si à tout point p de \mathbb{R}^n l'application tangente dF_p est injective.

Théorème 1.6.1 (Théorème d'inversion locale) Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application différentiable. Si dF_p est injective au point p , alors il existe un ensemble ouvert \mathcal{U} qui contient p tel que la restriction de l'application F à \mathcal{U} est un difféomorphisme de \mathcal{U} sur un voisinage ouvert \mathcal{V} de $F(p)$.

Chapitre 2

Courbes et repères

2.1 Courbes

Soit $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe.

- vecteur vitesse : $\alpha'(t)$,
- vitesse : $\nu(t) := \|\alpha'(t)\|$.
- Soit $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$, alors

$$\alpha'(t) = \left(\frac{d\alpha_1}{dt}, \frac{d\alpha_2(t)}{dt}, \frac{d\alpha_3(t)}{dt} \right),$$
$$\nu = \|\alpha'(t)\| = \left(\left(\frac{d\alpha_1(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha_2(t)}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\alpha_3(t)}{dt} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

- longueur d'arc de $t = a$ à $t = b$:

$$\int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

- α est régulière si $\alpha'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

Théorème 2.1.1 Soit α une courbe régulière dans \mathbb{R}^3 . Alors il existe une reparamétrisation β de α telle que β a une vitesse 1. On dit alors que β est paramétrée en longueur d'arc.

Preuve Soit $a \in I$ et

$$s(t) := \int_a^t \|\alpha'(u)\| du.$$

On a

$$\frac{ds}{dt} = \nu(t) > 0.$$

Soit $t = t(s)$ la fonction inverse de $s = s(t)$. Soit $\beta(s) = \alpha(t(s))$. On a

$$\|\beta'(s)\| = \frac{dt}{ds}(s) \|\alpha'(t(s))\| = \frac{dt}{ds}(s) \frac{ds}{dt}(t(s)) = 1.$$

□

Définition 2.1.1 *Un champ de vecteurs Y le long d'une courbe $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une application différentiable qui associe à tout $t \in I$ un vecteur au point $\alpha(t)$.*

Coordonnées :

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t)) = \sum y_i(t)U_i(\alpha(t)).$$

Si les fonctions $y_i(t)$ sont différentiables, alors on peut définir

$$Y'(t) = \sum y'_i(t)U_i.$$

En particulier la dérivée de la vitesse $\alpha''(t)$ est appelée l'accélération.

Remarque 2.1.1 *Si Y et Z sont deux champs de vecteurs et $Y * Z$ est constant, alors*

$$Y' * Z + Y * Z' = 0,$$

*en particulier si $\|Y\|^2 = 1$, alors $Y * Y' = 0$, c.à.d. Y et Y' sont orthogonaux à chaque point.*

Un champ de vecteurs est parallèle si toutes ses valeurs (vecteurs tangents) sont parallèles (les fonctions de coordonnées sont constantes).

- Lemme 2.1.1**
- i) *Une courbe est constante si et seulement si sa vitesse est nulle : $\alpha' = 0$.*
 - ii) *Une courbe non constante est une ligne droite si et seulement si son accélération est nulle : $\alpha''(t) = 0$.*
 - iii) *Un champ de vecteurs sur une courbe est parallèle si sa dérivée est nulle.*

preuve : Exo.

2.2 Repères de Frénet

Soit $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée en longueur d'arc, c.à.d. $\|\beta'(s)\| = 1$ pour tout $s \in I$.

- $T = \beta'$ est le champ tangent unitaire sur β .
- T' champ de courbure sur β . A cause de $T' * T = 0$ T' est orthogonal à T .
- $\kappa(s) = \|T'(s)\|$ fonction de courbure sur β . Plus κ est grand, plus β tourne.

Supposons $\kappa > 0$.

- Le champ de vecteurs $N := T'/\kappa$ sur β nous indique la direction dans laquelle β tourne. A tout point on appelle N le champ de vecteur normal principal sur β .
- Le champ de vecteurs $B = T \times N$ sur β est appelé champ de vecteurs binormal sur β .

Lemme 2.2.1 *Soit β une courbe paramétrée en longueur d'arc dans \mathbb{R}^3 avec $\kappa > 0$. Alors les trois champs de vecteurs T, N et B sur β sont des champs de vecteurs unitaires qui sont mutuellement orthogonaux à chaque point. On appelle T, N, B un repère de Frénet sur β .*

preuve : Exo.

$$— T = \beta' \Rightarrow T' = \beta'' = \kappa N.$$

— On a

$$(2.2.1) \quad B' * B = 0,$$

$$(2.2.2) \quad B' * T = 0.$$

En effet (2.2.1) suit de $\|B\| = 1$. Pour montrer (2.2.2) on commence par

$$(2.2.3) \quad B * T = 0 \Rightarrow B' * T + B * T' = 0 \Rightarrow B' * T = -B * T' = -B\kappa * N = 0.$$

Donc

$$(2.2.4) \quad B' = -\tau N.$$

On appelle τ dans (2.2.4) la torsion.

Théorème 2.2.1 (Frénet 1847, Serret 1851) *Si $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une courbe paramétrée en longueur d'arc avec courbure $\kappa > 0$ et torsion τ , alors*

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

Preuve Il ne reste que la deuxième ligne à démontrer. On a

$$N' = (N' * T)T + (N' * N)N + (N' * B)B.$$

On calcule les coefficients :

$$N * T = 0 \Rightarrow N' * T + N * T' = 0 \Rightarrow N' * T = -N * T' = -N * \kappa N = -\kappa.$$

$N' * N = 0$ puisque N est un vecteur unitaire. Enfin,

$$N' * B = -N * B' = -N * (-\tau N) = \tau.$$

□

Une courbe plane est une courbe dont l'image est entièrement incluse dans un plan de \mathbb{R}^3 .

Corollaire 2.2.1 *Soit β une courbe paramétrée en longueur d'arc dans \mathbb{R}^3 avec $\kappa > 0$. β est une courbe plane si et seulement si $\tau = 0$.*

preuve

— Soit $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ une courbe plane. Alors il existe $p, q \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$(\beta(s) - p) * q = 0 \quad \forall s \in I.$$

Il s'ensuit

$$\beta'(s) * q = \beta''(s) * q = 0 \quad \forall s \in I.$$

Donc q est orthogonal à $T = \beta'$ et $N = \beta''/\kappa$. Mais B est aussi orthogonal à T, N , donc $B = \pm q/\|q\|$. Donc $B' = 0$ ce qui entraîne $\tau = 0$.

- Soit maintenant $\tau = 0$. Donc $B' = 0$ et B est alors parallèle. On peut alors identifier B avec un point dans \mathbb{R}^3 . On affirme que β est dans le plan qui contient $\beta(0)$ et qui est orthogonal à B . On considère

$$f(s) = (\beta(s) - \beta(0)) * B.$$

Alors, on a

$$f'(s) = \beta'(s) * B = T * B = 0.$$

Clairement $f(0) = 0$, donc $f \equiv 0$, ce qui termine la preuve. □

Lemme 2.2.2 *Soit β une courbe paramétrée en longueur d'arc, courbure constante $\kappa > 0$ et torsion zéro. Alors β est une partie d'un cercle de rayon $1/\kappa$.*

preuve Par le Corollaire 2.2.1 on sait déjà que β est une courbe plane. Soit

$$\gamma = \beta + \frac{1}{\kappa}N.$$

Utilisant la formule de Frénet on trouve :

$$\gamma' = \beta' + \frac{1}{\kappa}N' = T + \frac{1}{\kappa}(-\kappa T) = 0.$$

Donc $\gamma(s) = c = \text{const.}$ pour tout s . On calcule

$$\|c - \beta(s)\| = \left\| \frac{1}{\kappa}N(s) \right\| = \frac{1}{\kappa}.$$

□

Remarque 2.2.1 *Soit α une courbe régulière dans \mathbb{R}^3 pas nécessairement paramétrée en longueur d'arc. Soit $\bar{\alpha}$ une reparamétrisation en longueur d'arc de α , $\alpha(t) = \bar{\alpha}(s(t))$. On définit $\kappa = \bar{\kappa}(s)$ etc. On trouve (exo) les formules de Frénet :*

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\nu & 0 \\ -\kappa\nu & 0 & \tau\nu \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}.$$

On a également (exo)

$$\alpha' = \nu T, \quad \alpha'' = \frac{d\nu}{dt}T + \kappa\nu^2 N.$$

2.3 Dérivées covariantes

Définition 2.3.1 Soit W un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 et soit v un vecteur tangent de \mathbb{R}^3 au point p . Alors la dérivée covariante de W par rapport à v est le vecteur tangent

$$\nabla_v W = W(p + tv)'(0)$$

au point p .

Donc $\nabla_v W$ mesure le taux de changement de $W(p)$ quand p bouge dans la direction v .

Lemme 2.3.1 Si $W = \sum w_i U_i$ est un champ de vecteurs de \mathbb{R}^3 et v est un vecteur tangent au point p , alors

$$\nabla_v W = \sum v[w_i] U_i(p).$$

Rappelle que si $v = \sum v_i U_i$, alors $v_p[f] = \frac{d}{dt}(f(p + tv))|_{t=0} = \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

preuve On a

$$W(p + tv) = \sum_i w_i(p + tv) U_i(p + tv).$$

Ceci donne

$$\nabla_v W = W(p + tv)'(0) = \sum_i v[w_i] U_i(p).$$

□

”Afin d’appliquer ∇_v à un champ de vecteurs, applique v aux coordonnées euclidiennes”.

Théorème 2.3.1 Soient v et w des vecteurs tangents à \mathbb{R}^3 au point p et Y et Z des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 . Soit f une fonction et $a, b \in \mathbb{R}$. Alors on a

- i) $\nabla_{av+bw} Y = a \nabla_v Y + b \nabla_w Y$.
- ii) $\nabla_v(aY + bZ) = a \nabla_v Y + b \nabla_v Z$.
- iii) $\nabla_v(fY) = v[f]Y(p) + f(p) \nabla_v Y$.
- iv) $v[Y * Z] = \nabla_v Y * Z(p) + Y(p) * \nabla_v Z$.

preuve

On montre (iv) et on laisse le reste comme exo. Soit

$$Y = \sum y_i U_i, \quad Z = \sum z_i U_i.$$

Alors

$$Y * Z = \sum y_i z_i.$$

Il s’ensuit

$$(2.3.1) \quad v[Y * Z] = v[\sum y_i z_i] = \sum v[y_i] z_i(p) + \sum y_i(p) v[z_i].$$

Par le lemme précédent

$$\nabla_v Y = \sum v[y_i] U_i(p), \quad \nabla_v Z = \sum v[z_i] U_i(p).$$

Les deux sommes dans (2.3.1) sont alors précisément $\nabla_v Y * Z(p)$ et $Y(p) * \nabla_v Z$. □

Corollaire 2.3.1 Soient V, W, Z des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 . Alors

- i) $\nabla_{fV+gW}Y = f\nabla_VY + g\nabla_WY$ pour toutes les fonctions f et g .
- ii) $\nabla_V(aY + bZ) = a\nabla_VY + b\nabla_VZ$ pour tous les nombres réels a et b .
- iii) $\nabla_V(fY) = V[f]Y + f\nabla_VY$ pour toutes les fonctions f .
- iv) $V[Y * Z] = \nabla_VY * Z + Y * \nabla_VZ$.

2.4 Champs de repères

Darboux autour de 1880, généralisé plus tard par Cartan.

Définition 2.4.1 Les champs de vecteurs E_1, E_2, E_3 constituent un champ de repères sur \mathbb{R}^3 si

$$E_i * E_j = \delta_{ij} \quad (1 \leq i, j \leq 3).$$

Lemme 2.4.1 Soit E_1, E_2, E_3 un champ de repères sur \mathbb{R}^3 .

- i) Si V est un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^3 , alors $V = \sum f_i E_i$, où les fonctions f_i sont appelées fonctions de coordonnées de V par rapport à E_1, E_2, E_3 .
- ii) Si $V = \sum f_i E_i$ et $W = \sum g_i E_i$, alors $V * W = \sum f_i g_i$, en particulier $\|V\| = (\sum f_i^2)^{1/2}$.

2.5 Formes de connexion

$$\begin{pmatrix} \nabla_v E_1 \\ \nabla_v E_2 \\ \nabla_v E_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$c_{ij} = \nabla_v E_i * E_j(p), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Comme les coefficients dépendent de v on va noter

$$\omega_{ij}(v) = \nabla_v E_i * E_j(p).$$

Lemme 2.5.1 Soit E_1, E_2, E_3 un champ de repères sur \mathbb{R}^3 . Pour tout champ de vecteurs v sur \mathbb{R}^3 , soit

$$\omega_{ij}(v) = \nabla_v E_i * E_j(p), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Alors chaque ω_{ij} est une 1-forme et $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

On appelle ω_{ij} les formes de connexion du champ de vecteurs E_1, E_2, E_3 .

Preuve

Par définition les ω_{ij} sont des fonctions réelles sur les vecteurs tangents. Il suffit alors de vérifier la linéarité. Utilisant Théorème 2.3.1 on obtient :

$$\begin{aligned}\omega_{ij}(av + bw) &= \nabla_{av+bw} E_i * E_j \\ &= (a\nabla_v E_i + b\nabla_w E_i) * E_j(p) \\ &= a\nabla_v E_i * E_j(p) + b\nabla_w E_i * E_j(p) \\ &= a\omega_{ij}(v) + b\omega_{ij}(w).\end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\omega_{ij}(v) = -\omega_{ji}(v)$ pour tout vecteur v . $E_i * E_j = \delta_{ij}$ donne par la formule de Leibniz (Théorème 2.3.1 (iv)) :

$$0 = v[E_i * E_j] = \nabla_v E_i * E_j(p) + E_i(p) * \nabla_v E_j = \omega_{ij}(v) + \omega_{ji}(v).$$

□

$\omega_{ij}(v) = \nabla_v E_i * E_j(p)$ est le taux initial avec lequel E_i tourne vers E_j quand p bouge dans la direction v .

Théorème 2.5.1 Soit ω_{ij} les formes de connexion du champ de repères E_1, E_2, E_3 sur \mathbb{R}^3 . Alors pour tout champ de vecteurs V sur \mathbb{R}^3 ,

$$\nabla_V E_i = \sum_j \omega_{ij}(V) E_j \quad (1 \leq i \leq 3).$$

On a

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0, \quad \omega_{21} = -\omega_{12}, \quad \omega_{31} = -\omega_{13}, \quad \omega_{32} = -\omega_{23}.$$

$$E_i = \sum_j a_{ij} U_j$$

$A = (a_{ij})$ est appelée la matrice de passage.

Théorème 2.5.2 $\omega = dAA^t$ ou de façon équivalente

$$\omega_{ij} = \sum_k a_{jk} da_{ik}$$

Preuve

$$\begin{aligned}E_i &= \sum_k a_{ik} U_k \\ \nabla_V E_i &= \sum_k V[a_{ik}] U_k = \sum_k V[a_{ik}] \sum_j a_{jk} E_j \\ &= \sum_j \left(\sum_k a_{jk} da_{ik}(V) \right) E_j.\end{aligned}$$

2.6 Les équations structurelles

Définition 2.6.1 Soit E_1, E_2, E_3 un champ de repères sur \mathbb{R}^3 . Les formes duales $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ de ce champ de repères sont définies par

$$\Theta_i(v) = v * E_i(p)$$

pour tout vecteur tangent v au point p .

Remarque 2.6.1 — $\Theta_i(E_j) = \delta_{ij}$,

— Dans le cas du champ de vecteurs U_1, U_2, U_3 les formes duales sont dx_1, dx_2, dx_3 . En effet

$$dx_i(v) = v_i = v * U_i(p).$$

— $V = \sum \Theta_i(V)E_i$.

Lemme 2.6.1 Soient $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ les formes duales d'un champ de repères E_1, E_2, E_3 . Alors toute 1-forme ϕ sur \mathbb{R}^3 a une extension unique

$$\phi = \sum \phi(E_i)\Theta_i.$$

Preuve

On calcule

$$\begin{aligned} \left(\sum \phi(E_i)\Theta_i \right) (V) &= \sum \phi(E_i)\Theta_i(V) \\ &= \phi \left(\sum \Theta_i(V)E_i \right) = \phi(V). \end{aligned}$$

□

Théorème 2.6.1 (Equations structurelles de Cartan) Soit E_1, E_2, E_3 un champ de repères sur \mathbb{R}^3 avec des formes duales $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ et formes de connexion ω_{ij} . Les dérivées extérieures de ces formes vérifient

i) La première équation structurelle

$$d\Theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \Theta_j \quad (1 \leq i \leq 3),$$

ii) La deuxième équation structurelle

$$d\omega_{ij} = \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \quad (1 \leq i, j \leq 3).$$

$$\Theta = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad d\xi = \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}.$$

La formule $\Theta_i = \sum a_{ij}dx_j$ s'écrit

$$\Theta = Ad\xi.$$

Preuve de la première équation structurelle $d(d\xi) = 0$, donc

$$d\Theta = d(Ad\xi) = dAd\xi = dA^t A * Ad\xi = \omega\Theta.$$

Preuve de la deuxième équation structurelle

$$d(df g) = d(gdf) = dg \wedge df = -df \wedge dg.$$

Utilisant $(AB)^t = B^t A^t$, on obtient

$$d\omega = d(dAA^t) = -dA * d(A^t) = -dAA^t * A(dA)^t = -\omega\omega^t = \omega\omega,$$

où dans le dernier pas on a utilisé l'antisymétrie de ω . □

Chapitre 3

Calcul différentiel sur les surfaces de \mathbb{R}^3

3.1 Surfaces de \mathbb{R}^3

Définition 3.1.1 Une carte (locale) $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ est une application régulière injective d'un ensemble ouvert D de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^3 dont l'inverse $\mathbf{x}^{-1} : x(D) \rightarrow D$ est continue.

Dessin

Remarque 3.1.1 i) L'image $x(D)$ d'une carte x est un sous-ensemble lisse de \mathbb{R}^3 de dimension 2.

ii) L'exigence d'injectivité évite que $x(D)$ se recoupe lui-même.

Définition 3.1.2 Une surface dans \mathbb{R}^3 est un sous-ensemble S de \mathbb{R}^3 tel que pour tout point p de S il existe une carte à valeurs dans S dont l'image contient un voisinage de p dans S .

Dessin

Exemple 3.1.1 i) La sphère S^2 . Dessin

Pôle nord :

$$x : D(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

x injective et surjective sur l'hémisphère nord. x est régulière :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial u}{\partial v} & \frac{\partial v}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix},$$

$$f = \sqrt{1 - u^2 - v^2}.$$

$$x^{-1} : x(D) \rightarrow D, \quad x^{-1}(p_1, p_2, p_3) = (p_1, p_2).$$

ii) Graphe d'une fonction $S : z = f(x, y)$, où $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, D ouvert. Même argument avec la carte de "Monge".

$$x(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Théorème 3.1.1 Soit $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable, $c \in \mathbb{R}$. L'ensemble $S : g(x, y, z) = c$ est une surface si le différentiel dg est différent de zéro à tout point de S .

Preuve

On utilise le théorème de fonctions implicites. Soit $p \in S$. Comme $dg \neq 0$, au moins une des dérivées partielles au point p est non nulle, disons $(\frac{\partial g}{\partial z})(p) \neq 0$. Théorème des fonctions implicites. Il existe un voisinage D de (p_1, p_2) et une fonction différentiable $h : D \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

i) Pour tout point (u, v) dans D , le point $(u, v, h(u, v))$ est dans S ; c.à.d. $g(u, v, h(u, v)) = c$.

ii) Il existe un voisinage de p dans S qui consiste de points de la forme $(u, v, h(u, v))$.

La carte de Monge $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$x(u, v) = (u, v, h(u, v))$$

vérifie alors les conditions de la définition 3.1.1. □

Définition 3.1.3 Soit $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ une carte. Pour tout point $(u_0, v_0) \in D$ on définit :

i) Le vecteur vitesse à u_0 de la courbe de paramètre u $v = v_0$ est noté $x_u(u_0, v_0)$.

ii) Le vecteur vitesse à v_0 de la courbe de paramètre v $u = u_0$ est noté $x_v(u_0, v_0)$.

Les vecteurs $x_u(u_0, v_0)$ et $x_v(u_0, v_0)$ sont appelés les vitesses partielles de x au point (u_0, v_0) .

Définition 3.1.4 Une application régulière $x : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont l'image est incluse dans une surface S est appelée une paramétrisation de la région $x(D)$ dans S .

3.2 Fonctions différentiables et vecteurs tangents

Proposition 3.2.1 *Soit p un point d'une surface S et soient $x : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ et $y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ deux paramétrisations de S telles que $p \in x(U) \cap y(V) =: W$. Alors le "changement de coordonnées" $h = x^{-1} \circ y : y^{-1}(W) \rightarrow x^{-1}(W)$ est un difféomorphisme, c.à.d. h est différentiable et elle possède un inverse différentiable h^{-1} .*

Preuve $h = x^{-1} \circ y$ est un homéomorphisme comme composée d'homéomorphismes. Soit $r \in y^{-1}(W)$, $q = h(r)$. Comme $\mathbf{x}(u, v) = ((x(u, v), y(u, v), z(u, v)))$ est une paramétrisation, nous pouvons supposer qu'à renommer les axes

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \right| \neq 0.$$

On définit $F : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ par

$$F(u, v, t) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v) + t), \quad (u, v) \in U, t \in \mathbb{R}.$$

Dessin

Déterminant de dF_q :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{vmatrix} = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(q) \right| \neq 0.$$

Théorème d'inversion locale : il existe un voisinage \mathcal{M} de $\mathbf{x}(q)$ dans \mathbb{R}^3 tel que F^{-1} existe et est différentiable dans \mathcal{M} . Par la continuité de y , il existe un voisinage \mathcal{N} de r dans V tel que $y(\mathcal{N}) \subset \mathcal{M}$. On a $h|_{\mathcal{N}} = F^{-1} \circ y|_{\mathcal{N}}$, donc h est différentiable en r . Même argument pour h^{-1} .
□

Définition 3.2.1 *Soit S une surface de \mathbb{R}^3 .*

- i) *Une fonction $F : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ est différentiable au point p s'il existe une carte $x : D \rightarrow S$ avec $p \in x(D)$ telle que $F \circ x$ est différentiable au point $x^{-1}(p)$.*
- ii) *Une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow S$ est différentiable au point p s'il existe une carte $x : D \rightarrow S$ avec $F(p) \in x(D)$ telle que $x^{-1} \circ F$ est différentiable au point p .*

Remarque 3.2.1 *Grâce à la Proposition 3.2.1 la définition est indépendante du choix de la carte.*

Lemme 3.2.1 *Soit $\alpha : I \rightarrow S$ une courbe dont l'image est entièrement incluse dans l'image $x(D)$ d'une seule carte x . Alors il existe des fonctions différentiables uniques a_1, a_2 sur I telles que*

$$\forall t \quad \alpha(t) = x(a_1(t), a_2(t)).$$

Preuve

$x^{-1} \circ \alpha : I \rightarrow D$ est différentiable. Si a_1, a_2 sont les fonctions de coordonnées euclidiennes, alors

$$\alpha = x \circ x^{-1} \alpha = x(a_1, a_2).$$

Supposons $\alpha = x(b_1, b_2)$, alors

$$(a_1, a_2) = x^{-1} \alpha = x^{-1} \circ x(b_1, b_2) = (b_1, b_2).$$

□

Définition 3.2.2 Soit p un point d'une surface S de \mathbb{R}^3 . Un vecteur tangent v de \mathbb{R}^3 au point p est tangent à S si v est le vecteur vitesse d'une courbe dans S . L'ensemble de tous les vecteurs tangents à S au point p est appelé l'espace tangent et noté $T_p(S)$.

Lemme 3.2.2 Soit p un point d'une surface S et soit x une carte de S telle que $x(u_0, v_0) = p$. Un vecteur tangent à \mathbb{R}^3 est tangent à S si et seulement si il peut être écrit comme combinaison linéaire de $x_u(u_0, v_0)$ et $x_v(u_0, v_0)$.

Remarque 3.2.2 Le lemme montre en particulier que $T_p(S)$ est un espace vectoriel de dimension 2.

Preuve du lemme

Clairement $x_u(u_0, v_0)$ et $x_v(u_0, v_0)$ sont des vecteurs tangents à S . Supposons maintenant que v soit tangent à S au point p . Il existe donc une courbe α dans S telle que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Par le Lemme 3.2.1 on peut écrire $\alpha = x(a_1, a_2)$, donc :

$$\alpha' = x_u(a_1, a_2) \frac{da_1}{dt} + x_v(a_1, a_2) \frac{da_2}{dt}.$$

Mais comme $\alpha(0) = p = x(u_0, v_0)$, on a $a_1(0) = u_0$, $a_2(0) = v_0$. Donc à $t = 0$ on trouve

$$v = \alpha'(0) = x_u(u_0, v_0) \frac{da_1}{dt}(0) + x_v(u_0, v_0) \frac{da_2}{dt}(0).$$

Inversement supposons qu'un vecteur tangent v à \mathbb{R}^3 peut s'écrire comme

$$v = c_1 x_u(u_0, v_0) + c_2 x_v(u_0, v_0).$$

Alors par les mêmes calculs v est le vecteur vitesse de la courbe

$$t \mapsto x(u_0 + tc_1, v_0 + tc_2).$$

Donc v est tangent à S au point p . □

Définition 3.2.3 Un champ de vecteurs euclidien sur une surface S de \mathbb{R}^3 est une fonction qui associe à tout point p de S un vecteur tangent $Z(p)$ de \mathbb{R}^3 au point p . Un champ de vecteurs euclidien V est un champ de vecteurs tangent si à tout point p $V(p)$ est tangent à S . Un champ de vecteurs euclidien N est dit normal à S si à tout point p de S le vecteur $N(p)$ est normal à l'espace tangent $T_p(S)$.

Remarque 3.2.3 i) Comme $T_p(S)$ est un sous-espace de $T_p(\mathbb{R}^3)$ de dimension 2 il existe seulement une direction normale à S au point p . Tous les vecteurs normaux à S au point p sont colinéaires.

ii) $T_p(S)$ est donc l'ensemble des vecteurs qui sont orthogonaux à un vecteur normal non nul donné.

Lemme 3.2.3 Si $S : g = c$ est une surface de \mathbb{R}^3 , le champ de vecteurs gradient $\nabla g = \sum (\frac{\partial g}{\partial x_i}) U_i$ (considéré seulement à des points de S) est un champ de vecteurs normal non nul sur la surface S .

Preuve

Le fait que le champ de vecteur ne s'annule pas figure dans la définition de surface dans ce cas. Il faut montrer que $(\nabla g)(p) * v = 0$ pour tout vecteur tangent v à S au point p . Soit α une courbe dans S . Alors $g \circ \alpha = \text{const.} = c$. Il s'ensuit

$$\sum \frac{\partial g}{\partial x_i}(\alpha) \frac{d\alpha_i}{dt} = 0.$$

On choisit α telle qu'elle ait vitesse initiale

$$\alpha'(0) = v = (v_1, v_2, v_3)$$

au point $\alpha(0) = p$. Alors

$$0 = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}(\alpha(0)) \frac{d\alpha_i}{dt}(0) = \sum \frac{\partial g}{\partial x_i}(p) v_i = (\nabla g)(v) * v.$$

□

Définition 3.2.4 Soit v un vecteur tangent à S au point p , et soit $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. La dérivée $v[f]$ de f par rapport à v est la valeur commune de $(\frac{d}{dt}(f \circ \alpha))(0)$ de toutes les courbes α dans S avec vitesse initiale v au point p .

3.3 Formes différentielles sur une surface

Définition 3.3.1 Une k -forme extérieure ω sur une surface S de \mathbb{R}^3 est une application qui associe à tout point $p \in S$ un élément de $\Lambda^k T_p^*(S)$. C'est une k -forme différentielle si pour tous les champs de vecteurs V_1, \dots, V_k , $\omega(V_1, \dots, V_k)$ est différentiable.

Définition 3.3.2 Soit f une fonction différentiable sur une surface S de \mathbb{R}^3 . La différentielle de f est la 1--forme définie par

$$df(V) = V[f].$$

pour tous les champs de vecteurs V tangents à S .

Définition 3.3.3 Soit Φ une 1--forme différentielle sur une surface S . La dérivée extrériorité de Φ de Φ est la 2--forme telle que pour toute carte \mathbf{x} dans S on ait

$$d\Phi(x_u, x_v) = \frac{\partial}{\partial u}(\Phi(x_v)) - \frac{\partial}{\partial v}(\Phi(x_u)).$$

Exemple 3.3.1

$$x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u, v) \mapsto (u, v, 0).$$

On a :

$$x_u = U_1, \quad x_v = U_2.$$

On considère $\phi = gdu + f dv$. On a

$$\phi(x_u) = g, \quad \phi(x_v) = f, \quad \frac{\partial \phi(x_v)}{\partial u} = \partial_u f, \quad \frac{\partial \phi(x_u)}{\partial v} = \partial_v g$$

Donc

$$d\phi = \left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial v} \right) du \wedge dv.$$

Lemme 3.3.1 Soit S une surface, $\mathbf{x} : D \rightarrow \mathbf{x}(D)$ et $\mathbf{y} : E \rightarrow \mathbf{y}(E)$ deux cartes C^2 . Soit Φ une 1-forme différentielle sur S . Alors $d_x \Phi = d_y \Phi$ sur l'intersection $x(D) \cap y(E)$.

Preuve Comme y_u et y_v sont indépendants à chaque point, il suffit de montrer que

$$(d_y \Phi)(y_u, y_v) = (d_x \Phi)(y_u, y_v).$$

Utilisant Proposition 3.2.1 on voit qu'on peut écrire $y = x(\bar{u}, \bar{v})$. On obtient :

$$\begin{aligned} y_u &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} x_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} x_{\bar{v}}, \\ y_v &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} x_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} x_{\bar{v}}, \end{aligned}$$

où $x_{\bar{u}}$ et $x_{\bar{v}}$ sont évalués à partir de maintenant au point (\bar{u}, \bar{v}) . On obtient alors

$$(3.3.1) \quad (d_x \Phi)(y_u, y_v) = J(d_x \Phi)(x_{\bar{u}}, x_{\bar{v}}),$$

où J est le Jacobien $\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}$. Il s'agit alors de démontrer

$$(3.3.2) \quad \frac{\partial}{\partial u}(\Phi(y_v)) - \frac{\partial}{\partial v}(\Phi(y_u)) = J \left\{ \frac{\partial}{\partial \bar{u}}(\Phi(x_{\bar{v}})) - \frac{\partial}{\partial \bar{v}}(\Phi(x_{\bar{u}})) \right\}.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} & \partial_u \Phi(y_v) - \partial_v \Phi(y_u) \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \partial_u \Phi(x_{\bar{v}}) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \partial_u \Phi(x_{\bar{v}}) - \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \partial_v \Phi(x_{\bar{u}}) - \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \partial_v \Phi(x_{\bar{v}}) \\ &= \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \partial_{\bar{u}} \Phi(x_{\bar{u}}) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \partial_{\bar{v}} \Phi(x_{\bar{u}}) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \partial_{\bar{v}} \Phi(x_{\bar{v}}) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \partial_{\bar{u}} \Phi(x_{\bar{v}}) \\ & - \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \partial_{\bar{u}} \Phi(x_{\bar{u}}) + \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \partial_{\bar{v}} \Phi(x_{\bar{u}}) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} \partial_{\bar{v}} \Phi(x_{\bar{v}}) + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \partial_{\bar{u}} \Phi(x_{\bar{v}}) \right) \\ &= \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \right) (\partial_{\bar{u}} \Phi(x_{\bar{v}}) - \partial_{\bar{v}} \Phi(x_{\bar{u}})). \end{aligned}$$

□

Théorème 3.3.1 *Pour une fonction C^2 sur une surface S on a : $d(df) = 0$.*

Preuve

Soit $\Psi = df$. Il faut montrer $d\Psi = 0$. Soit $x : D \rightarrow x(D)$ une carte. Il suffit de montrer $(d\Psi)(x_u, x_v) = 0$. On a (exo) :

$$\Psi(x_u) = df(x_u) = x_u(f) = \frac{\partial}{\partial u}(f \circ x)$$

et de la même façon :

$$\Psi(x_v) = \frac{\partial}{\partial v}(f \circ x).$$

Il s'ensuit

$$d\Psi(x_u, x_v) = \frac{\partial}{\partial u}(\Psi(x_v)) - \frac{\partial}{\partial v}(\Psi(x_u)) = \frac{\partial^2(f \circ x)}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2(f \circ x)}{\partial v \partial u} = 0.$$

□

Définition 3.3.4 *Une forme différentielle Φ est fermée si sa dérivée extérieure est nulle $d\Phi = 0$. Φ est exacte si elle est la dérivée extérieure d'une autre forme : $\Phi = d\xi$.*

3.4 Applications différentiables entre surfaces

Définition 3.4.1 *Une application $F : M \rightarrow N$ d'une surface sur une autre est différentiable si pour toute carte x dans M et toute carte y dans N la fonction $y^{-1}Fx$ est différentiable dans le sens euclidien.*

Définition 3.4.2 *Soit $F : M \rightarrow N$ une application différentiable entre surfaces. L'application tangente dF de F associe à tout vecteur tangent v à M le vecteur tangent $dF(v)$ à N telle que si v est la vitesse initiale d'une courbe α dans M , alors $dF(v)$ est la vitesse initiale de la courbe $F(\alpha)$ dans N .*

Théorème 3.4.1 (Théorème d'inversion locale) *Soit $F : M \rightarrow N$ une application C^1 entre surfaces. On suppose que pour un point $p \in M$, $dF_p : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ est un isomorphisme linéaire. Alors il existe un voisinage \mathcal{U} de p dans M tel que la restriction de F à \mathcal{U} est un difféomorphisme sur un voisinage \mathcal{V} de $F(p)$ dans N .*

Remarque 3.4.1 i) *Le Théorème implique qu'une application F entre surfaces qui est bijective et régulière est en fait un difféomorphisme. En effet comme F est bijective l'inverse F^{-1} existe. Mais localement cet inverse doit coïncider avec l'inverse du difféomorphisme du théorème.*

ii) *On dit que deux surfaces sont difféomorphes s'il existe un difféomorphisme entre elles.*

Définition 3.4.3 *Soit $F : M \rightarrow N$ une application différentiable entre surfaces de \mathbb{R}^3 .*

i) Si Φ est une 1- forme sur N , alors $F^*\Phi$ est la forme sur M donnée par

$$(F^*\Phi)(v) = \Phi(dFv).$$

pour tous les vecteurs tangents v à M .

ii) Soit η une 2- forme différentielle sur N . On définit $F^*\eta$ comme la 2- forme différentielle sur M par

$$(F^*\eta)(v, w) = \eta(dFv, dFw)$$

pour toute paire (v, w) de vecteurs tangent à M .

Pour une forme différentielle ω on appelle $F^*\omega$ le tiré en arrière (pull-back) de ω par F .

Théorème 3.4.2 Soit $F : M \rightarrow N$ une application différentiable entre surfaces et ξ et η des formes différentielles sur N . Alors on a :

$$i) F^*(\xi + \eta) = F^*\xi + F^*\eta,$$

$$ii) F^*(\xi \wedge \eta) = F^*\xi \wedge F^*\eta,$$

$$iii) F^*(d\xi) = d(F^*\xi).$$

Dans i) ξ et η sont supposées d'avoir le même degré.

Preuve

On ne démontre que *iii*) dans le cas où ξ est une 1- forme. On doit montrer pour toute carte $x : D \rightarrow S$,

$$(d(F^*\xi))(x_u, x_v) = (F^*(d\xi))(x_u, x_v).$$

Soit $y = F(x)$ et $y_u := dF(x_u)$, $y_v := dF(x_v)$. Alors en utilisant les définitions de d et F^* , on obtient :

$$\begin{aligned} d(F^*\xi)(x_u, x_v) &= \partial_u\{(F^*\xi)(x_v)\} - \partial_v\{(F^*\xi)(x_u)\} \\ &= \partial_u\{\xi(dFx_v)\} - \partial_v\{\xi(dFx_u)\} \\ &= \partial_u(\xi(y_v)) - \partial_v(\xi(y_u)). \end{aligned}$$

Même si y n'est pas forcément une carte, la dernière expression est égale à $d\xi(y_u, y_v)$ (exo). Mais,

$$d\xi(y_u, y_v) = d\xi(dFx_u, dFx_v) = (F^*(d\xi))(x_u, x_v).$$

□

3.5 Intégration de formes différentielles

Définition 3.5.1 Soit ϕ une 1- forme différentielle sur une surface S , et soit $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ un segment d'une courbe dans S . L'intégrale de ϕ le long de α est définie par

$$\int_{\alpha} \phi = \int_{[a,b]} \alpha^* \phi = \int_a^b \phi(\alpha'(t)) dt.$$

Exemple 3.5.1 V : champ de force,
 $\alpha(t)$: mouvement d'une particule.

Composante de la force tangente à α :

$$V(\alpha) * \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \|V(\alpha)\| \cos \theta.$$

Travail effectué pendant le laps de temps Δt : Force \times distance $\|\alpha'(t)\| \Delta t$. Somme

$$W = \int_a^b V(\alpha(t)) * \alpha'(t) dt = \int_\alpha \phi,$$

où $\phi(w) = w * V(p)$.

Théorème 3.5.1 Soit f une fonction continue sur S , et soit $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ un segment d'une courbe dans S de $p = \alpha(a)$ à $q = \alpha(b)$. Alors

$$\int_\alpha df = f(q) - f(p).$$

Preuve

Par définition,

$$\int_\alpha df = \int_a^b df(\alpha') dt.$$

Mais,

$$df(\alpha') = \alpha'[f] = \frac{d}{dt}(f(\alpha)).$$

Donc on obtient par le théorème fondamental de l'analyse :

$$\int_\alpha df = \int_a^b \frac{d}{dt}(f(\alpha)) = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)) = f(q) - f(p).$$

□

On considère un rectangle fermé $R : a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$ dans \mathbb{R}^2 . Un 2-segment est une application différentiable $x : R \rightarrow S$. On suppose toujours que x peut être prolongé dans un ouvert qui contient R . La différentiabilité est à comprendre dans ce sens.

Définition 3.5.2 Soit η une 2-forme différentielle sur S , et soit $x : R \rightarrow S$ un 2-segment dans S . L'intégrale de η sur x est définie comme

$$\int \int_x \eta = \int \int_R x^* \eta = \int_a^b \int_c^d \eta(x_u, x_v) dudv.$$

Définition 3.5.3 Soit $x : R \rightarrow S$ un 2-segment dans S , avec R le rectangle fermé $a \leq u \leq b$, $c \leq v \leq d$. Les courbes de bord sont les segments α , β , γ , δ tels que

$$\begin{aligned}\alpha(u) &= x(u, c), \\ \beta(v) &= x(b, v), \\ \gamma(u) &= x(u, d), \\ \delta(v) &= x(a, v).\end{aligned}$$

Le bord du rectangle est l'expression formelle

$$\partial x = \alpha + \beta - \gamma - \delta.$$

Pour une 1- forme on définit l'intégrale sur le bord par

$$\int_{\partial x} \phi = \int_{\alpha} \phi + \int_{\beta} \phi - \int_{\gamma} \phi - \int_{\delta} \phi.$$

Théorème 3.5.2 (Théorème de Stokes) Soit ϕ une 1- forme sur une surface S , et $x : R \rightarrow S$ un 2-segment. Alors

$$\int \int_x d\phi = \int_{\partial x} \phi.$$

Utilisant la définition de l'intégrale d'une 2- forme on obtient :

$$\int \int_x d\phi = \int \int_R \left(\frac{\partial}{\partial u}(\phi(x_v)) - \frac{\partial}{\partial v}(\phi(x_u)) \right) dudv.$$

Soit $f = \phi(x_u)$ et $g = \phi(x_v)$. Alors l'équation devient :

$$\int \int_x d\phi = \int \int_R \frac{\partial g}{\partial u} dudv - \int \int_R \frac{\partial f}{\partial v} dudv.$$

On commence par la première intégrale :

$$\int \int_R \frac{\partial g}{\partial u} dudv = \int_c^d I(v)dv, \quad I(v) = \int_a^b \frac{\partial g}{\partial u}(u, v)du.$$

Donc :

$$(3.5.1) \quad \int \int_R \frac{\partial g}{\partial u} dudv = \int_c^d g(b, v) - \int_c^d g(a, v)dv$$

Par définition $g(b, v) = \phi(x_v(b, v)) = \phi(\beta'(v))$. Donc

$$\int_c^d g(b, v)dv = \int_c^d \phi(\beta'(v))dv = \int_\beta \phi.$$

Un argument analogue montre que le deuxième terme dans (3.5.1) est $\int_\delta \phi$. On traite les termes avec f de la même façon. Ceci donne :

$$\int \int_x d\phi = \left(\int_\beta \phi - \int_\delta \phi \right) - \left(\int_\gamma \phi - \int_\alpha \phi \right) = \int_{\partial x} \phi.$$

□

Lemme 3.5.1 Soit $\alpha(h) : [a, b] \rightarrow S$ une reparamétrisation d'une courbe $\alpha : [c, d] \rightarrow S$ par $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$. Pour toute 1-forme sur S , on a :

i) Si h préserve l'orientation, c.à.d. $h(a) = c$ et $h(b) = d$, alors

$$\int_{\alpha(h)} \phi = \int_\alpha \phi.$$

ii) Si h inverse l'orientation, c.à.d., si $h(a) = d$ et $h(b) = c$, alors

$$\int_{\alpha(h)} \phi = - \int_\alpha \phi.$$

Preuve

La vitesse de $\alpha(h)$ est $\alpha(h)' = \frac{dh}{dt} \alpha'(h)$, donc

$$\int_{\alpha(h)} \phi = \int_a^b \phi(\alpha(h)') dt = \int_a^b \phi(\alpha'(h)) \frac{dh}{dt} dt.$$

On applique maintenant le théorème de changement de variables. Si h préserve l'orientation, alors

$$\int_{\alpha(h)} \phi = \int_c^d \phi(\alpha') du = \int_\alpha \phi,$$

tandis que si h inverse l'orientation

$$\int_{\alpha(h)} \phi = - \int_c^d \phi(\alpha') du = - \int_\alpha \phi.$$

□

3.6 Propriétés topologiques des surfaces

Définition 3.6.1 i) Une surface S est connexe par arcs si pour toute paire (p, q) de points dans S , il existe un chemin qui lie p et q .

ii) Une surface est connexe si S n'est pas la réunion de deux ensembles ouverts disjoints non vides dans S .

Lemme 3.6.1 Pour une surface S , S est connexe par arcs si et seulement si S est connexe.

Preuve : exo

Lemme 3.6.2 Une fonction continue sur une région compacte \mathcal{R} d'une surface S admet un maximum sur \mathcal{R} .

admis

Définition 3.6.2 Une surface S est orientable s'il existe une 2- forme différentielle μ sur S qui est non nul à tout point de S .

Souvent on n'exige que la continuité de la 2- forme.

Exemple 3.6.1 (La sphère S^2 est orientable) La sphère S^2 est orientable : la restriction à S^2 de la 2- forme ω définie par

$$\omega = \sum_{i=0}^2 (-1)^i x^i dx^0 \wedge \dots \widehat{dx^i} \dots \wedge dx^2$$

est partout non nulle puisque si (v_1, v_2) est une base de $T_p S^2$,

$$\omega_x(v_1, v_2) = \det(x, v_1, v_2) \neq 0.$$

On vérifie qu'en restriction à l'ouvert $U_k = \{x \in S^2, x^k \neq 0\}$ on a

$$\omega = \frac{(-1)^k}{x^k} dx^0 \wedge \dots \widehat{dx^k} \dots \wedge dx^2.$$

Un champ de vecteurs normal unitaire U sur S est un champ de vecteurs qui est partout normal à la surface et dont la longueur est 1 partout sur la surface.

Proposition 3.6.1 Une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ est orientable si et seulement s'il existe un champ de vecteurs unitaire normal sur S . Si S est connexe et orientable, il existe exactement deux de ces champs de vecteurs.

Preuve

— Soit U un champ de vecteurs normal unitaire sur S . Si v et w sont des vecteurs tangents à S , on définit :

$$\mu(v, w) = U(p) * (v \times w).$$

Ceci est une 2- forme sur S . Si v et w sont indépendants, tous les trois vecteurs sont indépendants et $\mu(v, w) \neq 0$. Donc μ ne s'annule pas.

- Supposons maintenant que S soit orientable avec une 2- forme μ qui ne s'annule pas. Donc, si v et w sont indépendants à un point p de S , alors $\mu(v, w) \neq 0$. On définit

$$Z(p) = \frac{v \times w}{\mu(v, w)}.$$

Il est facile de voir que la définition de Z est indépendante du choix de v, w (exo). Aussi on voit que $Z(p)$ est non nul et normal à S . Utilisant la formule pour le produit vectoriel on voit que Z est différentiable. On peut donc prendre $U = Z/\|Z\|$. Si U est normal à S , $-U$ l'est également. Soit V un champ de vecteurs normal unitaire. U et V sont colinéaires, donc $V * U = 1$ ou $V * U = -1$. Sur une surface connexe, $V * U$ est donc constant. Soit $U * V = 1$ et donc $V = U$ ou $V * U = -1$ et donc $V = -U$. \square

Exemple 3.6.2 (Exemple d'une surface non orientable) *ruban de Möbius.*

Un chemin α avec $\alpha(a) = \alpha(b) = p$ est appelé un lacet au point p .

Définition 3.6.3 *Un lacet $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ dans une surface S est homotope à une constante s'il existe un 2- segment $x : R \rightarrow S$ (appelé homotopie), $R : a \leq u \leq b, 0 \leq v \leq 1$, tel que α est le chemin de base de x ($v = 0$) et les autres chemins de bord sont constants de constante $p = \alpha(a) = \alpha(b)$.*

Comme les bords β et δ de x sont constants à p , pour tout $0 \leq v \leq 1$ les courbes de paramètre u $\alpha_v(u) = x(u, v)$ sont également des lacets au point p . Quand v varie de 0 à 1, le lacet α_v varie de façon continue de $\alpha_0 = \alpha$ à $\alpha_1 = \gamma$ qui est constant ($= p$).

Exemple 3.6.3 *Dans \mathbb{R}^2 tout lacet est homotope à une constante. Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un lacet au point p . On définit $x(u, v) = (1 - v)(\alpha(u) - p) + p$. Alors*

$$\begin{aligned} x(u, 0) &= \alpha(u), \quad x(u, 1) = p \quad \text{pour tout } a \leq u \leq b, \\ x(a, v) &= x(b, v) = p \quad \text{pour tout } 0 \leq v \leq 1. \end{aligned}$$

Donc x est une homotopie de α à une constante.

Définition 3.6.4 *Une surface est simplement connexe si elle est connexe et tout lacet est homotope à une constante.*

Lemme 3.6.3 *Soit ϕ une 1- forme fermée sur une surface S . Si α est un lacet dans S qui est homotope à une constante, alors $\int_{\alpha} \phi = 0$.*

Preuve Suppose que x est une homotopie entre α et un point p . Comme l'intégrale sur une courbe constante est nulle, on obtient utilisant le théorème de Stokes et $d\phi = 0$:

$$0 = \int \int_x d\phi = \int_\alpha \phi.$$

□

Exercice 3.6.1 Soit $P = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

i) Montrer que la 1- forme

$$\psi = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

est fermée sur P .

ii) On considère la boucle $\alpha : [0, 2\pi] \rightarrow P$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Montrer que $\int_\alpha \psi \neq 0$.

iii) En déduire que P n'est pas simplement connexe.

Lemme 3.6.4 (Poincaré) Sur une surface simplement connexe toute 1- forme différentielle fermée est exacte.

Preuve

On montre d'abord que l'intégrale sur un chemin d'une 1- forme ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée. Soient α et β deux segments de courbe de p à q . Alors $\alpha - \beta$ est un lacet. Donc par le lemme précédent :

$$0 = \int_{\alpha - \beta} \phi = \int_\alpha \phi - \int_\beta \phi.$$

Supposons maintenant que ϕ est une 1- forme différentielle fermée sur une surface simplement connexe S . On choisit un point $p_0 \in S$ et on définit $f(p) = \int_\delta \phi$ pour un chemin qui lie p_0 à p . L'indépendance de l'intégrale du chemin choisi fait que f est bien définie. Afin de montrer $df = \phi$ il faut montrer $df(v) = v[f] = \phi(v)$ pour tout vecteur tangent v au point p . Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow S$ une courbe avec vitesse initiale $\alpha'(a) = v$. Alors $\delta + \alpha|_{[a,t]}$ est un chemin de p_0 jusqu'à $\alpha(t)$. La définition de f donne

$$f(\alpha(t)) = \int_{\delta + \alpha|_{[a,t]}} \phi = f(p_0) + \int_a^t \phi(\alpha'(u)) du.$$

On prend maintenant la dérivée par rapport à t :

$$\alpha'(t)[f] = (f(\alpha))'(t) = \phi(\alpha'(t)).$$

Au point $t = 0$ ceci devient $v[f] = \phi(v)$. □

Théorème 3.6.1 Une surface compacte dans \mathbb{R}^3 est orientable.

Fait non trivial de topologie :

Si S est une surface compacte de \mathbb{R}^3 , alors S sépare \mathbb{R}^3 dans deux ensembles non vides et ouverts : l'extérieur (les points à partir desquels on peut s'échapper vers l'infini) et l'intérieur (les autres).

Admettant ceci il suffit pour démontrer le théorème de prendre à chaque point le vecteur normal qui pointe vers l'extérieur. Un autre théorème qu'on va admettre :

Théorème 3.6.2 Une surface simplement connexe est orientable.

Chapitre 4

Variétés abstraites

4.1 Variétés abstraites

Définition 4.1.1 Soit M un ensemble. Une carte abstraite est une application injective $x : D \rightarrow M$ d'un ensemble ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$ dans M .

Définition 4.1.2 (Variété de dimension n) Une variété de dimension n est un ensemble M muni d'une collection \mathcal{P} de cartes abstraites $x : D \rightarrow M$, où D est un ouvert de \mathbb{R}^n qui vérifient :

- i) Axiome de recouvrement : les images des cartes dans \mathcal{P} recouvrent entièrement M .
- ii) Axiome de l'intersection lisse : Pour toute paire (x, y) de cartes abstraites dans \mathcal{P} ; les composées $y^{-1} \circ x$ et $x^{-1} \circ y$ sont définies sur des ensembles ouverts de \mathbb{R}^n et différentiables.
- iii) Axiome de séparabilité : Pour toute paire (p, q) de points de M avec $p \neq q$ dans M , il existe des cartes abstraites disjointes (c.à.d. sans intersection d'images) $x : D \rightarrow M$, $y : E \rightarrow M$ avec $p \in x(D)$ et $q \in y(E)$.

On appelle \mathcal{P} un atlas.

Remarque 4.1.1 (Topologie de M) Soit $x : D \rightarrow M$ une carte abstraite. On dit que $x(\mathcal{U})$ est ouvert si $\mathcal{U} \subset D$ est ouvert. Les ensembles ouverts de M sont définis comme les réunions de tels ensembles (note que c'est cohérent avec le cas $M \subset \mathbb{R}^3$ puisque x et x^{-1} sont continues).

Remarque 4.1.2 — On va toujours considérer que \mathcal{P} contient toutes les cartes abstraites qui intersectent de façon lisses avec les cartes initialement dans \mathcal{P} . Note néanmoins que deux variétés abstraites M_1 et M_2 qui sont identiques en tant qu'ensembles sont différentes en tant que variétés si les collections de cartes \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont différentes.
— Pour le calcul différentiel sur les variétés abstraites, la chose qu'on doit réexaminer et la notion de vitesse d'une courbe. A partir de là on construit le calcul différentiel de la même façon que sur une surface de \mathbb{R}^3 et les principales définitions et théorèmes sont les mêmes.

Définition 4.1.3 Soit $\alpha : I \rightarrow M$ une courbe dans une variété abstraite M . Pour tout $t \in I$

on définit le vecteur de vitesse par

$$\alpha'(t)[f] = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t)$$

pour toute fonction différentiable f sur M .

$\alpha'(t)$ est une fonction à valeurs réelles dont le domaine est l'ensemble \mathcal{F} de toutes les fonctions différentiables sur M .

Exemple 4.1.1 (Plan projectif) Sur S^2 on définit la relation d'équivalence $x \sim y$ si $x = y$ ou $x = -y$. Soit $P^2\mathbb{R} = S^2 / \sim$. On définit l'application $\sigma : S^2 \rightarrow S^2$ par $\sigma(p) = -p$. Maintenant on couvre S^2 avec des cartes $(x_i)_{i \in I}$, $x_i : D_i \rightarrow S^2$ telles que $x(D_i) \cap (\sigma \circ x)(D_i) = \emptyset$. Soit $\pi : S^2 \rightarrow P^2\mathbb{R}$ la projection naturelle. Alors $(\pi \circ x_i, D_i)_{i \in I}$ est un atlas pour $P^2\mathbb{R}$ (exo).

Lemme 4.1.1 $P^2\mathbb{R}$ n'est pas orientable.

Preuve

Si α est une 2- forme sur $P^2\mathbb{R}$, alors $\omega = \pi^*\alpha$ est une 2- forme sur S^2 . Alors

$$\omega = f\omega_0,$$

où ω_0 est la forme de volume de l'exemple 3.6.1. Si α ne s'annule pas, alors f ne s'annule pas. Puisque $\pi \circ \sigma = \pi$, on a $\sigma^*\omega = \omega$. D'autre part, $\sigma^*\omega_0 = -\omega_0$. Mais on a aussi

$$\sigma^*\omega = \sigma^*(f\omega_0) = -(f \circ \sigma)\omega_0.$$

Par conséquent, f prend les deux signes $+$ et $-$ sur S^2 , et doit donc s'annuler quelque part. D'où la non orientabilité de $P^2\mathbb{R}$. \square

Corollaire 4.1.1 $P^2\mathbb{R}$ n'est pas difféomorphe à une surface dans \mathbb{R}^3 .

Preuve

$P^2\mathbb{R}$ est compacte, mais non orientable d'après le Lemme 4.1.1. Ceci est impossible pour une surface de \mathbb{R}^3 d'après le Théorème 3.6.1. \square

Théorème 4.1.1 (Le fibré tangent) Soit M une variété de dimension n de classe C^p . Alors

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_p M$$

peut être muni canoniquement d'une structure de variété de classe C^{p-1} de dimension $2n$. Cette variété est appelée le fibré tangent de M .

Preuve On démontre le théorème dans le cas d'une surface de \mathbb{R}^3 . Soit $x : D \rightarrow M$ une carte. Pour un ouvert \mathcal{U} de \mathbb{R}^2 on définit \tilde{D} par $\tilde{D}_{\mathcal{U}} = D \times \mathcal{U}$ et \tilde{x} par

$$\tilde{x}(u, v, w_1, w_2) = w_1 x_u(u, v) + w_2 x_v(u, v).$$

L'ensemble de ces cartes \tilde{x} qu'on x parcourt toutes les cartes de M couvre TM . Soit $(p, w) = w_1 x_u(u, v) + w_2 x_v(u, v) \in x(D) \cap y(E)$. On calcule (exo) :

$$(\tilde{y}^{-1} \circ \tilde{x})(u, v, w_1, w_2) = ((y^{-1} \circ x)(u, v), d(y^{-1} \circ x)(w_1, w_2)).$$

Comme $y^{-1} \circ x$ est de classe C^p , $d(y^{-1} \circ x)$ est de classe C^{p-1} . Il reste à vérifier la séparabilité. Soient $(p, w), (q, v) \in TM$ avec $(p, w) \neq (q, v)$.

1^{er} cas : $p \neq q$. Comme M est séparé il existe deux cartes $x : D \rightarrow M$ et $y : E \rightarrow M$ avec $p \in x(D)$ et $q \in y(E)$ et $x(D) \cap y(E) = \emptyset$. Donc $(p, w) \in x(\tilde{D})$, $(q, v) \in y(\tilde{E})$ et $x(\tilde{D}) \cap y(\tilde{E}) = \emptyset$.

2^{ème} cas : $p = q$. Soit $p = q = x(u, v)$ et

$$\begin{aligned} w &= w_1 x_u(u, v) + w_2 x_v(u, v), \\ v &= v_1 x_u(u, v) + v_2 x_v(u, v). \end{aligned}$$

\mathbb{R}^2 étant séparé il existent des voisinages ouverts \mathcal{U}_w de w et \mathcal{U}_v de v avec $\mathcal{U}_w \cap \mathcal{U}_v = \emptyset$. Les cartes

$$\begin{aligned} \tilde{x} &: D \times \mathcal{U}_w \rightarrow M, \\ \tilde{x} &: D \times \mathcal{U}_v \rightarrow M \end{aligned}$$

ont alors les propriétés requises. □

4.2 Dénombrabilité à l'infini

Définition 4.2.1 Soit M une variété. Une partie $E \subset M$ est négligeable si pour tout $p \in M$ il existe une carte (D, x) , $x(D)$ contenant p , telle que $x^{-1}(x(D) \cap E)$ soit de mesure nulle dans D .

Définition 4.2.2 Une variété M est dénombrable à l'infini si elle est réunion dénombrable de compacts.

Définition 4.2.3 Soient M et N deux variétés et $f : M \rightarrow N$ une application lisse. Un point $p \in M$ est dit point critique si $\text{rg}(df_p) < \dim N$. L'image d'un point critique est une valeur critique.

Théorème 4.2.1 (Théorème de Sard) Soient M et N deux variétés, et $f : M \rightarrow N$ une application de classe C^k avec $k > \max\{0, \dim M - \dim N\}$. Si M est dénombrable à l'infini, l'ensemble des valeurs critiques de f est une partie négligeable de N .

preuve exo dans le cas $\dim M \leq \dim N$ (seul cas dont on aura besoin).

4.3 Le théorème de Whitney

Définition 4.3.1 (Immersion, submersion, plongement) Soient M et N deux variétés et $F : M \rightarrow N$ une application de classe C^1 . On dit que

- i) F est une immersion si dF est injectif à tout point de M .
- ii) F est une submersion si dF est surjectif à tout point de M .
- iii) F est un plongement si F est une immersion et un homéomorphisme de M sur $F(M)$.

Lemme 4.3.1 Soient M et N deux variétés compactes et $f : M \rightarrow N$ une immersion injective. Alors f est un plongement de M dans N .

preuve : exo

On va admettre les deux résultats suivants :

Proposition 4.3.1 Soient U et V deux ouverts d'une variété M , tels que $M = U \cup V$ et soient $f : U \rightarrow N$ et $g : V \rightarrow N$ deux applications lisses dans une variété N , dont les restrictions à $U \cap V$ sont égales. Il existe alors une fonction lisse $h : M \rightarrow N$ telle que

$$h|_U = f \quad \text{et} \quad h|_V = g.$$

En particulier si U un ouvert d'une variété M et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ à support dans U , alors f se prolonge en une fonction lisse nulle en dehors de U .

Corollaire 4.3.1 i) Soit U un ouvert d'une variété M . Alors pour tout $a \in U$, il existe un ouvert relativement compact V contenant a tel que $\bar{V} \subset U$, et une fonction lisse égale à 1 sur V et à support dans U .

ii) Si K est un compact de M , et $K \subset U$ avec U un ouvert, il existe une fonction lisse à support dans U et égale à 1 sur K .

Lemme 4.3.2 Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement fini d'une variété compacte M . Il existe alors un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ tel que $\bar{V}_i \subset U_i$ pour tout i .

Preuve

Tout $x \in M$ est contenu dans un ouvert $U_{i(x)}$ du recouvrement. Il existe aussi un ouvert W_x contenant x tel que

$$\bar{W}_x \subset U_{i(x)}.$$

Alors les $(W_x)_{x \in M}$ forment un recouvrement ouvert de M , dont on peut extraire un recouvrement fini $(W_{x_k})_{1 \leq k \leq p}$. Le résultat s'ensuit en prenant

$$V_i = (\cup W_{x_k})_{i(x_k)=i}.$$

□

Théorème 4.3.1 Toute variété compacte admet un plongement dans un espace \mathbb{R}^n .

Preuve

Soit $(U_i, \varphi_i)_{1 \leq i \leq N}$ un atlas fini de M . D'après le Corollaire 4.3.1 il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{1 \leq i \leq N}$ tel que $\overline{V_i} \subset \varphi(U_i)$ pour tout i , et pour chaque i une fonction lisse à support dans $\varphi(U_i)$ valant 1 sur V_i . D'après la proposition 4.3.1, la fonction $f_i \varphi_i^{-1}$, prolongée par 0 hors de $\varphi(U_i)$, donne une application lisse de M dans \mathbb{R}^n , où $n = \dim M$. En posant

$$F = (f_1 \phi_1^{-1}, \dots, f_N \phi_N^{-1}, f_1, \dots, f_N),$$

on obtient une application lisse de M dans $\mathbb{R}^{N(n+1)}$. C'est une immersion. En effet, chaque x appartient à un ouvert V_i et le i -ème bloc de dF_p est alors égal à $d\phi_p^{-1}$ qui est bijective, ce qui montre que dF est injective.

Montrons maintenant que F est injective. Soient x et y deux points de M tels que $F(x) = F(y)$. En particulier,

$$\forall i, \quad f_i(x) = f_i(y).$$

Les V_i recouvrant M , il existe un i tel que $f_i(x) \neq 0$. Alors x et y sont dans U_i , et pour cet i , l'égalité

$$f_i(x) \phi_i^{-1}(x) = f_i(y) \phi_i^{-1}(y)$$

donne $\phi_i^{-1}(x) = \phi_i^{-1}(y)$, puis $x = y$ puisque ϕ_i^{-1} est bijective. On conclut en appliquant le Lemme 4.3.1 : une immersion injective d'une variété compacte est un plongement. \square

Corollaire 4.3.2 (Théorème de Whitney facile) *Toute variété compacte lisse de dimension n se plonge dans \mathbb{R}^{2n+1} .*

Preuve

On part du plongement f de X dans \mathbb{R}^m . On va voir qu'en composant f avec une projection bien choisie, on obtient un plongement dans \mathbb{R}^{m-1} . Pour ce faire, on munit \mathbb{R}^m d'un produit scalaire euclidien, et on introduit, pour tout vecteur unitaire $v \in S^{m-1}$, la projection p_v sur l'orthogonal de v dans \mathbb{R}^m . Posons $Y = f(X)$. Pour que la restriction de p_v à Y soit injective, il faut et il suffit que, quels que soient x et y distincts dans Y , le vecteur

$$\frac{x\vec{y}}{\|x\vec{y}\|}$$

soit différent de v , ou encore que v n'appartient pas à l'image de l'application

$$(x, y) \mapsto \frac{x\vec{y}}{\|x\vec{y}\|} \quad \text{de } Y \times Y \setminus \Delta \text{ dans } S^{m-1},$$

où l'on désigne par Δ la diagonale de Y . Il existe de tels v dès que $2n < m - 1$ (Théorème de Sard).

Pour que $p_v|_Y$ soit une immersion il faut et il suffit que v n'appartienne à aucun sous-espace tangent à Y . Introduisons

$$Z = \{(x, v) \in X \times S^{m-1}, v \in T_{f(x)}Y\}.$$

On vérifie que Z est une sous-variété de dimension $2n - 1$ de $X \times S^{m-1}$ (exo). En particulier $pr_2(Z)$ est de mesure nulle dès que $2n < m$. En itérant ce procédé, on voit que X admet une immersion dans \mathbb{R}^{2n} et un plongement dans \mathbb{R}^{2n+1} . \square

- Remarque 4.3.1** i) *La même propriété reste vraie pour les variétés dénombrables à l'infini.*
- ii) *Avec beaucoup plus de travail et des techniques complètement différentes, H. Whitney a démontré que toute variété compacte lisse de dimension n se plonge dans \mathbb{R}^{2n} . Ce résultat est optimal.*

Chapitre 5

Courbure

5.1 Application de Weingarten

Dans ce chapitre M va toujours être une surface de \mathbb{R}^3 . Soit Z un champ de vecteurs sur M . Alors que Z n'est défini que sur la surface, la dérivée covariante de Z le long de v a toujours un sens si v est tangent à la surface. Méthodes de calcul :

i) Soit α une courbe dans M avec vitesse initiale v . Alors

$$\nabla_v Z = (Z\alpha)'(0).$$

ii) Si

$$Z = \sum z_i U_i,$$

alors

$$\nabla_v Z = \sum v[z_i] U_i$$

Exo : montrer que ces deux définitions coïncident. Dans ce qui suit U va être la normale à la surface M . Notez que U existe comme champ de vecteurs si M est orientable. Mais même si M n'est pas orientable, U existe toujours localement.

Définition 5.1.1 Soit p un point de M et v un vecteur tangent au point p . Alors on définit

$$S_p(v) = -\nabla_v U,$$

où U est un champ de vecteurs normal unitaire dans un voisinage de p dans S . On appelle S_p l'application de Weingarten de S au point p associé un champ normal U .

Lemme 5.1.1 Pour tout point p de $S \subset \mathbb{R}^3$, l'application de Weingarten est un opérateur linéaire

$$S_p : T_p S \rightarrow T_p S$$

sur l'espace tangent au point p .

Preuve

$U * U = 1$ entraîne

$$0 = v[U * U] = 2\nabla_v U * U = -2S_p(v) * U.$$

Donc $S_p(v)$ est tangent à M . On calcule

$$\begin{aligned} S_p(av + bw) &= -\nabla_{av+bw} U = -(a\nabla_v U + b\nabla_w U) \\ &= aS_p(v) + bS_p(w). \end{aligned}$$

□

Lemme 5.1.2 Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ une surface de classe C^2 . Pour tout p de M l'application de Weingarten

$$S : T_p M \rightarrow T_p M$$

est un opérateur symétrique linéaire, c.à.d.

$$S(v) * w = S(w) * v$$

pour toute paire (v, w) de vecteurs tangents à M au point p .

Preuve

On a $U * x_u = 0$. Donc

$$0 = \frac{\partial}{\partial v}(U * x_u) = U_v * x_u + U * x_{uv}.$$

Clairement $U_v = -S(x_v)$. Il s'ensuit :

$$S(x_v) * x_u = U * x_{uv}.$$

Echange de u et v donne trois autres équations similaires. En particulier :

$$S(x_u) * x_v = U * x_{vu} = U * x_{uv} = S(x_v) * x_u.$$

Comme x_u et x_v forment une base de l'espace tangent à tout point, ceci montre que S est symétrique. □

5.2 Courbure normale

Lemme 5.2.1 Si α est une courbe dans $M \subset \mathbb{R}^3$, alors

$$\alpha'' * U = S(\alpha') * \alpha'.$$

Preuve α' est tangent à M . Donc $\alpha' * U = 0$. Différentiation donne

$$\alpha'' * U + \alpha' * U' = 0.$$

Mais $S(\alpha') = -U'$. Donc

$$\alpha'' * U = -U' * \alpha' = S(\alpha') * \alpha'.$$

□

Discussion

$\alpha'' * U$ est la composante de l'accélération α'' orthogonale à la surface. Le lemme montre que cette composante ne dépend que de la vitesse de α et de l'application de Weingarten. Toutes les courbes dans M avec vitesse donnée v au point p ont la même composante normale de l'accélération au point p qui est donnée par $S(v) * v$.

Définition 5.2.1 Soit u un vecteur unitaire tangent à $M \subset \mathbb{R}^3$ au point p . Alors le nombre $k(u) = S(u) * u$ est appelé la courbure normale de S dans la direction u .

Discussion

Soit α une courbe paramétrée en longueur d'arc avec $\alpha'(0) = u$. On utilise le repère de Frénet de la courbe α . On a

$$k(u) = S(u) * u = \alpha''(0) * U(p) = \kappa(0)N(0) * U(p) = \kappa(0) \cos \theta.$$

Etant donné u , il existe un moyen de choisir la courbe telle que l'angle est 0 ou π . En effet soit P le plan déterminé par U et u , alors P coupe une courbe σ dans M , qu'on appelle la section normale de M dans la direction u . Si l'on paramétrise σ par longueur d'arc avec $\sigma'(0) = u$, alors $N(0) = \pm U(p)$, puisque $\sigma''(0) = \kappa(0)N(0)$ est orthogonal à u et tangent à P . Donc pour une section normale dans la direction u

$$k(u) = k_\sigma(0)N(0) * U(p) = \pm k_\sigma(0).$$

Signe de la courbure normale :

- Si $k(u) > 0$, alors $N(0) = U(p)$, donc la section normale fléchit vers $U(p)$ au point p .
Donc dans la direction u la surface fléchit vers la normale U .
- Si $k(u) < 0$, alors $N(0) = -U(p)$. Donc dans la direction u la surface s'éloigne de $U(p)$.
- Si $k(u) = 0$, alors $\kappa_\sigma(0) = 0$ et $N(0)$ n'est pas défini. Pas d'interprétation simple.

Définition 5.2.2 Soit p un point de $M \subset \mathbb{R}^3$. Les valeurs maximales et minimales de la courbure normale $k(u)$ de M au point p sont appelées les courbures principales de M au point p et notées k_1 et k_2 . Les directions dans lesquelles ces valeurs maximales apparaissent sont appelées directions principales de M au point p . Des vecteurs unitaires dans ces directions sont appelés vecteurs principaux de M au point p .

Définition 5.2.3 Un point p d'une surface est ombilic pourvu que la courbure normale $k(u)$ est constante sur tous les vecteurs tangents unitaires u au point p .

Théorème 5.2.1 i) Si p est un point ombilic de $M \subset \mathbb{R}^3$, alors l'application de Weingarten S au point p est juste la multiplication scalaire par $k = k_1 = k_2$.

ii) Si p est un point non ombilic, $k_1 \neq k_2$, alors il existe exactement deux directions principales qui sont orthogonales. En plus, si e_1 et e_2 sont des vecteurs principaux dans ces directions, alors

$$S(e_1) = k_1 e_1, \quad S(e_2) = k_2 e_2.$$

Les courbures principales de M sont alors les valeurs propres de S , et les vecteurs principaux de M au point p sont les vecteurs propres de S .

Preuve

Supposons que k admet son maximum k_1 à e_1 , donc

$$k_1 = k(e_1) = S(e_1) * e_1.$$

Soit e_2 un vecteur tangent unitaire orthogonal à e_1 . Un vecteur unitaire tangent quelconque peut alors être écrit comme

$$u = u(\theta) = c e_1 + s e_2,$$

où $c = \cos \theta$, $s = \sin \theta$. Ainsi la courbure normale k au point p devient une fonction sur la droite réelle $k(\theta) = k(u(\theta))$. Soit $S_{ij} = S(e_i) * e_j$ $1 \leq i, j \leq 2$. On a $S_{11} = k_1$ et $S_{12} = S_{21}$. On calcule :

$$(5.2.1) \quad k(\theta) = S(c e_1 + s e_2) * (c e_1 + s e_2) = c^2 S_{11} + 2sc S_{21} + s^2 S_{22}.$$

Donc :

$$(5.2.2) \quad \frac{dk}{d\theta}(\theta) = 2sc(S_{22} - S_{11}) + 2(c^2 - s^2)S_{12}.$$

Par hypothèse $k(\theta)$ a un maximum à $\theta = 0$, donc $\frac{dk}{d\theta}(0) = 0$. Il suit de (5.2.2) que $S_{12} = 0$. Comme e_1, e_2 est une base orthonormale de $T_p M$ il suit par expansion orthonormale que

$$(5.2.3) \quad S(e_1) = S_{11} e_1, \quad S(e_2) = S_{22} e_2.$$

Si p est ombilic, alors $S_{22} = k(e_2) = S_{11} = k(e_1) = k_1$, et (5.2.3) montre que S est la multiplication scalaire par $k_1 = k_2$. Si p est non ombilique, on revient à (5.2.1), qui devient

$$(5.2.4) \quad k(\theta) = c^2 k_1 + s^2 S_{22}.$$

Comme k_1 est la valeur maximale de $k(\theta)$, et $k(\theta)$ est maintenant non constante, il suit que $k_1 > S_{22}$. Mais (5.2.4) montre alors

- i) la valeur maximale k_1 est atteinte seulement si $c = \pm 1$, $s = 0$, c.à.d. dans la directions e_1 .
- ii) la valeur minimale k_2 est S_{22} et elle est atteinte uniquement si $c = 0$, $s = \pm 1$, c.à .d. dans la directions e_2 . Ceci montre la deuxième assertion du théorème puisque (5.2.3) devient maintenant :

$$S(e_1) = k_1 e_1, \quad S(e_2) = k_2 e_2.$$

□

Corollaire 5.2.1 Soient k_1, k_2 et e_1, e_2 les courbures principales et vecteurs principaux de $M \subset \mathbb{R}^3$ au point p . Alors si $u = \cos \theta e_1 + \sin \theta e_2$, la courbure normale de M dans la direction u est

$$k(u) = k_1 \cos^2 \theta + k_2 \sin^2 \theta.$$

Lemme 5.2.2 Soit M une surface de \mathbb{R}^3 de classe C^1 . Alors M est localement le graphe d'une fonction C^1 . Plus précisément pour tout $p \in M$ il existe un voisinage ouvert U contenant p et une fonction C^1 $f : p_{12}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que quitte à éventuellement renommer les axes $M \cap U = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in p_{12}(U)\}$, où p_{12} est la projection sur les deux premières composantes.

Preuve

Soit $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) : D \rightarrow M$ une carte avec $p = \phi(q)$, $q \in D$. Soit $\phi_{12} = (\phi_1, \phi_2)$. On peut supposer $d\phi_{12}(q) \neq 0$. Par le théorème d'inversion locale, il existe alors un voisinage V de $(\phi_1(q), \phi_2(q))$ et un voisinage de W de q ainsi qu'une application $\phi_{12}^{-1} : V \rightarrow W$ tels que $\phi_{12} \circ \phi_{12}^{-1} = id_V$, $\phi_{12}^{-1} \circ \phi_{12} = id_W$. $f = \phi_3 \circ \phi_{12}^{-1}$ possède alors les propriétés requises. □

Discussion

Comme la position de M dans \mathbb{R}^3 n'a pas d'importance, on peut supposer

- i) $p = 0$.
- ii) L'espace tangent $T_p M$ est le plan xy .
- iii) Les axes x, y sont les directions principales.

Par le lemme 5.2.2 on peut supposer que M est le graphe d'une fonction $M : z = f(x, y)$. On va construire une approximation de M en utilisant l'expansion de Taylor de f jusqu'à l'ordre 2. Les hypothèses i) et ii) impliquent $f^0 = f_y^0 = f_x^0 = 0$, où l'indice en haut indique évaluation au point 0. L'approximation quadratique de f se réduit alors à

$$f \sim \frac{1}{2}(f_{xx}^0 x^2 + 2f_{xy}^0 xy + f_{yy}^0 y^2).$$

Exercice 5.2.1 Pour les vecteurs tangents $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, 1, 0)$ au point $p = 0$, on a

$$\begin{aligned} S(u_1) &= -\nabla_{u_1} U = f_{xx}^0 u_1 + f_{xy}^0 u_2, \\ S(u_2) &= -\nabla_{u_2} U = f_{xy}^0 u_1 + f_{yy}^0 u_2. \end{aligned}$$

Par la condition *iii*) des hypothèses, u_1 et u_2 sont des vecteurs principaux. Il suit du Théorème 5.2.1 que $k_1 = f_{xx}^0$, $k_2 = f_{yy}^0$ et $f_{xy}^0 = 0$. En substituant cette expression dans l'approximation quadratique, on conclut que la forme de la surface proche de p est approximativement la même que la forme de la surface

$$M' : z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2)$$

proche de zéro. M' est appelée une approximation quadratique de M proche de p .

5.3 Courbure de Gauss

Définition 5.3.1 La courbure de Gauss de $M \subset \mathbb{R}^3$ est la fonction à valeurs réelles $K = \det S$ sur M . Explicitement pour tout point p de M , la courbure de Gauss $K(p)$ au point p est le déterminant de l'opérateur de Gauss S au point p .

La courbure moyenne est la fonction $H = 1/2 \text{trace} S$.

Lemme 5.3.1

$$K = k_1 k_2, \quad H = (k_1 + k_2)/2.$$

Preuve : exo.

Remarque 5.3.1 (Signe de la courbure de Gauss au point p) i) *Positif.* Si $K(p) > 0$, alors par le Lemme 5.3.1 les courbures principales $k_1(p)$ et $k_2(p)$ ont le même signe. Par le corollaire 5.2.1 soit $k(u) > 0$ pour tout u , soit $k(u) < 0$ pour tout u . Donc M fléchit en s'éloignant de son plan tangent $T_p M$ dans toutes les directions au point p . L'approximation quadratique est un paraboloïde :

$$2z = k_1 x^2 + k_2 y^2.$$

ii) *Négatif.* Si $K(p) < 0$, alors par le lemme 5.3.1 les courbures principales ont un signe opposé. Alors l'approximation quadratique de M près de p est un hyperboloïde, alors M a une forme de selle près de p .

iii) Si $K(p) = 0$, alors par le Lemme 5.3.1 il y a deux possibilités.

(a) Seulement une courbure principale est nulle, disons

$$k_1(p) \neq 0, \quad k_2(p) = 0.$$

Dans ce cas l'approximation quadratique est un cylindre $2z = k_1(p)x^2$, donc M a une forme d'un abreuvoir proche de p .

(b) Toutes les deux courbures principales sont nulles. L'approximation quadratique se réduit à $z = 0$, et on n'obtient pas d'information de la forme de M près de p .

Exemple 5.3.1 (Tore de révolution) Sur \mathcal{O} le tore T s'éloigne de son espace tangent, donc $K > 0$ sur \mathcal{O} . Sur \mathcal{F} T a la forme d'une selle, donc $K < 0$ sur \mathcal{F} . Proche de chaque point sur les cercles qui séparent \mathcal{O} et \mathcal{F} , le tore a la forme d'un abreuvoir, donc $K = 0$ sur ces cercles.

Définition 5.3.2 Les fonctions réelles

$$I(v, w) = v * w, \quad II(v, w) = Sv * w$$

définies pour toute paire de vecteurs tangents sur une surface orientable sont appelées les première et deuxième formes fondamentales.

Définition 5.3.3 Une surface M de \mathbb{R}^3 est plate si sa courbure de Gauss est nulle et minimale si sa courbure moyenne est nulle.

5.4 Techniques de calcul

Lemme 5.4.1 Si v et w sont des vecteurs tangents linéairement indépendants à un point p de $M \subset \mathbb{R}^3$, alors

$$\begin{aligned} S(v) \times S(w) &= K(p)v \times w, \\ S(v) \times w + v \times S(w) &= 2H(p)v \times w. \end{aligned}$$

Preuve

Comme v, w est une base de l'espace tangent, on peut écrire

$$\begin{aligned} S(v) &= av + bw, \\ S(w) &= cv + dw. \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est la matrice de S par rapport à la base v, w . Il s'ensuit :

$$K(p) = \det S = ad - bc, \quad H(p) = \frac{1}{2} \text{trace} S = \frac{1}{2}(a + d).$$

On calcule

$$\begin{aligned} S(v) \times S(w) &= (av + bw) \times (cv + dw) \\ &= (ad - bc)v \times w = K(p)v \times w. \end{aligned}$$

Un calcul similaire donne la formule pour $H(p)$. □

Si V et W sont des champs de vecteurs tangents qui sont linéairement indépendants à chaque point d'une région orientée, on a les équations suivantes entre champs de vecteurs :

$$\begin{aligned} S(V) \times S(W) &= KV \times W, \\ S(V) \times W + V \times S(W) &= 2HV \times W. \end{aligned}$$

On prend le produit scalaire de chaque côté avec $V \times W$ et on utilise l'identité de Lagrange

$$(x \times y) * (v \times w) = \begin{vmatrix} x * v & x * w \\ y * v & y * w \end{vmatrix}$$

pour obtenir

$$(5.4.1) \quad K = \frac{\begin{vmatrix} SV * V & SV * W \\ SW * V & SW * W \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} V * V & V * W \\ W * V & W * W \end{vmatrix}},$$

$$(5.4.2) \quad H = \frac{\begin{vmatrix} SV * V & SV * W \\ W * V & W * W \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} V * V & V * W \\ SW * V & SW * W \end{vmatrix}}{2 \begin{vmatrix} V * V & V * W \\ W * V & W * W \end{vmatrix}}.$$

Les dénominateurs sont non nuls puisque l'indépendance de V, W est équivalente à $(V \times W) * (V \times W) > 0$. En particulier les fonctions H et K sont différentiables.

Corollaire 5.4.1 *Dans une région orientée \mathcal{O} de M , on a*

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Preuve

Afin de vérifier les formules il suffit de substituer $K = k_1k_2$ et $H = (k_1 + k_2)/2$ et de noter que

$$H^2 - K = \frac{(k_1 + k_2)^2}{4} - k_1k_2 = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4}.$$

□

Soit $x : D \rightarrow M$ une carte d'une surface M dans \mathbb{R}^3 . On pose :

$$\begin{aligned} E &= x_u * x_u, F = x_u * x_v = x_v * x_u, G = x_v * x_v, \\ L &= S(x_u) * x_u, M = S(x_u) * x_v = S(x_v) * x_u, N = S(x_v) * x_v. \end{aligned}$$

Corollaire 5.4.2 *Si x est une carte dans $M \subset \mathbb{R}^3$, alors*

$$K(x) = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, H(x) = \frac{GL + EN - 2FM}{2(EG - F^2)}$$

Preuve

Remplacer dans les formules (5.4.1), (5.4.2) V par x_u et W par x_v .

□

Lemme 5.4.2 *Si x est une carte dans $M \subset \mathbb{R}^3$, alors*

$$\begin{aligned} L &= S(x_u) * x_u = U * x_{uu}, \\ M &= S(x_u) * x_v = U * x_{uv}, \\ N &= S(x_v) * x_v = U * x_{vv}. \end{aligned}$$

Ces formules interviennent déjà dans la preuve du lemme 5.1.2.

5.5 Surfaces de révolution

On obtient une surface de révolution en tournant une courbe dans le plan xy autour de l'axe des x . Soit

$$\alpha(u) = (g(u), h(u), 0)$$

une paramétrisation de la courbe. Ceci donne une paramétrisation de la surface

$$x(u, v) = (g(u), h(u) \cos v, h(u) \sin v).$$

On calcule

$$x_u = (g', h' \cos v, h' \sin v), x_v = (0, -h \sin v, h \cos v).$$

Il s'ensuit

$$E = g'^2 + h'^2, \quad F = 0, \quad G = h^2.$$

Ici E est le carré de la vitesse de la courbe de profil et donc pour toutes les méridiennes (courbes de paramètre u), tandis que G est le carré de la vitesse de toutes les parallèles (courbes de paramètre v). En suite on calcule

$$\begin{aligned} x_u \times x_v &= (hh', -hg' \cos v, -hg' \sin v), \\ \|x_u \times x_v\| &= \sqrt{EG - F^2} = h\sqrt{g'^2 + h'^2}, \\ U &= (h', -g' \cos v, -g' \sin v) / \sqrt{g'^2 + h'^2}, \\ x_{uu} &= (g'', h'' \cos v, h'' \sin v), \\ x_{uv} &= (0, -h' \sin v, h' \cos v), \\ x_{vv} &= (0, -h \cos v, -h \sin v). \end{aligned}$$

Il s'ensuit

$$L = \frac{-g'h'' + g''h'}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{g'h}{\sqrt{g'^2 + h'^2}}.$$

On trouve pour l'opérateur de Weingarten

$$S(x_u) = \frac{L}{E}x_u, \quad S(x_v) = \frac{N}{G}x_v.$$

Il s'ensuit que les méridiennes et les parallèles d'une surface de révolution sont ses courbes principales. On note les fonction de courbure principale k_μ et k_π et on obtient :

$$k_\mu = \frac{L}{E} = \frac{-\begin{vmatrix} g' & h' \\ g'' & h'' \end{vmatrix}}{(g'^2 + h'^2)^{3/2}}, \quad k_\pi = \frac{N}{G} = \frac{g'}{h(g'^2 + h'^2)^{1/2}}.$$

La courbure de Gauss est alors

$$K = k_\mu k_\pi = \frac{-g' \begin{vmatrix} g' & h' \\ g'' & h'' \end{vmatrix}}{h(g'^2 + h'^2)^2}.$$

5.6 Géodésiques

Définition 5.6.1 Soit α une courbe C^2 dans une surface M . α est une géodésique si son accélération α'' est toujours orthogonale à M .

Remarque 5.6.1 Des géodésiques ont une vitesse constante. En effet $(\alpha' * \alpha')'' = 2\alpha'' * \alpha' = 0$.

Exemple 5.6.1 i) Le plan. Si α est une géodésique dans le plan orthogonal à u , alors $\alpha' * u = 0$, donc $\alpha'' * u = 0$. Mais α'' est par définition normale à P , donc colinéaire à u , donc $\alpha'' = 0$. Donc α est une ligne droite. Inversement toute ligne droite $\alpha(t) = v + tw$ est une géodésiques. Donc les géodésiques de P sont exactement les lignes droites.

ii) *La sphère. Un grand cercle dans la sphère S^2 est un cercle qu'on obtient comme intersection de la sphère avec un plan qui passe par 0. Si α est une paramétrisation à vitesse constante d'un cercle, l'accélération est dirigée vers le centre du cercle. Dans le cas d'un grand cercle, ce centre est le centre de la sphère. Dans ce cas α'' est alors normale à la sphère et α est une géodésique.*

Théorème 5.6.1 *Parmi toutes les courbes C^2 tracées sur une surface joignant deux points donnés la courbe de longueur minimale est (si elle existe) une géodésique.*

Preuve

On peut supposer que les deux points sont dans l'image de la même carte $x : D \rightarrow M$. Soit $x(\gamma(s))$ la courbe qui minimise la distance avec $\gamma : [s_0, s_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe dans \mathbb{R}^2 . On peut supposer que $x(\gamma(s))$ est paramétrée en longueur d'arc et que $0 \in D$. Soit F l'ensemble des courbes C^2 fermées dans D allant de 0 à 0. Soit $x(\gamma(s_0)) = A$, $x(\gamma(s_1)) = B$. Pour tout $\delta \in F$ on a

$$\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \int_{s_0}^{s_1} \left\| \frac{d}{ds} x(\gamma(s) + \tau\delta(s)) \right\| ds = 0.$$

On a

$$x(\gamma(s) + \tau\delta(s)) = x(\gamma(s)) + \tau dx(\gamma(s))(\delta(s)) + o(\tau).$$

Donc

$$\frac{d}{ds} x(\gamma(s) + \tau\delta(s)) = \frac{dx(\gamma(s))}{ds} + \tau \frac{d}{ds} dx(\gamma(s))(\delta(s)) + o(\tau).$$

Il s'ensuit

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{ds} x(\gamma(s) + \tau\delta(s)) \right\|^2 &= 1 + 2\tau \frac{dx(\gamma(s))}{ds} * \frac{d}{ds} dx(\gamma(s))(\delta(s)) + o(\tau), \\ \left\| \frac{d}{ds} x(\gamma(s) + \tau\delta(s)) \right\| &= 1 + \tau \frac{dx(\gamma(s))}{ds} * \frac{d}{ds} dx(\gamma(s))(\delta(s)) + o(\tau). \end{aligned}$$

Ceci donne

$$\int_{s_0}^{s_1} \left\| \frac{d}{ds} x(\gamma(s) + \tau\delta(s)) \right\| ds = \int_{s_0}^{s_1} ds + \int_{s_0}^{s_1} \tau \frac{dx(\gamma(s))}{ds} * \frac{d}{ds} dx(\gamma(s))(\delta(s)) + o(\tau) ds.$$

Donc

$$\frac{d}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \int_{s_0}^{s_1} \left\| \frac{d}{ds} x(\gamma(s) + \tau\delta(s)) \right\| ds = \int_{s_0}^{s_1} \frac{dx(\gamma(s))}{ds} * \frac{d}{ds} dx(\gamma(s))(\delta(s)) = 0.$$

Tenons compte du fait que $\delta(s_0) = \delta(s_1) = 0$, on peut effectuer une intégration par parties :

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{d^2 x(\gamma(s))}{ds^2} * dx(\gamma(s))(\delta(s)) ds = 0.$$

Soit maintenant $t : [s_0, s_1] \rightarrow TM$ un champ de vecteurs avec $t(s) \in T_{x(\gamma(s))}M$ pour tout s et $t(s_0) = t(s_1) = 0$. Alors il existe une courbe fermée dans F avec

$$t(s) = dx(\gamma(s))(\delta(s)).$$

Il s'ensuit que pour tout champ t comme ci-dessus on ait :

$$\int_{s_0}^{s_1} \frac{d^2x(\gamma(s))}{ds^2} * t(s) ds = 0,$$

donc pour tout s et tout vecteur tangent

$$\frac{d^2x(\gamma(s))}{ds^2} * t(s) = 0.$$

Il s'ensuit que $x(\gamma(s))$ est une géodésique. \square

Remarque 5.6.2 *Il y a néanmoins des géodésiques qui ne minimisent pas la longueur. Par exemple considérer deux points sur une sphère et le grand cercle déterminé par ces deux points.*

Nous allons maintenant nous intéresser à la question de l'existence des géodésiques. Soit $x : D \rightarrow M$ une carte et $\gamma(s) = x(u(s))$ une courbe dans M avec u une courbe dans D . Nous allons écrire x_1 resp. x_2 pour x_u resp. x_v . La condition d'accélération normale à la surface donne le système :

$$\begin{cases} \frac{d^2x(u(s))}{ds} * x_1(u(s)) = 0, \\ \frac{d^2x(u(s))}{ds} * x_2(u(s)) = 0. \end{cases}$$

Soit $u(s) = (u_1(s), u_2(s))$. On obtient (x et ses dérivées sont toujours évalués au point $u(s)$) :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= x_1 \dot{u}_1 + x_2 \dot{u}_2, \\ \frac{d^2x}{ds^2} &= x_{11} (\dot{u}_1)^2 + 2x_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + x_{22} (\dot{u}_2)^2 + x_1 \ddot{u}_1 + x_2 \ddot{u}_2, \\ \frac{d^2x}{ds^2} x_i &= 0, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

On définit

$$\begin{aligned} g_{ij} &:= x_i * x_j \\ \Gamma_{ijk} &:= x_{ij} * x_k. \end{aligned}$$

g_{ij} sont les composantes de la métrique euclidienne dans le repère x_1, x_2 et Γ_{ijk} sont les symboles de Christoffel. On obtient alors pour les équations de géodésiques :

$$\Gamma_{11i} (\dot{u}_1)^2 + 2\Gamma_{12i} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + \Gamma_{22i} (\dot{u}_2)^2 + g_{1i} \ddot{u}_1 + g_{2i} \ddot{u}_2 = 0.$$

Utilisant la métrique inverse (g^{ij}) de la matrice (g_{ij}) : $\sum_q g_{pq} g^{qr} = \delta_p^r$ ceci donne

$$\ddot{u}_p + \sum_{i,l,m} g^{ip} \Gamma_{lmi} \dot{u}_l \dot{u}_m = 0.$$

L'équation différentielle des géodésiques peut donc s'écrire

$$\ddot{u}_p + \sum_{l,m} \Gamma_{lm}^p \dot{u}_l \dot{u}_m = 0$$

avec $\Gamma_{lm}^p = \sum_i g^{ip} \Gamma_{lmi}$.

Théorème 5.6.2 *Soit M une surface de \mathbb{R}^3 et v un vecteur tangent au point p . Alors il existe une géodésique unique γ , définie sur un intervalle ouvert contenant 0, telle que*

$$\gamma(0) = p, \quad \gamma'(0) = v.$$

Preuve

Les équations géodésiques ont la forme

$$\ddot{u}_i = f_i(\dot{u}_1, \dot{u}_2), \quad i = 1, 2$$

avec des fonctions différentiables f_i . On peut écrire les conditions initiales comme

$$u_i(0) = p_i, \quad \dot{u}_i(0) = v_i$$

avec $p_i = (x^{-1}(p))_i$, $v_i = (d(x^{-1})v)_i$. Le théorème fondamental des équations différentielles assure une solution locale pour ce système. \square

Chapitre 6

Géométrie des surfaces de \mathbb{R}^3

6.1 Les équations fondamentales

Un champ de repère euclidien sur une surface $M \subset \mathbb{R}^3$ est un ensemble de trois champs de vecteurs qui sont orthogonaux à tout point.

Définition 6.1.1 *Un champ de repères E_1, E_2, E_3 adapté est un champ de repères euclidien sur une région \mathcal{O} dans $M \subset \mathbb{R}^3$ tel que E_3 est toujours orthogonal à M (E_1, E_2 sont alors tangents à M).*

$$U = E_3.$$

Lemme 6.1.1 *Il existe un champ de repères adapté sur une région \mathcal{O} dans $M \subset \mathbb{R}^3$ si et seulement si \mathcal{O} est orientable et il existe un champ de vecteurs tangent qui s'annule pas sur \mathcal{O} .*

Preuve : exo.

Soit maintenant E_1, E_2, E_3 un champ de vecteurs adapté sur M . On peut étendre ces champs de vecteurs à un ouvert de \mathbb{R}^3 en les bougeant le long de la normale à chaque point. On peut alors utiliser les équations de connexion (voir Théorème 2.5.1) :

$$\nabla_v E_i = \sum \omega_{ij}(v) E_j(p).$$

On va les appliquer uniquement aux vecteurs tangents à M . Les formes de connexion ω_{ij} deviennent alors des 1-formes sur M .

Théorème 6.1.1 *Soit E_1, E_2, E_3 un champ de vecteurs adapté sur $M \subset \mathbb{R}^3$ et v un vecteur tangent à M . Alors*

$$\nabla_v E_i = \sum_{j=1}^3 \omega_{ij}(v) E_j(p) \quad (1 \leq i \leq 3)$$

Corollaire 6.1.1 *Soit S l'opérateur de Weingarten associé à E_3 , où E_1, E_2, E_3 est un champ de repères adapté sur $M \subset \mathbb{R}^3$. Alors pour tout vecteur tangent v de M au point p ,*

$$S(v) = \omega_{13}(v) E_1(p) + \omega_{23}(v) E_2(p).$$

Preuve

Par définition $S(v) = -\nabla_v E_3$. L'équation de connexion pour $i = 3$ donne alors le résultat puisque la forme de connexion ω_{ij} est antisymétrique. □

En plus des formes de connexion le champ de repères adapté E_1, E_2, E_3 possède aussi des 1-formes duales $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ ($\theta_i(v) = v * E_i$). Comme pour les formes de connexion, les formes duales vont être appliquées uniquement à des vecteurs tangents. Elles deviennent ainsi des 1-formes sur M . Comme $\theta_3(v) = v * E_3$, θ_3 est alors 0 sur M . Utilisant l'antisymétrie de ω_{ij} , on voit que uniquement 5 1-formes comptent.

θ_1, θ_2 donnent une description duale des champs de vecteurs E_1, E_2 .

ω_{12} donne le taux de rotation E_1, E_2 .

$\omega_{13}, \omega_{2,3}$ décrivent l'opérateur de Weingarten.

Théorème 6.1.2 *Soit E_1, E_2, E_3 un champ de vecteurs adapté sur $M \subset \mathbb{R}^3$. Alors les formes duales et les formes de connexion vérifient :*

i) *La première équation structurelle*

$$(6.1.1) \quad \begin{cases} d\theta_1 &= \omega_{12} \wedge \theta_2, \\ d\theta_2 &= \omega_{21} \wedge \theta_1. \end{cases}$$

ii) *Equation de symétrie*

$$(6.1.2) \quad \omega_{31} \wedge \theta_1 + \omega_{32} \wedge \theta_2 = 0$$

iii) *Equation de Gauss*

$$(6.1.3) \quad d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}.$$

iv) *Equations de Codazzi*

$$(6.1.4) \quad \begin{cases} d\omega_{13} &= \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \\ d\omega_{23} &= \omega_{21} \wedge \omega_{13}. \end{cases}$$

Preuve

On applique les équations structurelles de Cartan, Théorème 2.6.1. La première équation structurelle,

$$d\theta_i = \sum_j \omega_{ij} \wedge \theta_j$$

donne (6.1.1) et (6.1.2). En effet pour $i = 1, 2$ on obtient (6.1.1) puisque $\theta_3 = 0$ sur la surface M . Mais $\theta_3 = 0$ donne $d\theta_3 = 0$, donc pour $i = 3$ on obtient (6.1.2). Les deuxièmes équations structurelles donnent les équations de Gauss (6.1.3) et de Codazzi (6.1.4). □

6.2 Calculs de formes

Lemme 6.2.1 Soient θ_1, θ_2 les 1– formes duales de E_1, E_2 sur M . Si ϕ est une 1– forme et μ une 2– forme, alors

$$(6.2.1) \quad \phi = \phi(E_1)\theta_1 + \phi(E_2)\theta_2,$$

$$(6.2.2) \quad \mu = \mu(E_1, E_2)\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Preuve : exo

Lemme 6.2.2

$$(6.2.3) \quad \omega_{13} \wedge \omega_{23} = K\theta_1 \wedge \theta_2.$$

$$(6.2.4) \quad \omega_{13} \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \omega_{23} = 2H\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Preuve

Afin de pouvoir appliquer les définitions $K = \text{Det}S$, $2H = \text{trace}S$, il faut trouver la matrice de S par rapport à E_1 et E_2 . On a (voir Corollaire 6.1.1) :

$$S(E_1) = -\nabla_{E_1}E_3 = -\omega_{31}(E_1)E_1 - \omega_{32}(E_1)E_2,$$

$$S(E_2) = -\nabla_{E_2}E_3 = -\omega_{31}(E_2)E_1 - \omega_{32}(E_2)E_2.$$

Donc la matrice de S est

$$\begin{pmatrix} \omega_{13}(E_1) & \omega_{23}(E_1) \\ \omega_{13}(E_2) & \omega_{23}(E_2) \end{pmatrix}.$$

Utilisant le lemme 6.2.1 on doit montrer que

$$(\omega_{13} \wedge \omega_{23})(E_1, E_2) = K, \quad (\omega_{13} \wedge \theta_2 + \theta_1 \wedge \omega_{23})(E_1, E_2) = 2H.$$

Mais

$$\begin{aligned} (\omega_{13} \wedge \omega_{23})(E_1, E_2) &= \omega_{13}(E_1)\omega_{23}(E_2) - \omega_{13}(E_2)\omega_{23}(E_1) \\ &= \text{déterminant de la matrice } S = \det S = K. \end{aligned}$$

Un calcul similaire donne la formule pour H . □

Une comparaison de (6.2.1) avec l'équation de Gauss (6.1.3) donne

Corollaire 6.2.1

$$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Définition 6.2.1 Un champ de repères principal sur $M \subset \mathbb{R}^3$ est un champ de repères adapté E_1, E_2, E_3 tel que à chaque point E_1, E_2 sont des vecteurs principaux.

Lemme 6.2.3 Soit p un point non ombilic de $M \subset \mathbb{R}^3$. Alors il existe un champ de repères principal dans un voisinage de p .

Preuve

Soit F_1, F_2, F_3 un champ de repères adapté dans un voisinage \mathcal{N} de p . Comme p est non ombilic, on peut supposer (en effectuant une rotation si nécessaire) que $F_1(p)$ et $F_2(p)$ ne sont pas des vecteurs principaux au point p . Comme $k_1(p) \neq k_2(p)$ on peut supposer que $k_1 \neq k_2$ dans \mathcal{N} . Soit S_{ij} la matrice de S par rapport à F_1, F_2 . Un calcul explicite montre que

$$\begin{aligned} V_1 &= S_{12}F_1 + (k_1 - S_{11})F_2, \\ V_2 &= (k_2 - S_{22})F_1 + S_{12}F_2 \end{aligned}$$

sont des vecteurs propres de S . Aussi $S_{12} = S(F_1) * F_2$ est toujours différent de zéro sur \mathcal{N} , donc V_1, V_2 sont différent de zéro sur \mathcal{N} . Pour obtenir un champ de repères principal il suffit de poser

$$E_1 = \frac{V_1}{\|V_1\|}, E_2 = \frac{V_2}{\|V_2\|}, E_3 = F_3.$$

□

On a $S(E_1) = k_1E_1, S(E_2) = k_2E_2$. Comparaison avec corollaire 6.1.1 :

$$\begin{aligned} \omega_{13}(E_1) &= k_1, & \omega_{13}(E_2) &= 0, \\ \omega_{23}(E_1) &= 0, & \omega_{23}(E_2) &= k_2. \end{aligned}$$

On applique le Lemme 6.2.1 pour obtenir

$$(6.2.5) \quad \omega_{13} = k_1\theta_1, \quad \omega_{23} = k_2\theta_2.$$

Théorème 6.2.1 *Soit E_1, E_2, E_3 un champ de repères principal sur $M \subset \mathbb{R}^3$. Alors*

$$\begin{aligned} E_1[k_2] &= (k_1 - k_2)\omega_{12}(E_2), \\ E_2[k_1] &= (k_1 - k_2)\omega_{12}(E_1). \end{aligned}$$

Preuve

Rappelons d'abord les équations de Codazzi :

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}, \quad d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}.$$

Différentiation de (6.2.5) donne

$$d(k_1\theta_1) = \omega_{12} \wedge k_2\theta_2;$$

donc

$$dk_1 \wedge \theta_1 + k_1 d\theta_1 = k_2 \omega_{12} \wedge \theta_2.$$

Substitution de la première équation structurelle $d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2$ donne

$$dk_1 \wedge \theta_1 = (k_2 - k_1)\omega_{12} \wedge \theta_2.$$

On applique maintenant ces 2- formes au couple de vecteurs E_1, E_2 pour obtenir

$$0 - dk_1(E_2) = (k_2 - k_1)\omega_{12}(E_1) - 0;$$

donc

$$E_2[k_1] = dk_1(E_2) = (k_1 - k_2)\omega_{12}(E_1).$$

L'autre équation peut être déduit de la même façon de l'équation de Codazzi $d\omega_{23} = \omega_{21} \wedge \omega_{13}$.

□

6.3 Quelques théorèmes globaux

Théorème 6.3.1 *Si l'opérateur de Weingarten est identiquement nul, M est une partie d'un plan dans \mathbb{R}^3 .*

Preuve

Par définition de l'opérateur de Weingarten, $S = 0$ signifie que la normale unitaire E_3 à M est parallèle dans le sens euclidien et peut donc être identifié avec un point dans \mathbb{R}^3 .

Choisissons un point p de M . On va montrer que M est dans le plan contenant p est orthogonal à E_3 . Si q est un point arbitraire de M , alors, comme M est connexe, il existe une courbe α dans M de $\alpha(0) = p$ à $\alpha(1) = q$. On considère alors la fonction

$$f(t) = (\alpha(t) - p) * E_3.$$

Mais on a alors

$$f'(t) = \alpha' * E_3 = 0, \quad f(0) = 0.$$

Il s'ensuit que f est identiquement nulle. En particulier,

$$f(1) = (q - p) * E_3 = 0,$$

donc chaque point de M est dans le plan en question. □

Théorème 6.3.2 *Si M est partout ombilic, alors M a une courbure de Gauss constante $K \geq 0$.*

Preuve

Soit E_1, E_2, E_3 un champ de repères adapté dans une région \mathcal{O} de M . Comme M est partout ombilic, les fonctions de courbure principale sur \mathcal{O} sont égales, $k_1 = k_2 = k$. En plus E_1, E_2, E_3 est un champ de repères principal (puisque toute direction sur M est principale). On peut alors appliquer le Théorème 6.2.1 afin de conclure $E_1[k] = E_2[k] = 0$. Ceci revient à dire

$$dk(E_1) = dk(E_2) = 0,$$

donc on conclut par le Lemme 6.2.1 que $dk = 0$ sur \mathcal{O} . Comme $K = k_1 k_2 = k^2$, on obtient $dK = 2kdk = 0$ sur \mathcal{O} . Comme tout point de M est dans une telle région, on conclut $dK = 0$ sur M est donc K constant. □

Théorème 6.3.3 *Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ ombilic partout et $K > 0$, alors M est une partie de la sphère de rayon $1/\sqrt{K}$.*

Preuve

Soit p un point de M et $E_3(p)$ le vecteur unitaire normal à M au point p . On va montrer que le point

$$c = p + \frac{1}{k(p)}E_3(p)$$

est à équidistance de tout point de M . (Ici $k(p) = k_1(p) = k_2(p)$ est la courbure principale correspondante à $E_3(p)$.) On étend $E_3(p)$ en un champ de vecteur normal unitaire sur α (voir dessin) et on considère la courbe

$$\gamma = \alpha + \frac{1}{k}E_3 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3.$$

Ici est sousentendu que la fonction de courbure k vient de E_3 .; donc k est continue. Mais

$K = k^2$, et par le lemme précédent, K est constant, donc k est constant. Donc

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k}E_3'.$$

Mais

$$E_3' = -S(\alpha') = -k\alpha',$$

puisque S est la multiplication par k . Donc

$$\gamma' = \alpha' + \frac{1}{k}(-k\alpha') = 0.$$

Il s'ensuit que la courbe γ est constante. En particulier,

$$c = \gamma(0) = \gamma(1) = q + \frac{1}{k}E_3(q),$$

donc $d(c, q) = 1/|k|$ pour tout point q de M . Puisque $K = k_1k_2 = k^2$ on a démontré que M est contenu dans la sphère de centre c et rayon $1/\sqrt{K}$. \square

Corollaire 6.3.1 *Une surface M de \mathbb{R}^3 qui est compacte et ombilic partout est la sphère entière S^2 .*

Preuve

On sait déjà que M est une partie de la sphère. M est clairement fermée dans S^2 puisque compacte dans \mathbb{R}^3 . Mais M est aussi ouvert puisque chaque point possède un voisinage ouvert dans M et donc dans S^2 qui est le domaine de définition d'une carte. M étant fermé et ouvert et S^2 étant connexe, on obtient $M = S^2$. \square

Théorème 6.3.4 *Sur toute variété compacte M de \mathbb{R}^3 il existe un point auquel la courbure de Gauss K est strictement positive.*

Preuve

Soit $f(p) = \|p\|^2$. f est différentiable, donc continue et M est compacte. Donc f atteint son maximum à un point m de M . Soit $r = \|m\|$.

On va montrer que $K(m) \geq \frac{1}{r^2} > 0$. Soit u un vecteur unitaire tangent à M au point m . Soit α une courbe dans M telle que $\alpha(0) = m$, $\alpha'(0) = u$. Il s'ensuit que la fonction composée $f(\alpha)$ admet un maximum à $t = 0$. Donc

$$(6.3.1) \quad \frac{d}{dt}(f\alpha)(0) = 0, \quad \frac{d^2}{dt^2}(f\alpha) \leq 0.$$

Mais $f(\alpha) = \alpha * \alpha$, donc $\frac{d(f\alpha)}{dt} = 2\alpha * \alpha'$. Evaluation à $t = 0$ donne

$$0 = \frac{d(f\alpha)}{dt}(0) = 2\alpha(0) * \alpha'(0) = 2m * u.$$

Comme u est un vecteur tangent unitaire à M au point m , ceci signifie que m est normal à M au point m . Une nouvelle dérivation donne

$$\frac{d^2(f\alpha)}{dt^2} = 2\alpha' * \alpha' + 2\alpha * \alpha''.$$

Utilisant (6.3.1) au point $t = 0$ donne

$$(6.3.2) \quad \begin{aligned} 0 &\geq u * u + m * \alpha''(0) \\ &= 1 + m * \alpha''(0). \end{aligned}$$

Par la discussion ci-dessus on peut considérer m/r comme un vecteur normal unitaire à M au point m .

Donc $(m/r) * \alpha''$ est précisément la courbure normale $k(u)$ de M dans la direction u . Il suit de (6.3.2) que $k(u) \leq -1/r$. En particulier, les deux courbures principales vérifient cette inégalité, donc

$$K(m) \geq \frac{1}{r^2} > 0.$$

□

En particulier il n'existe pas de surface compacte avec $K \leq 0$.

Lemme 6.3.1 (Hilbert) *Soit m un point de $M \subset \mathbb{R}^3$ tel que*

- i) k_1 admet un maximum local à m .*
- ii) k_2 admet un minimum local à m .*
- iii) $k_1(m) > k_2(m)$.*

Alors $K(m) \leq 0$.

Preuve

Comme $k_1(m) > k_2(m)$, m n'est pas ombilic. Par le lemme 6.2.3 il existe un champ de repères principal E_1, E_2, E_3 dans un voisinage de m dans M . L'hypothèse de minimalité et maximalité des courbures principales impliquent

$$(6.3.3) \quad E_1[k_2] = 0 = E_2[k_1] = 0 \quad \text{au point } m,$$

$$(6.3.4) \quad E_1E_1[k_2] \geq 0 \quad \text{et} \quad E_2E_2[k_1] \leq 0 \quad \text{au point } m.$$

(6.3.3) implique par le Théorème 6.2.1

$$\omega_{12}(E_1) = \omega_{12}(E_2) = 0 \quad \text{au point } m$$

puisque $k_1 - k_2 \neq 0$. Il suit par le corollaire 6.2.1

$$(6.3.5) \quad K = E_2[\omega_{12}(E_1)] - E_1[\omega_{12}(E_2)] \quad \text{au point } m.$$

On applique maintenant E_1 à la première équation dans le Théorème 6.2.1 et on obtient :

$$E_1E_1[k_2] = (E_1[k_1] - E_1[k_2])\omega_{12}(E_2) + (k_1 - k_2)E_1[\omega_{12}(E_2)].$$

Au point m , on a $\omega_{12}(E_2) = 0$ et $k_1 - k_2 > 0$; donc de (6.3.4) on déduit

$$(6.3.6) \quad E_1[\omega_{12}(E_2)] \geq 0 \quad \text{au point } m.$$

Un argument similaire donne

$$(6.3.7) \quad E_2[\omega_{12}(E_1)] \leq 0 \quad \text{au point } m.$$

Utilisant (6.3.6) et (6.3.7) dans l'expression (6.3.5) de la courbure de Gauss, on obtient $K(m) \leq 0$. □

Théorème 6.3.5 (Liebmann) *Si M est une surface compacte dans \mathbb{R}^3 avec courbure de Gauss constante K , alors M est une sphère de rayon $1/\sqrt{|K|}$ (Théorème 6.3.4 implique que la courbure est positive).*

Preuve

Comme $M \subset \mathbb{R}^3$ est compacte, elle est orientable d'après le Théorème 3.6.1, donc un champ de vecteur normal unitaire existe et l'opérateur de Weingarten est défini et lisse sur toute la surface. Les fonctions de courbures principales $k_1 \geq k_2$ sont également globalement définies et continues. M étant compacte, k_1 admet un maximum à un point p de M . Comme $K = k_1k_2$ est constant, k_2 a un minimum au point p . On ne peut pas avoir $k_1(p) > k_2(p)$ puisque le Lemme de Hilbert donne dans ce cas $K(p) \leq 0$. Donc pour tout $q \in M$ on a $k_1(p) \geq k_1(q) \geq k_2(q) \geq k_2(p) = k_1(p)$ et M est partout ombilic. C'est donc la sphère de rayon $r = 1/\sqrt{|K|}$. □

6.4 Isométries et isométries locales

Définition 6.4.1 Soient p et q des points de $M \subset \mathbb{R}^3$. On considère la collection de toutes les courbes α dans M qui vont de p à q . La distance intrinsèque $\rho(p, q)$ dans M est l'inf des toutes les longueurs $L(\alpha)$ de ces courbes.

Définition 6.4.2 Soient M et \bar{M} deux surfaces dans \mathbb{R}^3 . Une isométrie $F : M \rightarrow \bar{M}$ est une application différentiable et injective qui préserve le produit scalaire entre vecteurs tangents. Plus explicitement

$$dF(v) * dF(w) = v * w$$

pour tout couple (v, w) de vecteurs tangents à M . Ici dF est l'application tangente.

Remarque 6.4.1 — dF préserve la longueur des vecteurs tangents.

— F est une application régulière. Si $dF(v) = 0$, on a

$$\|v\| = \|dF(v)\| = 0 \Rightarrow v = 0.$$

— Si F est surjective, alors F est un difféomorphisme (voir remarque après Théorème 3.4.1).

Théorème 6.4.1 Les isométries préservent les distances intrinsèques. Si $F : M \rightarrow \bar{M}$ est une isométrie entre surfaces de \mathbb{R}^3 , alors

$$\rho(p, q) = \bar{\rho}(F(p), F(q))$$

pour tout couple de points p, q dans M . (Ici ρ (resp. $\bar{\rho}$) est la fonction de distance sur M (resp. \bar{M})).

Preuve

On commence par remarquer que les isométries préservent la vitesse et la longueur d'une courbe. Si α est une courbe dans M , alors $\bar{\alpha} = F(\alpha)$ est une courbe dans \bar{M} avec vitesse $\bar{\alpha}' = dF(\alpha')$. Comme F_* préserve le produit scalaire, il préserve la norme, donc

$$\|\alpha'\| = \|dF(\alpha')\| = \|(F(\alpha))'\| = \|\bar{\alpha}'\|.$$

Il s'ensuit

$$L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \|\bar{\alpha}'(t)\| dt = L(\bar{\alpha}).$$

Si α va de p à q dans M , alors son image $\bar{\alpha} = F(\alpha)$ va de $F(p)$ à $F(q)$ dans \bar{M} . Inversement si β est une courbe dans \bar{M} qui va de $F(p)$ à $F(q)$, alors $F^{-1}(\beta)$ va de p à q dans M . Ceci donne une correspondance 1 à 1 entre les courbes qui sont utilisées pour définir $\rho(p, q)$ et celles qui sont utilisées pour définir $\bar{\rho}(F(p), F(q))$. Mais des courbes correspondantes ont la même longueur, il s'ensuit que $\rho(p, q) = \bar{\rho}(F(p), F(q))$. \square

Définition 6.4.3 Une isométrie locale $F : M \rightarrow N$ de surfaces est une application qui préserve le produit scalaire entre vecteurs tangents (c.à.d. dF a cette propriété).

Remarque 6.4.2 Si F est une isométrie locale, l'argument déjà utilisé montre que F est une application régulière. Alors pour tout point p de M , le théorème d'inversion locale nous donne l'existence d'un voisinage \mathcal{U} de p dans M tel que la restriction de F sur ce voisinage est un difféomorphisme sur un voisinage \mathcal{V} de $F(p)$. \mathcal{U} et \mathcal{V} sont elles-mêmes des surfaces dans \mathbb{R}^3 et $F|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ est une isométrie. Dans ce sens une isométrie locale est localement une isométrie.

Lemme 6.4.1 Soit $f : M \rightarrow N$ une application. Pour toute carte $x : D \rightarrow M$, on considère la composée

$$\bar{x} = f(x) : D \rightarrow N.$$

Alors f est une isométrie locale si et seulement si pour toute carte x on a

$$E = \bar{E}, \quad F = \bar{F}, \quad G = \bar{G}.$$

(Ici \bar{x} n'est pas nécessairement une carte, mais $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ sont définies comme d'habitude).

Preuve

Supposons que le critère soit vérifié. Afin de montrer que dF préserve le produit scalaire, il faut montrer uniquement que

$$\|x_u\| = \|df(x_u)\|, \quad x_u * x_v = df(x_u) * df(x_v), \quad \|x_v\| = \|df(x_v)\|.$$

Mais il suit immédiatement de la définition de dF que

$$df(x_u) = \bar{x}_u, \quad df(x_v) = \bar{x}_v.$$

Mais les équations ci-dessus suivent de l'hypothèse $E = \bar{E}$, $F = \bar{F}$, $G = \bar{G}$. f est alors une isométrie locale. Inverser l'argument donne l'assertion inverse. \square

Définition 6.4.4 Une application entre surfaces $F : M \rightarrow N$ est conforme s'il existe une fonction réelle $\lambda > 0$ t.q.

$$\|dF(v_p)\| = \lambda(p)\|v_p\|$$

pour tous les vecteurs tangents v_p à M .

6.5 La géométrie intrinsèque des surfaces de \mathbb{R}^3

Lemme 6.5.1 La forme de connexion $\omega_{12} = -\omega_{21}$ est la seule 1-forme qui vérifie les équations structurelles

$$d\theta_1 = \omega_{12} \wedge \theta_2, \quad d\theta_2 = \omega_{21} \wedge \theta_1.$$

Preuve

On applique ces équations aux champs de vecteurs tangents E_1, E_2 . On obtient :

$$\begin{aligned} \omega_{12}(E_1) &= d\theta_1(E_1, E_2), \\ \omega_{12}(E_2) &= -\omega_{21}(E_2) = d\theta_2(E_1, E_2). \end{aligned}$$

□

Soit $F : M \rightarrow \overline{M}$ une isométrie. On peut transférer le champ de repères E_1, E_2 sur M sur des champs de repères $\overline{E}_1, \overline{E}_2$ sur \overline{M} . Pour tout point q de \overline{M} , il existe un point unique p de M tel que $F(p) = q$. On définit alors

$$\begin{aligned}\overline{E}_1(q) &= dF(E_1(p)), \\ \overline{E}_2(q) &= dF(E_2(p)).\end{aligned}$$

On écrit souvent brièvement

$$\overline{E}_1 = dF(E_1), \quad \overline{E}_2 = dF(E_2).$$

Comme F préserve le produit scalaire, $\overline{E}_1, \overline{E}_2$ est un champ de repères sur \overline{M} :

$$\overline{E}_i * \overline{E}_j = dF(E_i) * dF(E_j) = E_i * E_j = \delta_{ij}.$$

Lemme 6.5.2 *Soit $F : M \rightarrow \overline{M}$ une isométrie, et soit E_1, E_2 un champ de repères tangent à M . Si $\overline{E}_1, \overline{E}_2$ est le champ de repères transféré sur \overline{M} , alors*

- i) $\theta_1 = F^*(\overline{\theta}_1), \theta_2 = F^*(\overline{\theta}_2),$
- ii) $\omega_{12} = F^*(\overline{\omega}_{12}).$

Preuve

i) Il suffit de démontrer que θ_1 et $F^*(\overline{\theta}_1)$ ont la même valeur sur E_1 et E_2 . Pour $1 \leq i, j \leq 2$ on a

$$F^*(\overline{\theta}_i)(E_j) = \overline{\theta}_i(dF E_j) = \overline{\theta}_i(\overline{E}_j) = \delta_{ij} = \theta_i(E_j).$$

ii) On considère les équations structurelles $d\overline{\theta}_1 = \overline{\omega}_{12} \wedge \overline{\theta}_2$ sur \overline{M} . On applique F^* et on utilise 3.4.2 afin d'obtenir :

$$d(F^*\overline{\theta}_1) = F^*(d\overline{\theta}_1) = F^*(\overline{\omega}_{12}) \wedge F^*(\overline{\theta}_2).$$

Donc par i) on obtient :

$$d\theta_1 = F^*(\overline{\omega}_{12}) \wedge \theta_2.$$

L'autre équation structurelle,

$$d\overline{\theta}_2 = \overline{\omega}_{12} \wedge \overline{\theta}_1,$$

donne l'équation correspondante. On obtient alors

$$\begin{aligned}d\theta_1 &= F^*(\overline{\omega}_{12}) \wedge \theta_2, \\ d\theta_2 &= F^*(\overline{\omega}_{21}) \wedge \theta_1.\end{aligned}$$

Maintenant ii) est une conséquence immédiate de la propriété d'unicité (Lemme 6.5.1) puisque

$$F^*(\overline{\omega}_{21}) = F^*(-\overline{\omega}_{12}) = -F^*(\overline{\omega}_{12}).$$

□

Théorème 6.5.1 (Gauss, theorema egregium) *La courbure de Gauss est un invariant isométrique : Si $F : M \rightarrow \bar{M}$ est une isométrie, alors*

$$K(p) = \bar{K}(F(p))$$

pour tout point p de M . Ici K (resp. \bar{K}) est la courbure de Gauss de M (resp. \bar{M}).

Preuve

Pour tout point p de M , on prend un champ de repères tangent E_1, E_2 dans un voisinage de p et on le transfère via F_* à \bar{E}_1, \bar{E}_2 sur \bar{M} . Par le lemme précédent $F^*(\bar{\omega}_{12}) = \omega_{12}$. Par le Corollaire 6.2.1 on a

$$d\bar{\omega}_{12} = -\bar{K}\bar{\theta}_1 \wedge \bar{\theta}_2.$$

On applique maintenant F^* dans cette équation. Par Théorème 3.4.2 on obtient

$$d(F^*\bar{\omega}_{12}) = F^*(d\bar{\omega}_{12}) = -F^*(\bar{K})F^*(\bar{\theta}_1) \wedge F^*(\bar{\theta}_2),$$

où $F^*(\bar{K})$ est tout simplement la composée $\bar{K}(F)$. Donc par le lemme précédent,

$$d\omega_{12} = -\bar{K}(F)\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Comparaison avec $d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2$ donne $K = \bar{K}(F)$, donc en particulier $K(p) = \bar{K}(F(p))$.

□

Remarque 6.5.1 i) *Le théorème de Gauss est une des grandes découvertes mathématiques du 19ème siècle. L'ingrédient principal de la preuve est l'équation*

$$d\omega_{12} = -K\theta_1 \wedge \theta_2.$$

Grâce au lemme 6.5.1 on sait que tous les ingrédients de cette équation à l'exception de K viennent uniquement de M , donc aussi K . Autrement dit les "habitants" de M peuvent déterminer K malgré le fait qu'en général ils ne peuvent pas trouver S et n'ont pas de conception de la forme de M dans \mathbb{R}^3 . On comprend bien ceci si l'on regarde l'équation $K = k_1k_2$. Une isométrie ne préserve ni les courbures principales ni leur somme, mais elle préserve leur produit.

ii) *Le théorème de Gauss peut bien sûr être utilisé pour montrer que deux surfaces ne sont pas isométriques. Par exemple il n'y a pas d'isométrie d'une partie de la sphère sur une partie du plan puisque leur courbures de Gauss sont différentes. C'est le dilemme du cartographe : la géométrie intrinsèque de la surface de la terre est mal représentée par toute carte plate.*

6.6 Intégration et orientation

— Segment de $x(u, v)$ à $x(u + \Delta u, v) \sim \Delta u x_u$.

— Segment de $x(u, v)$ à $x(u, v + \Delta v) \sim \Delta v x_v$.

Aire du parallélogramme :

$$\|\Delta u x_u \times \Delta v x_v\| = \|x_u \times x_v\| \Delta u \Delta v = \sqrt{EG - F^2} \Delta u \Delta v.$$

$$\mathcal{A}(x(D)) = \int \int_D \sqrt{EG - F^2} du dv$$

Soit $R : a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$. L'intérieur R° est l'ensemble ouvert $a < u < b, c < v < d$.

Définition 6.6.1 Un 2-segment $x : R \rightarrow M$ est dit de type carte si $x : R^\circ \rightarrow M$ est une carte pour M .

Définition 6.6.2 Un pavage d'une région \mathcal{P} d'une surface consiste d'un nombre fini de 2-segments de type carte x_1, \dots, x_k dont les images remplissent M de sorte que chaque point de M est dans au plus un des ensembles $x(R_i^\circ)$.

On cherche une 2-forme telle que intégrée sur une surface elle donne le volume de la surface (si fini).

Définition 6.6.3 Une forme de volume d'une surface M est une 2-forme différentiable μ telle que $\mu(x_u, x_v) = \pm \sqrt{EG - F^2}$.

Lemme 6.6.1 Une surface M admet une forme de volume si et seulement si elle est orientable. Sur une surface connexe orientable il existe exactement deux formes de volumes (notées $\pm dM$).

preuve : exo ($dM = \pm U * v \times w$). Soit x est 2-segment de type carte. Par définition

$$\int \int_x dM = \int \int_R dM(x_u, x_v) du dv.$$

Deux cas :

i) $dM(x_u, x_v) > 0$ (orientation positive). Donc $\int \int_x dM$ est l'aire de $x(R)$.

ii) $dM(x_u, x_v) < 0$ (orientation négative). Donc $\int \int_x dM = -\mathcal{A}(x(R))$.

Donc pour trouver l'aire d'une région pavable, le pavage doit avoir une orientation positive, c.à.d. tous les segments de type carte ont cette orientation. Dans ce cas

$$\mathcal{A}(\mathcal{P}) = \sum_i \mathcal{A}(x_i(R)) = \sum_i \int \int_{x_i} dM.$$

Définition 6.6.4 Soit ν une 2-forme d'une région pavable orientable d'une surface. L'intégrale de ν sur \mathcal{P} est

$$\int \int_{\mathcal{P}} \nu = \sum_i \int \int_{x_i} \nu,$$

où x_1, \dots, x_k est un pavage de \mathcal{P} avec une orientation positive.

On peut ainsi définir l'intégrale d'une fonction sur une région pavable par $\int \int_{\mathcal{P}} f dM$.

Remarque 6.6.1 *On peut définir l'intégrale d'une fonction aussi sur des régions non compactes. Soit $f > 0$ une fonction continue sur une surface M . On définit l'intégrale de f sur M comme le sup des intégrales sur toutes les régions pavables \mathcal{P} dans M :*

$$\int \int_M f dM = \sup_{\mathcal{P} \subset M \text{ pavable}} \int \int_{\mathcal{P}} f dM.$$

Définition 6.6.5 *La courbure totale de Gauss de M est définie par*

$$\int \int_M K dM.$$

Chapitre 7

Le théorème de Gauss-Bonnet

7.1 Préparations

Soit $M \subset \mathbb{R}^3$ une surface orientable. On définit l'opérateur de rotation par

$$J(v) = U \times v.$$

Soit $\alpha : I \rightarrow M$ une courbe. Soit E_1, E_2 un champ de repères et $Y = f_1 E_1 + f_2 E_2$ un champ de vecteurs. On a

$$Y' = (f_1' + f_2 \omega_{21}(\alpha')) E_1 + (f_2' + f_1 \omega_{12}(\alpha')) E_2.$$

Lemme 7.1.1 *Soit $E_1, E_2 = J(E_1)$ un champ de repères orienté positivement sur M . Soit Y un champ de vecteurs de longueur constante $c > 0$ le long d'une courbe dans M . Si φ est la fonction d'angle de E_1 à Y , alors*

$$Y' = (\varphi' + \omega_{12}(\alpha')) J(Y).$$

Preuve

On peut écrire $Y/c = \cos \varphi E_1 + \sin \varphi E_2$. Alors on obtient :

$$\begin{aligned} Y'/c &= \sin \varphi (-\varphi' + \omega_{21}(\alpha')) E_1 + \cos \varphi (\varphi' + \omega_{12}(\alpha')) J(E_1) \\ &= (\varphi' + \omega_{12}(\alpha')) (\cos \varphi E_2 - \sin \varphi E_1) = (\varphi' + \omega_{12}(\alpha')) J(Y/c). \end{aligned}$$

□

Soit $\beta : I \rightarrow M$ une courbe paramétrée en longueur d'arc. Soit $T = \beta'$ et $N = J(T)$. La courbure géodésique k_g de β est donnée par la formule de Frénet :

$$T' = k_g N.$$

Corollaire 7.1.1 *Soit β une courbe paramétrée en longueur d'arc dans une région orientée par un champ de repères E_1, E_2 . Si φ est la fonction d'angle de E_1 à β' le long de β , alors*

$$k_g = \frac{d\varphi}{ds} + \omega_{12}(\beta').$$

Preuve

Si l'on pose $Y = T$ dans le lemme 7.1.1, alors on obtient :

$$T' = (\varphi' + \omega_{12}(\alpha'))J(T).$$

Comme $J(T) = N$, le résultat suit par comparaison avec $T' = k_g N$. \square

7.2 Le théorème de Gauss-Bonnet

Définition 7.2.1 Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ une courbe régulière dans une surface $M \subset \mathbb{R}^3$. La courbure géodésique totale de α est

$$\int_{\alpha} k_g ds = \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} k_g(\alpha(t)) \frac{d\alpha}{dt} dt.$$

Exemple : α est le bord du cercle de rayon r . Alors α a une courbure géodésique constante $1/r$. La courbure géodésique totale est alors :

$$\int_{\alpha} k_g ds = \frac{1}{r} 2\pi r = 2\pi.$$

Intégrant la formule dans le Corollaire 7.1.1 on obtient :

Lemme 7.2.1 Soit $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ un segment d'une courbe régulière dans une région de M orientée par E_1, E_2 . Alors on a

$$\int_{\alpha} k_g ds = \varphi(b) - \varphi(a) + \int_{\alpha} \omega_{12},$$

où φ est la fonction d'angle de E_1 à α' le long de α et ω_{12} est la forme de connexion de E_1, E_2 .

Soit $x : R \rightarrow M$ injective et régulière sur tout le segment, $R : a \leq u \leq b, c \leq v \leq d$. Avec les notations du Chapitre 3 ($\alpha(u) = x(u, c)$, $\beta(v) = x(b, v)$, $\gamma(u) = x(u, d)$, $\delta(v) = x(a, v)$) on a

$$\partial x = \alpha + \beta - \gamma - \delta.$$

On pose

$$p_1 = x(a, c), p_2 = x(b, c), p_3 = x(b, d), p_4 = x(a, d).$$

Définition 7.2.2 Soit $x : R \rightarrow M$ un 2-segment injectif avec sommets p_1, p_2, p_3, p_4 . L'angle extérieur ϵ_j de x à p_j ($1 \leq j \leq 4$) et l'angle tournant à p_j qui vient des courbes $\alpha, \beta, -\gamma, -\delta$ dans l'ordre d'apparition dans x . L'angle intérieur ι_j à p_j est $\pi - \epsilon_j$.

Les angles extérieurs peuvent être exprimés en termes d'angles de coordonnées habituelles $0 < \theta < \pi$ de x_u à x_v comme

$$\epsilon_1 = \pi - \theta_1, \quad \epsilon_2 = \theta_2, \quad \epsilon_3 = \pi - \theta_3, \quad \epsilon_4 = \theta_4,$$

où θ_j est l'angle de coordonnées à p_j .

Théorème 7.2.1 (Formule de Gauss-Bonnet avec angles extérieurs) *Soit M une surface de \mathbb{R}^3 et $x : R \rightarrow M$ un 2-segment injectif régulier. Si dM est la forme de volume associée à x , alors*

$$\int \int_x K dM + \int_{\partial x} k_g ds + \sum_{j=1}^4 \epsilon_j = 2\pi,$$

où ϵ_j est l'angle extérieur au sommet p_j de x ($1 \leq j \leq 4$).

Preuve

On choisit un champ de repères associé à la carte $E_1 = x_u/\sqrt{E}$, $E_2 = J(E_1)$. On a $dM(E_1, E_2) = 1$. La deuxième équation structurelle devient alors :

$$d\omega_{12} = -K d\theta_1 \wedge d\theta_2 = -K dM.$$

Théorème de Stokes :

$$(7.2.1) \quad \int \int_x K dM + \int_{\partial x} \omega_{12} = 0.$$

On utilise le Lemme 7.2.1 afin d'évaluer

$$(7.2.2) \quad \int_{\partial x} \omega_{12} = \int_{\alpha} \omega_{12} + \int_{\beta} \omega_{12} - \int_{\gamma} \omega_{12} - \int_{\delta} \omega_{12}.$$

On commence par α . On a $\alpha' = x_u = \sqrt{E}E_1$. Donc l'angle de E_1 à α' est identiquement zéro. Donc par le Lemme 7.2.1

$$(7.2.3) \quad \int_{\alpha} \omega_{12} = \int_{\alpha} k_g ds.$$

Considérons maintenant un cas plus dur, disons $\int_{\delta} \omega_{12}$. L'angle de $E_1 = x_u/\sqrt{E}$ à $\delta' = x_v$ est l'angle de coordonnées θ de x_u à x_v . Donc par le Lemme 7.2.1 we have

$$\int_{\delta} \omega_{12} = \theta_1 - \theta_4 + \int_{\delta} k_g ds,$$

où θ_j est l'angle de coordonnées au sommet p_j ($1 \leq j \leq 4$). Mais comme $\theta_1 = \pi - \epsilon_1$ et $\theta_4 = \epsilon_4$ ceci devient

$$(7.2.4) \quad \int_{\delta} \omega_{12} = \pi - \epsilon_1 - \epsilon_4 + \int_{\delta} k_g ds$$

De façon analogue on trouve

$$(7.2.5) \quad \int_{\beta} \omega_{12} = -\pi + \epsilon_2 + \epsilon_3 + \int_{\beta} k_g ds$$

et

$$(7.2.6) \quad \int_{\gamma} \omega_{12} = \int_{\gamma} k_g ds$$

Mettant (7.2.3)-(7.2.6) dans (7.2.2) donne

$$\int_{\partial x} \omega_{12} = \int_{\partial x} k_g ds - 2\pi + \sum_{j=1}^4 \epsilon_j.$$

Ceci donne la formule grâce à (7.2.1). □

Une décomposition rectangulaire \mathcal{D} d'une surface M est une collection finie de 2-segments injectifs x_1, \dots, x_f dont les images couvrent M de telle façon que si deux ont une intersection non vide, l'intersection consiste d'un seul sommet ou d'une seule arête.

Théorème 7.2.2 *Toute surface compacte de \mathbb{R}^3 admet une décomposition rectangulaire.*

Théorème 7.2.3 *Soit \mathcal{D} une décomposition rectangulaire d'une surface compacte M , et ν , e et f le nombre de sommets, arêtes et faces de \mathcal{D} . Alors le nombre $\nu - e + f$ est le même pour toute décomposition rectangulaire de M . Ce nombre $\chi(M)$ est appelé la caractéristique d'Euler de M .*

Exemple 7.2.1 i) *La sphère S^2 a une caractéristique d'Euler $\chi(S^2) = 2$. Dessin*

$$\nu = 8, e = 12, f = 6.$$

ii) *Le tore T a $\chi(T) = 0$.*

Remarque 7.2.1 i) *Si l'on ajoute une poignée à une surface, sa caractéristique d'Euler diminue de 2.*

ii) *Des surfaces difféomorphes ont la même caractéristique d'Euler. Si x_1, \dots, x_f est une décomposition de M et $F : M \rightarrow N$ le difféomorphisme, alors $F(x_1), \dots, F(x_f)$ est une décomposition de N avec les mêmes ν , e , f .*

Soit $\Sigma = S^2$ la sphère. Partant de Σ on ajout successivement h poignées pour obtenir $\Sigma[h]$.

Théorème 7.2.4 *Soit M une surface connexe compacte de \mathbb{R}^3 . Alors il existe un nombre $h \geq 0$ tel que M est difféomorphe à $\Sigma[h]$.*

Théorème 7.2.5 (Gauss-Bonnet) *La courbure totale de Gauss d'une surface compacte M est égale à 2π fois la caractéristique d'Euler.*

$$\int \int_M K dM = 2\pi \chi(M).$$

Preuve

On va orienter M par la forme de volume dM . Soit \mathcal{D} une décomposition de M dont tous les 2-segments sont orientés de façon positive. (Une mauvaise orientation peut être corrigée en inversant u et v). \mathcal{D} est alors un pavage orienté de M . La courbure totale de M est alors

$$(7.2.7) \quad \int \int_M K dM = \sum_{j=1}^f \int \int_{x_i} K dM.$$

On va appliquer la formule de Gauss-Bonnet à chaque terme de la somme. En termes d'angles intérieurs on a

$$(7.2.8) \quad \int \int_{x_i} K dM = - \int_{\partial x_i} k_g ds - 2\pi + \sum_{j=1}^4 \iota_j.$$

On va maintenant observer ce qui se passe si l'on substitue (7.2.8) dans (7.2.7). Comme M est une surface (localement comme \mathbb{R}^2), chaque arête de la décomposition apparaît dans exactement deux surfaces, disons $x_i(R_i)$ et $x_j(R_j)$. Soient α_i et α_j les paramétrisations de ces arêtes qui apparaissent dans les bords ∂x_i et ∂x_j . Par construction $x_i(R_i)$ et $x_j(R_j)$ ont la même orientation comme M , donc α_i est une reparamétrisation de α_j qui inverse l'orientation. Donc

$$\int_{\alpha_i} k_g ds + \int_{\alpha_j} k_g ds = 0.$$

Il s'ensuit que si l'on somme sur toutes les surfaces on obtient

$$(7.2.9) \quad \sum_{j=1}^f \int_{\partial x_i} k_g ds = 0.$$

Soient ν , e , f le nombre de sommets, arêtes et faces dans la décomposition. Substitution de (7.2.8) dans (7.2.7) donne

$$(7.2.10) \quad \int \int_M K dM = -2\pi f + \mathcal{F},$$

où \mathcal{F} est la somme sur tous les angles intérieurs dans la décomposition. Mais la somme sur tous les angles intérieurs à chaque sommet est 2π , donc $\mathcal{F} = 2\pi\nu$. Donc

$$(7.2.11) \quad \int \int_M K dM = -2\pi f + 2\pi\nu.$$

Les faces de la décomposition sont rectangulaires. Chaque face a 4 arêtes. Chaque arête appartient à deux faces. Donc $4f$ compte e deux fois : $4f = 2e$. De façon équivalente $-f = f - e$ et (7.2.11) devient

$$\int \int_M K dM = 2\pi(\nu - e + f) = 2\pi\chi(M).$$

□

Remarque 7.2.2 i) *Le théorème de Gauss-Bonnet lie géométrie et topologie. La caractéristique d'Euler est une invariante topologique. Par le théorème de Gauss-Bonnet la courbure totale est alors aussi une invariante topologique.*

ii) *Le théorème est valable aussi pour des variétés abstraites de dimension 2 munies d'une métrique riemannienne.*

Application

Si une surface compacte orientable M a $K > 0$, alors M est difféomorphe à une sphère.

Comme $K > 0$, la courbure totale de M est positive, et ainsi aussi sa caractéristique d'Euler. Mais $\chi(M) = 2 - 2h$, donc $h = 0$ et M est difféomorphe à $\Sigma[0] = S^2$.

Bibliographie

- [1] Barret O'Neill, *Elementary differential geomtry*.
- [2] Manfredo do Carmo, *Differential Geometry of curves and Surfaces*.
- [3] Jacques Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*.