Examen MAT201

17 mai 2019

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 2h

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Enoncer le théorème de d'Alembert-Gauss (aussi appelé théorème fondamental de l'algèbre).
2. Soient E et F deux $\mathbb{R}-$ espaces vectoriels de même dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Indiquer comment construire un isomorphisme de E dans F.
3. Montrer à l'aide d'un exemple que la multiplication de matrices dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ n'est pas commutative.
4. Enoncer le théorème du rang.

Exercice 2 (Groupes)
Pour $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ on définit

$$f_{a,b} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}, \\ x & \mapsto & ax+b. \end{array} \right.$$

Soit $G = \{f_{a,b} |\, a \in \mathbb{R}^*,\, b \in \mathbb{R}\}$. Montrer que G muni de la composition d'applications est un groupe.

Exercice 3 (Dimension des espaces vectoriels) Dans $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs

$$u = (1, t, -1),\ v = (t, 1, 1),\ w = (1, 1, 1).$$

On considère ensuite les espaces

$$F = \text{Vect}(u, v),\ G = \text{Vect}(w).$$

1. Calculer la dimension de F en fonction de t.
2. Calculer la dimension de $F \cap G$ en fonction de t.

Indication: il faudra distinguer les cas $t = -1$, $t = 1$ et $t^2 \neq 1$.

T.S.V.P.

Exercice 4 (Applications linéaires et matrices associées)
Soit b la base canonique de $\mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et f_A l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base b est A (f_A est alors l'endomorphisme canoniquement associé à A). On pose également

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b' = (U_1, U_2, U_3).$$

1. Montrer que b' est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f_A(U_i)$, $i = 1, 2, 3$.
3. En déduire $A' = M_{b'}^{b'}(f_A)$.
4. En déduire rang f_A, $\dim \mathrm{Ker} f_A$.
5. Calculer la matrice de passage de la base b à la base b', $P = M_b^{b'}(Id_{\mathbb{R}^3})$ (la base de départ est b' et la base d'arrivée est b).
6. Calculer P^{-1}.
7. Vérifier le résultat de 3. en calculant $P^{-1}AP$.
8. Trouver la solution générale de
$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Indication : En utilisant la base b' on pourra répondre à la question essentiellement sans calcul supplémentaire.

Exercice 5 (Projecteurs)
Soit E un espace vectoriel et p un projecteur sur E. On pose $q := Id_E - p$.

1. Montrer que q est un projecteur.
2. Exprimer $\mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q)$ en fonction de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ et démontrer cette corrélation.
3. Soit maintenant $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$, $G = \mathrm{Vect}(e_3)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ et p la projection sur F parallèlement à G. Etant donné (x, y, z) dans $\mathbb{R}^3$, donner les formules explicites pour $p((x, y, z))$ et $q((x, y, z))$. Quelle est l'interprétation géométrique de q ?