Université Grenoble Alpes 2020-2021
M1 Mathématiques générales

TD1 : rappels de calcul différentiel et d'équations différentielles

Exercice 1.

Pour toute fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2, on définit le laplacien de g par

$$\Delta g := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}.$$

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Montrer que, pour toute isométrie linéaire $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\Delta(f \circ A) = \Delta f \circ A.$$

Exercice 2.

Pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, on pose $f(M) = det\ M$.

1. *Montrer que f est de classe C^∞ et calculer df. Indication : on pourra d'abord calculer $df(I_n)$, puis $df(A)$ si A est inversible, et enfin traiter le cas général.*
2. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $A : I \to M_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. Soient $y_1, ..., y_n : I \to \mathbb{R}^n$ des solutions de $y'(t) = A(t)y(t)$ pour tout $t \in I$. On pose $w(t) := det(y_1(t), ..., y_n(t))$ pour tout $t \in I$.*
   (a) *Montrer que, pour tout $t \in I$, $w'(t) = (tr(A(t)))w(t)$.*
   (b) *Si A est constante, calculer $det(e^{tA})$.*

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on dit que x est un point critique de f si et seulement si $df(x)$ n'est pas inversible. On note C_f l'ensemble des points critiques de f. L'ensemble $f(C_f)$ est appelé ensemble des valeurs critiques de f et on pose

$$Reg\ f := \mathbb{R}^n \setminus f(C_f).$$

On notera qu'un élément de $Reg\ f$ n'est pas forcément une valeur prise par f.

1. *On suppose f de classe C^1 et que $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$. On note $X := Reg\ f$.*
   - (a) i. *Montrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(\{y\})$ est compact.*
     - ii. *Montrer que, pour tout $y \in X$, $f^{-1}(\{y\})$ est fini. On notera $n(y)$ le cardinal de cet ensemble.*
   - (b) *Vérifier que $\{y \in X;\ n(y) = 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
   - (c) *Soit $k \geq 1$ un entier.*
     - i. *Soit $y \in X$ tel que $n(y) = k$. Montrer l'existence d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et d'un ouvert V contenant y tels que $df(x)$ soit inversible pour tout $x \in U$ et, pour tout $y' \in V$, l'équation $f(x) = y'$ a exactement k solutions dans U.*
     - ii. *Soit $y \in X$ tel que $n(y) = k$. Montrer qu'il existe un ouvert W contenant y tel que, pour tout $y' \in W$, toutes les solutions de $f(x) = y'$ appartiennent à U.*
     - iii. *Déduire de ce qui précède que $\{y \in X;\ n(y) = k\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.*
   - (d) *Montrer que, si X est connexe, alors n est constante sur X.*
2. *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 telle que $\lim_{\|x\|\to+\infty} \|f(x)\| = +\infty$. On suppose $Reg\ f$ connexe et que $Reg\ f \cap f(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$. Montrer que f est surjective.*
3. *Soit P un polynôme sur $\mathbb{C}$ non constant. Déduire de ce qui précède que P est surjective.*

Exercice 4.

Soient $T > 0$ et $a, c, u : [0, T] \to \mathbb{R}$ des fonctions continues. On suppose que, pour tout $t \geq 0$, $a(t) \geq 0$ et

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau.$$

Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$u(t) \leq c(t) + \int_0^t c(\tau)a(\tau)\exp\left(\int_\tau^t a(s)ds\right)d\tau.$$

On pourra définir

$$v(t) := \int_0^t a(\tau)u(\tau)d\tau$$

et écrire une inégalité différentielle satisfaite par v.

Exercice 5.

On considère l'équation différentielle

$$u'(t) = (1 + \cos t)u(t) - (u(t))^3. \tag{1}$$

1. (a) *Soient $J \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $u : J \to \mathbb{R}$ une solution de (1). On suppose qu'il existe $s \in J$ tel que $u(s) = 0$. Déterminer u*
   (b) *Soient $u_0 > 0$ et u la solution maximale de (1) satisfaisant $u(0) = u_0$. On note J l'intervalle de définition de u. Montrer que, pour tout $t \in J$, avec $t \geq 0$,*
   $$0 < u(t) \leq u_0 e^{2t}.$$
   (c) *Montrer que toute solution maximale de (1) est définie au moins sur $[0, +\infty[$.*
2. *On note φ le flot de (1) en 0. Pour tout $v \geq 0$, on définit $p(v) := \varphi(2\pi, v)$ pour tout $v \geq 0$.*
   (a) *Calculer $p(0)$ et $p'(0)$.*
   (b) *Vérifier que p est solution d'une équation différentielle que l'on résoudra.*
   (c) *Montrer que (1) possède une solution 2π-périodique à valeurs strictement positives.*

Exercice 6.

1. *Soit* $u_0 \in \mathbb{R}$. *Déterminer l'intervalle de définition de la solution maximale de* $u'(t) = (u(t))^2$ *telle que* $u(0) = u_0$.
2. *Soient* J *un intervalle contenant* 0 *et* $v : J \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. On suppose que, pour tout* $t \in J$,
$$v(t) \leq \exp\left(\int_0^t v(\tau)d\tau\right).$$
Montrer que, pour tout $t \in J$ *avec* $t < 1$, $v(t) \leq \frac{1}{1-t}$.
3. *On considère l'équation*
$$u'(t) = (u(t))^2 + t^2. \tag{2}$$
Soit u *la solution maximale de* (2) *vérifiant* $u(0) = 0$. *On définit*
$$z(t) := \exp\left(-\int_0^t u(s)ds\right).$$
   (a) *Vérifier que* z *est solution d'une équation différentielle d'ordre* 2, *puis que* $z'(0) = z''(0) = z^{(3)}(0) = 0$.
   (b) *Chercher une solution de l'équation différentielle satisfaite par* z *sous forme d'une série entière, puis résoudre cette équation.*
   (c) *En déduire qu'il existe* $\tau > 2$ *tel que* u *soit définie sur* $]-\tau, \tau[$.

Exercice 7.

Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction continue. On suppose f globalement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable, au sens suivant : pour tout compact $K \subset I$, il existe $C > 0$ tel que, pour tout $t \in K$ et tous $u, v \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(t,v) - f(t,u)\| \leq C \|v - u\| .$$

Soient $t_0 \in I$ et $u_0 \in \mathbb{R}^n$. On veut montrer qu'il existe une unique solution $u \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ de

$$\begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) & \textit{pour tout } t \in I, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases} \tag{3}$$

1. *On suppose d'abord I compact. Soit E l'espace des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme*

   $$\|u\|_\infty := \sup_{t \in I} \|u(t)\| .$$

   On rappelle que E est complet pour cette norme. Pour toute fonction $u \in E$, on définit $F(u) : I \to \mathbb{R}^n$ par

   $$F(u)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s)) ds.$$

   (a) *Montrer que $u \mapsto N(u) := \sup_{t \in I} e^{-C|t-t_0|} \|u(t)\|$ est une norme sur E, et que, muni de cette norme, E est complet.*

   (b) *Vérifier que $F(u) \in E$ pour toute $u \in E$.*

   (c) *Vérifier que, pour toute $u \in E$, u est solution de (3) si et seulement si $F(u) = u$.*

   (d) *Montrer que F est contractante de E dans E pour la norme N.*

   (e) *Conclure.*

2. *Traiter le cas général pour I.*