Université Grenoble-Alpes L1
Année universitaire 2016/2017

Examen MAT201

juin 2017

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits.
Dans la notation, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction et de la précision des justifications.
Durée : 2h

Exercice 1(Questions de cours, 5 points)

1. Donner la définition d'un morphisme de groupes, de son noyau et de son image.
2. Enoncer le théorème de d'Alembert-Gauss.
3. Soient E et F deux $\mathbb{R}-$ espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F. Enoncer le théorème du rang. Quelle inégalité entre $\dim E$ et $\dim F$ en déduit-on lorsque f est injective ? lorsque f est surjective ?
4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Définir pour une famille finie $(x_1, ..., x_p)$ les notions de libre et génératrice dans E.

Exercice 2 (Groupes, 3 points) Soient $f_i : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $i = 1, 2, 3, 4$ les fonctions

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = -x,\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = -\frac{1}{x}.$$

1. Calculer $(f_i \circ f_j)(x)$ pour $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$, $x \in \mathbb{R}^*$ (il suffit d'écrire la table de composition).
2. En déduire que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ muni de la composition des fonctions est un groupe.
3. Est-ce que le groupe est abélien ? Quel est l'élément inverse de f_i, $i \in \{1, 2, 3, 4\}$?

Exercice 3 (Géométrie dans $\mathbb{R}^3$, 6 points) On considère l'application linéaire

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3, \\ x & \mapsto & Ax \end{array} \right. , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $v_1 := (1, 0, 0)$, $v_2 := (1, 1, 0)$, $v_3 := (1, 1, 1)$, et

$$F := \{v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y = 0\}, \quad G := \mathrm{Vect}((1, 0, 0)).$$

1. Montrer que $f^2 = f$.
2. Montrer que

$$\mathrm{Im} f = F, \quad \mathrm{Ker} f = G.$$

En déduire que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$. T.S.V.P.

3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

4. Quelle est l'interprétation géométrique de f ?

5. Montrer que $b = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

6. Donner la matrice représentatrice de f dans la base b, $M_b^b(f)$. Justifier votre réponse.

Exercice 4 (Intégration de polynômes, 3 points)

On rappelle que pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur où égal à n. Pour un polynôme donné P on note $Int(P)$ le polynôme donné par

$$(Int(P))(x) = \int_0^x P(t)dt.$$

On considère ensuite l'application

$$Int : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_3[X], \\ P & \mapsto & Int(P). \end{array} \right.$$

1. Montrer que $b_3 = (1, X, \frac{X^2}{2}, \frac{X^3}{6})$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. En déduire que $b_2 = (1, X, \frac{X^2}{2})$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2. Calculer la matrice $M_{b_3}^{b_2}(Int)$ qui représente l'application Int dans les bases b_2 et b_3.

3. Calculer le noyau et l'image de Int.

Exercice 5 (système linéaire, 2 points)

Pour $a \in \mathbb{R}$ on considère le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 3x + y - z & = & 1, \\ x - 2y + 2z & = & a, \\ x + y - z & = & 1 \end{array} \right.$$

1. Montrer que le système admet des solutions si et seulement si $a = -2$.

2. Lorsque $a = -2$, déterminer l'ensemble des solutions.

Exercice 6 (Taille des sous-espaces vectoriels, 1 point)

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3. Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.