Examen MAT201

15 mai 2017

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 2h

Exercice 1(Questions de cours, 3 points)

1. Enoncer le théorème du rang.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer en utilisant le théorème du rang que f est injective si et seulement si f est surjective.
3. Définir le rang d'une matrice.

Exercice 2 (Groupes, 2 points) Pour $\alpha \in \mathbb{R}^*$ on note

$$f_\alpha : \left\{ \begin{array}{rcl}]0,\infty[& \to &]0,\infty[\\ x & \mapsto & x^\alpha. \end{array} \right.$$

Soit

$$E := \{f_\alpha;\, \alpha \in \mathbb{R}^*\}.$$

1. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, f_α est une bijection de $]0,\infty[$ sur $]0,\infty[$.
2. Montrer que E muni de la loi de composition $\circ$ des fonctions est un groupe.

Exercice 3 (Géométrie dans $\mathbb{R}^3$, 6 points)
Soient

$$\begin{array}{rcl} F & := & \{v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 0\}, \quad G = \mathrm{Vect}(v_1), \\ v_1 & := & (1,0,0),\ v_2 = (1,1,0),\ v_3 = (1,1,1). \end{array}$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Quelle est l'interprétation géométrique de F et de G ?
2. Montrer que $((v_2, v_3))$ est une base de F et (v_1) une base de G.
3. Montrer que $b' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En déduire que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
4. Soit f la projection sur F parallèlement à G. Calculer la matrice représentatrice A de f dans la base b',
$$A = M_{b'}^{b'}(f).$$

T.S.V.P.

5. Soit b la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice de passage P de b à b',

$$P = M_b(b') = M_b^{b'}(Id_{\mathbb{R}^3}).$$

6. Calculer P^{-1}.

7. En déduire la matrice représentatrice A' de f dans la base b,

$$A' = M_b^b(f).$$

Exercice 4 (Dérivation de polynômes, 5 points)
On considère l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X]$ et l'application linéaire

$$d : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X], \\ P & \mapsto & P'. \end{array} \right.$$

1. Montrer que d est surjective, mais pas injective.

2. Expliquer pourquoi le résultat de la question 1. n'est pas en contradiction avec la question 2 de l'exercice 1.

3. On restreint maintenant d à l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à trois.

$$d_3 : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X], \\ P & \mapsto & P'. \end{array} \right.$$

   (a) Déterminer le noyau et l'image de d_3.
   (b) Montrer que $b = (1, X, \frac{X^2}{2}, \frac{X^3}{6})$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (c) Calculer la matrice $M_b^b(d_3)$ qui représente l'application d_3 dans la base b.

Exercice 5 (système linéaire, 2 points)
Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 2z & = & 1, \\ 2x + 3y + 3z & = & 1, \\ 3x + 4y + 5z & = & 2 + a \end{array} \right.$$

1. Montrer que le système admet des solutions si et seulement si $a = 0$.

2. Lorsque $a = 0$, déterminer l'ensemble des solutions.

Exercice 6 (Applications nilpotentes, 2 points)
Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que pour chaque $x \in E$ il existe un $n_x \in \mathbb{N}$ tel que $f^{n_x}(x) = 0$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n = 0$.