Corrigé Examen MAT201 (16 mai 2018)

Exercice 1 (Questions de cours, 3 points)

1. $f : E \to F$ est linéaire si
$$\forall x, y \in E,\, \forall \alpha,\, \beta \in \mathbb{K} \quad f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$
Noyau : $\mathrm{Ker} f = \{x \in E;\, f(x) = 0_F\}$.

2. On note p_F la projection sur F parallèlement à G. Soit $x \in E$. Alors il existe $x_F \in F$ et $x_G \in G$ uniques tels que $x = x_F + x_G$. Par définition $p_F(x) = x_F$.

3. $\dim \mathcal{L}(E; F) = n \times p$. En effet d'après le cours $\mathcal{L}(E; F)$ est isomorphe à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, donc $\dim \mathcal{L}(E; F) = \dim \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

Exercice 2 (4 points)

1. On calcule d'abord pour $z \in \mathbb{C}$
$$f_\theta \circ f_{\theta'}(z) = f_\theta(e^{i\theta'} z) = e^{i\theta} e^{i\theta'} z = e^{i(\theta+\theta')} z,$$
donc
$$f_\theta \circ f_{\theta'} = f_{\theta+\theta'}. \tag{1}$$
$(G, \circ)$ est un groupe. En effet :
   (a) Grâce à (1), la loi est interne.
   (b) La composition d'applications est associative.
   (c) L'élélement neutre est donné par $f_0 = id_{\mathbb{C}}$. En effet pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f_0(z) = e^{i0} z = z$.
   (d) Tout $f_\theta \in G$ possède un inverse donné par $f_{-\theta}$,. En effet d'après (1) on a
$$f_\theta \circ f_{-\theta} = f_{-\theta} \circ f_\theta = f_0.$$
Enfin on constate qu'on a grâce à (1) $f_\theta \circ f_{\theta'} = f_{\theta+\theta'} = f_{\theta'+\theta} = f_{\theta'} \circ f_\theta$, la loi est donc commutative et le groupe abélien.

2. Utilisant (1) on voit qu'on a pour $\theta,\, \theta' \in \mathbb{R}$
$$\varphi(\theta + \theta') = f_{\theta+\theta'} = f_\theta \circ f_{\theta'} = \varphi(\theta) \circ \varphi(\theta'),$$
φ est donc un morphisme de groupes.

3. φ n'est pas injective puisque $\varphi(\theta + 2\pi) = \varphi(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$. En revanche φ est surjective par définition de G.

Exercice 3 (3 points)

1. On a
$$1 = P_0(X),\ X = \frac{1}{4}(P_2(X) - P_1(X)),\ X^2 = \frac{1}{2}(P_1(X) + P_2(X)) - P_0(X).$$

2. Comme $\dim \mathbb{R}_2[X] = 3$, il suffit de montrer que (P_0, P_1, P_3) est génératrice. $\text{Vect}(\{P_0, P_1, P_2\})$ contient $1, X, X^2$ d'après 1. et donc $\mathbb{R}_2[X]$ puisque $(1, X, X^2)$ est génératrice, comme base de $\mathbb{R}_2[X]$.

3. Nous montrons d'abord $\mathbb{R}_2[X] = F + G$. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Comme b est une base il existe $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ t.q.
$$P = (\alpha P_0 + \beta P_1) + (\gamma P_2).$$
La première parenthèse étant dans F et la deuxième dans G ceci montre le résultat. Montrons maintenant $F \cap G = \{0\}$. Soit $P \in F \cap G$. Il existe alors $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ t.q.
$$P = \alpha P_0 + \beta P_1 = \gamma P_2, \text{ donc } \alpha P_0 + \beta P_1 - \gamma P_2 = 0.$$
b étant une base il s'ensuit $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et donc $P = 0$.

4.
$$\mathcal{P}_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 (9 points)

1. (a)
$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) On a $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = -z$ et $y = 0$. Donc $\text{Ker}f = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. Comme Kerf $\neq \{0\}$, f n'est pas injective.

(c) On a
$$\text{Im}f = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$
On a $\dim \text{Ker}f = 1$, avec le théorème du rang il suit $\dim \text{Im}f = 2$. Les deux vecteurs $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ étant clairement linéairement indépendants, il suffit de montrer qu'ils sont dans $\text{Im}f$. On a
$$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
Comme $\text{Im}f \neq \mathbb{R}^3$, f n'est as surjective.

2. (a) Comme $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ il suffit de montrer que les trois vecteurs sont linéairement indépendants. Soient α, β, $\gamma \in \mathbb{R}$ et

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si l'on considère la deuxième ligne, on voit que $\beta = 0$. Il s'ensuit $\alpha = \gamma$ et $\alpha = -\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma = 0$.

(b) On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(c) On calcule $f(u) = u$, $f(v) = -v$, $f(w) = 0$, donc on a

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(d) On a $A^n = A$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ impair et $A^n = A^2$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ pair.
Preuve : On a $A = PA'P^{-1}$. Une récurrence simple montre que $A^n = P(A')^n P^{-1} = P\mathrm{diag}(1, (-1)^n, 0)P^{-1}$, ce qui donne le résultat en utilisant que $A^2 = P\mathrm{diag}(1, 1, 0)P^{-1}$.
On calcule ensuite

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

3. (a) En considérant la première et la troisième ligne on voit tout de suite que $y_1 = y_3$ est une condition nécessaire. La condition est également suffisante comme le démontre (b).

(b) Dans ce cas on a le système suivant :

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}(x_1 + x_3) & = & y_1, \\ -x_2 = y_2 & & \end{array}\right\} \Rightarrow x_2 = -y_2,\ x_1 = 2y_1 - x_3.$$

On trouve alors l'ensemble des solutions

$$S = \{(2y_1 - x_3, -y_2, x_3); x_3 \in \mathbb{R}\} = (2y_1, -y_2, 0) + \mathrm{Vect}((-1, 0, 1)).$$

En particulier la condition de (a) est également suffisante.

Exercice 5 (1 point)

1. Soit $x \in$ Kerf. On a $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0$, donc $g(x) \in \mathrm{Ker}f$.

2. Soit $y \in \mathrm{Im}f$ et $x \in E$ t.q. $y = f(x)$. Donc

$$g(y) = g(f(x)) = f(g(x)) \in \mathrm{Im}f.$$