Examen MAT201

16 mai 2018

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 2h

Exercice 1 (Questions de cours, 3 points)

1. Soient E et F deux $\mathbb{K}-$ espaces vectoriels. Donner la définition d'une application linéaire de E dans F, et la définition de son noyau.
2. Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$. Définir la projection sur F parallèlement à G.
3. Soit E un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension p et F un $\mathbb{K}-$ espace vectoriel de dimension n. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des applications linéaires de E dans F $\mathcal{L}(E, F)$? Justifier votre réponse.

Exercice 2 (4 points) Pour $\theta \in \mathbb{R}$ on définit $f_\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^{i\theta} z$. Soit $G = \{f_\theta; \theta \in \mathbb{R}\}$. On munit G de la composition d'applications $\circ$.

1. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe abélien.
2. Montrer que
$$\varphi : \begin{cases} (\mathbb{R}, +) & \to & (G, \circ), \\ \theta & \mapsto & f_\theta \end{cases}$$
est un morphisme de groupes.
3. Est-ce que φ est surjective ? injective ?

Exercice 3 (3 points)
Soient P_0, P_1, $P_2, \in \mathbb{R}_2[X]$ définis par
$$P_0(X) = 1,\ P_1(X) = (X-1)^2,\ P_2(X) = (X+1)^2.$$

1. Exprimer $1, X, X^2$ comme combinaison linéaire de P_0, P_1 et P_2.
2. Montrer que $b = (P_0,\ P_1,\ P_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. Soit $F = \mathrm{Vect}(\{P_0, P_1\})$, $G = \mathrm{Vect}(\{P_2\})$. Montrer que $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus G$.
4. Soit p_F la projection sur F parallèlement à G. Déterminer la matrice $\mathcal{P}_F = M_b^b(p_F)$ associée à p_F dans la base b.

T.S.V.P.

Exercice 4 (9 points) Soit f l'endomorphisme défini de la façon suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3, \\ (x,y,z) & \mapsto & (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z, -y, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z). \end{array} \right.$$

Soit $b = ((1,0,0),\ (0,1,0),\ (0,0,1))$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Déterminer la matrice $A = M_b^b(f)$ associée à f dans la base canonique b de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer Ker$f$. L'application est-elle injective ?
   (c) Déterminer Imf. L'application est-elle surjective ?

2. On considère les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$u = (1,0,1),\ v = (0,1,0),\ w = (-1,0,1).$$

   (a) Montrer que $b' = (u,v,w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Soit $P = M_b^{b'}(Id_{\mathbb{R}^3})$ la matrice de passage de la base b à la base b'. Donner P et calculer P^{-1}.
   (c) Soit $A' = M_{b'}^{b'}(f)$ la matrice associée à f dans la base b'. Calculer A'.
   (d) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Soit $Y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. On veut résoudre le système linéaire

$$AX = Y \quad (X \in \mathbb{R}^3). \tag{1}$$

   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur Y pour que (1) ait des solutions.
   (b) Dans le cas où la condition de la question précédente est vérifiée, donner la solution générale du système (1).

Exercice 5 (1 point)

Soit E un espace vectoriel et f et g deux endomorphismes de E tels que $g \circ f = f \circ g$. Montrer que Ker$f$ et Imf sont stables par g, c.à.d.

$$\forall x \in \mathrm{Ker}f\,,\, g(x) \in \mathrm{Ker}f,$$
$$\forall y \in \mathrm{Im}f,\ g(y) \in \mathrm{Im}f.$$