

CALCULS DES NOMBRES D'INTERSECTION DANS L'ESPACE DE MODULES DES COURBES STABLES

JÉRÉMY GUÉRÉ, SOUS LA DIRECTION DE ALESSANDRO CHIDO

Mémoire de Master 2 de Paris 6

0. INTRODUCTION

Dans les années 1970, la physique théorique prend un nouveau visage. Dans sa tentative de grande unification, cette physique moderne, appelée théorie des cordes, a besoin de nouvelles dimensions d'espace-temps et de nouveaux degrés de liberté internes pour résoudre les divergences liées à la théorie de la gravitation au niveau quantique. L'espace-temps est remplacé par un espace à 10 dimensions, produit de l'espace-temps standard \mathbb{R}^4 dit de Minkowski et d'une variété de Calabi-Yau de dimension complexe 3. Les particules élémentaires ne sont plus ponctuelles mais sont des objets de dimension 1 : des *cordes*. Ainsi, les trajectoires de ces particules sont des surfaces plongées dans l'espace-temps. De nombreuses interactions entre cette nouvelle physique et les mathématiques ont vu le jour. La théorie de l'intersection en est un exemple important. Les intégrales des classes ψ_i sur l'espace de modules de courbes¹, présentées dans ce texte, peuvent s'interpréter en physique comme des fonctions de corrélation, c'est-à-dire des fonctions donnant la probabilité de passer d'un état initial donné à un état final donné.

Les idées et intuitions de la théorie des cordes ont joué le rôle de fil conducteur dans ce domaine des mathématiques. En 1991, Edward Witten [11] a conjecturé une formule de récurrence sur les intégrales des classes ψ_i (voir section 1.5) en remarquant que la fonction de partition² vérifie une dynamique de type Virasoro. Cette conjecture a été démontrée la même année par Maxim Kontsevich [8].

Date: 31 juillet 2014.

1. Il s'agit de courbes complexes, c'est-à-dire de surfaces de Riemann. Se reporter à l'annexe pour des précisions sur les définitions.

2. La fonction de partition est une série qui fait intervenir toutes les intégrales des classes ψ_i sur tous les espaces de courbes. Il s'agit donc d'un point de vue global et générique sur les espaces de courbes et non de s'intéresser aux particularités de chaque espace.

Auparavant, en 1969, Pierre Deligne et David Mumford [10] avait donné un sens à ces intégrales en définissant correctement l'espace de modules des courbes stables et en y définissant les classes cohomologiques ψ_i et λ_k . David Mumford avait ensuite montré comment éliminer toutes les classes λ_k de ces intégrales, de sorte à n'avoir plus que des intégrales sur les classes ψ_i . L'objet de ce mémoire est de décrire une méthode de calcul générale pour les intégrales faisant intervenir les classes ψ_i et λ_k . A la fin de notre étude, nous serons en mesure d'écrire un programme informatique pour calculer ces nombres récursivement. Nous en resterons là pour ce mémoire mais tout ceci n'est que le début d'une longue histoire.

Elargissement et projet de thèse. L'espace de modules des courbes stables est un cas particulier de l'espace classifiant tous les morphismes allant d'une surface de Riemann quelconque vers une variété complexe compacte X donnée. Nous prenons en général X de Calabi-Yau. Ce qui précède est donc le cas particulier pour lequel X est un point. Le cas où X est de dimension 3 est en rapport direct avec la théorie des cordes. Sur ce nouvel espace de module, nous pouvons encore définir des classes ψ_i et des intégrales du même type que précédemment. Ces intégrales sont des invariants géométriques de la variété X . Ils sont appelés *invariants de Gromov-Witten*. Cette théorie de Gromov-Witten fait l'objet de recherches très actives depuis deux décennies. Entre autres, elle a permis de mettre en évidence une nouvelle structure de produit sur l'anneau de cohomologie de X , appelée *produit quantique* et dont la définition fait appel directement aux invariants de Gromov-Witten de X . Par-ailleurs, un phénomène de dualité connu sous le nom de symétrie miroir a permis de décrire complètement ce produit quantique.

Ce phénomène a été découvert par les physiciens comme une dualité entre deux modèles de la théorie des cordes. En mathématiques, il prévoit pour X de Calabi-Yau l'existence d'une variété miroir X^\vee , avec la propriété que les déformations de la structure complexe de l'une sont en correspondance avec les déformations de la structure de Kähler de l'autre. Au niveau cohomologique, nous devons avoir les relations $h^{p,q}(X) = h^{n-p,q}(X^\vee)$, avec n la dimension complexe de X . C'est ce qui est appelé *symétrie miroir cohomologique*. Récemment, un nouvel énoncé de symétrie miroir, dite *globale*, a été mis en évidence sur la quintique de $\mathbb{C}P^4$ par Alessandro Chiodo et Yong-Bin Ruan [2]. Il s'agit d'une vision d'ensemble de la symétrie miroir qui relie les invariants de Gromov-Witten de la variété et du miroir, ainsi que la théorie générale des espaces de modules des morphismes à une autre théorie d'espace de modules, introduite sous le nom de modèle de Landau-Ginzburg.

Pour le moment, le calcul des invariants de Gromov-Witten dans le cas général est largement incomplet. En genre 0, il existe des résultats mais au-delà du genre 52, il n'y a plus aucune prédiction. Une des difficultés majeures réside dans la détermination d'une classe d'homologie de l'espace de modules des morphismes, appelée la classe virtuelle. Elle possède des propriétés similaires à une classe fondamentale et elle la remplace dans les cas où l'espace de modules n'est pas de dimension constante. Cette classe est nécessaire dans la définition des intégrales de Gromov-Witten et rend pour l'instant impossible leur calcul.

L'idée a été suggérée par Witten de s'intéresser à un autre espace de module qui classifie des fibrés en droites sur les surfaces de Riemann satisfaisant certaines relations algébriques. Ceci a donné naissance au modèle de Landau-Ginzburg. Partant d'un polynôme quasi-homogène dans un espace projectif à poids, nous notons X l'hypersurface définie par le lieu des zéros et nous regardons le modèle de Landau-Ginzburg associé à ce polynôme. Dans cette théorie, nous pouvons encore définir des classes ψ_i et des invariants de type Gromov-Witten. Récemment, des conjectures sur une dualité entre les invariants donnés par le modèle de Landau-Ginzburg, appelés *invariants de Fan-Jarvis-Ruan-Witten*, et ceux donnés par la théorie de Gromov-Witten ont été mises en évidence sur l'exemple de la quintique par Alessandro Chiodo et Yong-Bin Ruan [2].

Dans le modèle de Landau-Ginzburg, des classes virtuelles apparaissent aussi dans l'expression des intégrales, mais nous espérons tout de même que les calculs qui en résultent seront plus simples à réaliser. Mon **projet de thèse** sera tout d'abord de comprendre la classe virtuelle pour un polynôme particulier et de fournir une méthode de calcul pour les invariants, en s'inspirant de celle qui est présentée dans ce texte.

Le calcul des invariants de Gromov-Witten se fera peut-être à travers celui des invariants de de Fan-Jarvis-Ruan-Witten. Cependant, l'étude de cette dualité et son importance au sein de la symétrie miroir globale en font un sujet de recherche fondamentale dont la portée ira peut-être au-delà des mathématiques.

TABLE DES MATIÈRES

0. Introduction	1
1. Certains invariants de Gromov-Witten	5
1.1. Une approche récursive	6
1.2. Les classes de Chern en fonction des caractères de Chern	7
1.3. Les caractères de Chern en fonction des classes psi	9
1.4. Comportement des caractères de Chern et des classes psi sous les morphismes d'oubli et de recollement	15
1.5. Récurrences sur les invariants n'ayant que des classes psi	20
2. Un exemple de calcul	25
2.1. Présentation des méthodes	25
2.2. Calcul sur les classes psi	25
2.3. Méthode sioux	26
2.4. Méthode récursive	27
3. Détail du programme informatique	33
3.1. Calcul en fonction des caractères de Chern	33
3.2. Programmes auxiliaires	35
3.3. Calcul en fonction des classes de Chern	37
Annexe A. Guide de l'espace de modules des courbes stables	40
A.1. Les courbes lisses :	40
A.2. Les courbes nodales et les courbes stables :	41
A.3. Le morphisme d'oubli :	42
A.4. Les morphismes de recollement :	43
A.5. Quelques mots sur l'anneau des classes tautologiques :	44
A.6. Certaines classes tautologiques et leurs relations :	45
Références	48

1. CERTAINS INVARIANTS DE GROMOV-WITTEN

L'objectif de ce texte est de calculer explicitement certains nombres d'intersection de l'espace de modules de courbes stables. Dans ce texte, nous travaillons avec le corps \mathbb{C} . Cet espace de modules classe donc des surfaces de Riemann stables, la notion de stabilité est expliquée dans l'annexe. L'idée est d'élargir la notion de surface de Riemann afin de rendre l'espace classifiant compact. A partir de maintenant, nous utiliserons la dénomination courbe pour parler des surfaces de Riemann. Quand aux invariants de Gromov-Witten, ce sont des nombres rationnels définis par des intégrales de certaines classes de cohomologie sur l'espace de modules. L'appellation « invariant » prend son sens surtout lorsque nous considérons le cas général de l'espace de modules des applications stables (cf. 0). Nous détaillons ci-dessous de quelles intégrales nous parlons.

L'espace des courbes stables de genre g à n points marqués est noté $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. Il possède un espace universel $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$ dont les points sont des couples $([C], x)$ avec $[C]$ le point de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ qui représente la courbe C et $x \in C$. Nous avons un morphisme canonique

$$\pi: \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$$

appelé morphisme de projection, ainsi que n sections de ce morphisme

$$\sigma_i: \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

correspondant aux marquages des points.

Le faisceau relatif cotangent ω_π est un fibré en droites sur $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$. D'une part, pour $1 \leq i \leq n$, le tiré en arrière $\sigma_i^*(\omega_\pi)$ est un fibré en droites sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. En prenant la première classe de Chern de ce fibré, ceci nous fournit n classes de cohomologie

$$\psi_i = c_1(\sigma_i^*(\omega_\pi)) \in H^2(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

D'autre part, le faisceau $\pi_*(\omega_\pi)$ est en fait un fibré vectoriel de rang g sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, appelé fibré de Hodge (cf. annexe pour plus de détails). Ceci nous fournit g classes de cohomologie

$$\lambda_k = c_k(\pi_*(\omega_\pi)) \in H^{2k}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}, \mathbb{Q}) \quad \forall k \in \{1, \dots, g\}.$$

Ces deux types de classes de cohomologie interviennent dans les intégrales que nous voulons calculer.

Plus précisément, nous posons

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \lambda_1^{b_1} \dots \lambda_g^{b_g} \in \mathbb{Q}$$

pour tous entiers $g, n, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_g$ vérifiant $2g - 2 + n > 0$, c'est-à-dire

$$(g, n) \neq (0, 0) \quad , \quad (0, 1) \quad , \quad (0, 2) \quad , \quad (1, 0).$$

Par ailleurs, puisque l'espace $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ est de dimension $3g - 3 + n$ (cf. annexe), le nombre à calculer vaut 0 dès que la condition suivante n'est pas respectée

$$(1) \quad a_1 + \dots + a_n + b_1 + \dots + g \cdot b_g = 3g - 3 + n.$$

Enfin, nous écrirons parfois ces intégrales sous la notation

$$\langle \psi(a_1, \dots, a_n), \lambda(b_1, \dots, b_g) \rangle_{g,n}.$$

De même, nous utiliserons aussi la notation

$$\langle \psi(a_1, \dots, a_n), \text{ch}(b_1, \dots, b_s) \rangle_{g,n}$$

pour parler de l'intégrale

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \text{ch}_1^{b_1} \dots \text{ch}_s^{b_s}.$$

1.1. Une approche récursive. Nous allons utiliser les relations entre les espaces $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ pour différentes valeurs de g et de n pour décomposer le calcul en sous-calculs du même type et le résoudre de façon récursive. Nous pourrons ensuite écrire un programme informatique qui calcule tous ces invariants. C'est l'objet de la partie (3).

- (1) Tout d'abord, nous exprimons notre invariant en fonction des caractères de Chern au lieu des classes de Chern.
- (2) Ensuite, grâce au théorème de Grothendieck-Riemann-Roch, nous calculons les caractères $\text{ch}_d(\Lambda)$ à l'aide des seules classes ψ_i , ce qui nous permet d'éliminer peu à peu tous les caractères.
- (3) Enfin, nous disposerons de formules de récurrence données par la conjecture de Witten, résolue par Kontsevich dans [8].

Le plan est donc le suivant

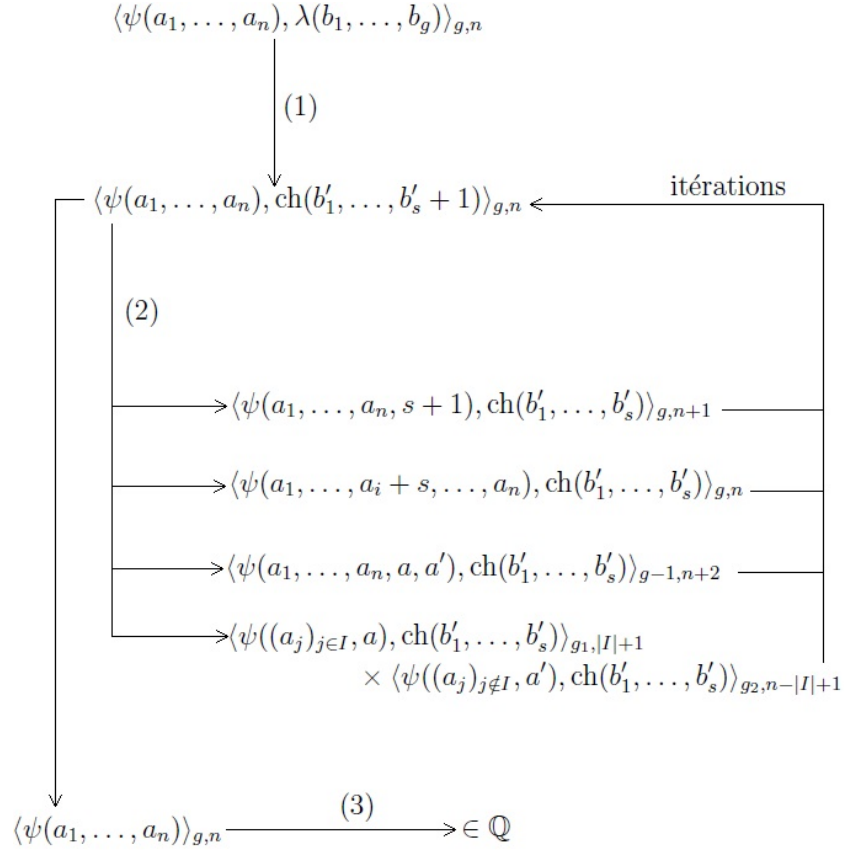


FIGURE 1. Schéma des étapes de calcul

1.2. Les classes de Chern en fonction des caractères de Chern.

Rappelons brièvement les définitions des classes de Chern, des caractères de Chern et des classes de Todd. Un fibré vectoriel E de rang k peut toujours s'écrire en K-théorie comme une somme de fibrés en droites L_1, \dots, L_k [12]. A cette décomposition, nous associons les premières classes de Chern des fibrés L_i , que nous notons r_i . Elles sont appelées racines du fibré vectoriel E relatives à la décomposition L_1, \dots, L_r . La classe totale de Chern est définie par la formule

$$(2) \quad c(E) = \prod_{i=1}^k (1 + r_i).$$

La i^{e} classe de Chern est la composante de degré i de la classe totale. La classe de Todd est définie par

$$(3) \quad \text{Td}(E) = \prod_{i=1}^k \frac{r_i}{1 - e^{-r_i}}.$$

Enfin, le caractère de Chern est défini par

$$(4) \quad \text{ch}(E) = \sum_{i=1}^k e^{r_i}.$$

Les définitions précédentes ne dépendent pas de la décomposition du fibré E .

La première étape de notre programme, réexprimer notre intégrale en fonction des caractères de Chern au lieu des classes de Chern, fait l'objet du théorème suivant

Théorème 1.2.1. *Pour un fibré vectoriel E de rang k sur une variété de dimension m , nous avons*

$$1 + c_1(E) + \cdots + c_k(E) = \exp(\text{ch}_1(E) - \text{ch}_2(E) + 2! \cdot \text{ch}_3(E) + \cdots \\ \cdots + (-1)^{m-1} (m-1)! \cdot \text{ch}_m(E)).$$

Démonstration. Prenons une décomposition du fibré vectoriel E en fibrés en droites et notons r_1, \dots, r_k les racines du fibré E relatives à cette décomposition, de sorte que

$$(5) \quad c(E) = \prod_{i=1}^k (1 + r_i) \quad \text{ch}(E) = \sum_{i=1}^k e^{r_i}.$$

D'une part, nous avons

$$\begin{aligned} \ln(1 + c_1(E) + \cdots + c_k(E)) &= \ln(c(E)) \\ &= \sum_{i=1}^k \ln(1 + r_i) \\ &= \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{r_i^{m+1}}{m+1}. \end{aligned}$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} \text{ch}_1(E) - \text{ch}_2(E) + 2! \cdot \text{ch}_3(E) + \cdots + (-1)^{m-1}(m-1)! \cdot \text{ch}_m(E) &= \\ \sum_{i=1}^k r_i - \frac{r_i^2}{2!} + 2! \cdot \frac{r_i^3}{3!} + \cdots + (-1)^{m-1}(m-1)! \cdot \frac{r_m}{m!} &= \\ \sum_{i=1}^k \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{r_i^{m+1}}{m+1}. \end{aligned}$$

L'égalité des deux séries termine la preuve. \square

Regardons les premiers exemples de (1.2.1) :

$$\begin{aligned} c_1(E) &= \text{ch}_1(E) \\ c_2(E) &= \frac{\text{ch}_1(E)^2}{2} - \text{ch}_2(E) \\ c_3(E) &= \frac{\text{ch}_1(E)^3}{6} - \text{ch}_1(E)\text{ch}_2(E) + \frac{\text{ch}_3(E)}{2} \\ &\dots \end{aligned}$$

Remarque. Ce théorème nous permet d'effectuer la première étape.

$$\langle \psi(a_1, \dots, a_n), \lambda(b_1, \dots, b_g) \rangle_{g,n}$$

devient une combinaison linéaire de termes du type

$$\langle \psi(a_1, \dots, a_n), \text{ch}(b'_1, \dots, b'_s) \rangle_{g,n}.$$

1.3. Les caractères de Chern en fonction des classes psi. Nous passons maintenant à la deuxième étape. Il s'agit d'appliquer le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch au morphisme de projection $\pi: \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ et à son fibré cotangent relatif $\omega_\pi \rightarrow \overline{\mathcal{C}}_{g,n}$, dans le but de réexprimer les caractères de Chern du fibré de Hodge en fonction des classes ψ_i . Ce théorème est encore vrai pour $\overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ même si ce ne sont pas des variétés algébriques³ [10].

3. En fait, ce théorème reste vrai pour les morphismes entre champs lorsque les fibres sont des variétés algébriques, ce qui est bien le cas ici puisqu'il s'agit de courbes complexes. Dans le modèle de Landau-Ginzburg, nous aurons à travailler avec des espaces qui classifient des champs. Il faudra penser à adapter le théorème en conséquence.

Théorème 1.3.1. *Les caractères de Chern du fibré de Hodge sont*⁴

$$\begin{aligned} \text{ch}_k(\Lambda) &= \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} (\pi)_* (\psi_{n+1}^{k+1}) \\ &\quad - \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \sum_{i=1}^n \psi_i^k \\ &\quad + \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \frac{1}{2} \left(j_{g,n}^{\text{boucle}} \right)_* \left(\sum_{a+a'=k-1} \psi_{n+1}^a (-\psi_{n+2})^{a'} \right) \\ &\quad + \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} \frac{1}{2} \sum_{\substack{g_1+g_2=g \\ I \subset \mathbb{N}_n}} \left(j_{(g_1,g_2),n,I}^{\text{arbre}} \right)_* \left(\sum_{a+a'=k-1} \psi_\alpha^a (-\psi_\beta)^{a'} \right) \end{aligned}$$

où les B_m sont les nombres de Bernouilli définis par

$$(6) \quad \frac{x}{1-e^{-x}} = \sum_{m \geq 0} B_m \frac{x^m}{m!}.$$

En particulier, nous remarquons que $\text{ch}_0(\Lambda) = g-1$ et que tout caractère de Chern de Λ de degré pair strictement positif est nul⁵.

Démonstration. L'ingrédient principal est la formule de Grothendieck-Riemann-Roch appliquée à $\omega_\pi \rightarrow \overline{\mathcal{C}}_{g,n}$ et à $\pi: \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, ce qui donne

$$(7) \quad \text{ch}(R\pi_*(\omega_\pi)) = \pi_*(\text{ch}(\omega_\pi)\text{Td}(\pi)).$$

- Le côté gauche est facile à exprimer. En effet, ω_π est un fibré vectoriel donc la fibre de $R^i\pi_*(\omega_\pi)$ au-dessus d'un point $[C]$ est donnée par $H^i(C, T^\vee C)$, nul pour $i \geq 2$ et trivial pour $i = 1$ (dualité de Serre) (1.3). Nous vérifions au passage que le fibré de Hodge Λ défini par $R^0\pi_*(\omega_\pi)$ est bien un fibré vectoriel puisque sa dimension est constante. Il est de rang g . Nous trouvons ainsi la relation

$$\text{ch}(R\pi_*(\omega_\pi)) = \text{ch}(\Lambda) - 1.$$

- Le côté droit est plus délicat. Nous avons $\text{ch}(\omega_\pi) = e^{c_1(\omega_{g,n})}$ mais il nous reste à calculer $\text{Td}(\pi) = \frac{\text{Td}(\overline{\mathcal{C}}_{g,n})}{\pi^*(\text{Td}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n}))}$.

4. Les notations utilisées pour les morphismes sont celles de l'annexe. Ainsi, $p_{g,n}$ est le morphisme d'oubli, j_{boucle} et j_{arbre} les morphismes de recollement.

5. Nous avons tout simplement $B_k = 0$ pour tout k impair et différent de 1.

Le deuxième ingrédient est la suite exacte conormale sur $\bar{\mathcal{C}}_{g,n}$ qui, en présence de singularités, s'exprime ainsi [10] :

$$(8) \quad 0 \rightarrow \pi^*(T^\vee \overline{\mathcal{M}}_{g,n}) \rightarrow T^\vee \bar{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \omega_\pi \rightarrow \mathcal{O}_{|\Delta} \otimes \omega_{\pi|_\Delta} \rightarrow 0$$

avec Δ le lieu des noeuds dans $\bar{\mathcal{C}}_{g,n}$. Remarquons que pour passer de $\text{Td}(E^\vee)$ à $\text{Td}(E)$, pour un fibré vectoriel E quelconque, il suffit de changer le signe des termes de degré impair. Nous sommes ramener à calculer

$$\frac{\text{Td}(\omega_\pi)}{\text{Td}(\mathcal{O}_{|\Delta})\text{Td}(\omega_{\pi|_\Delta})}.$$

Nous avons déjà $\text{Td}(\omega_{\pi|_\Delta}) = 1$ d'après le résultat (5) démontré dans l'annexe.

Le troisième ingrédient est la résolution de Koszul [3]. \mathcal{O}_Δ est un faisceau sur Δ et $\mathcal{O}_{|\Delta} = \iota_{1*}\mathcal{O}_\Delta$, avec $\Delta \xrightarrow{\iota_1} \bar{\mathcal{C}}_{g,n}$, est un faisceau sur $\bar{\mathcal{C}}_{g,n}$ qui n'est supporté que sur Δ . Considérons le revêtement étale double $\tilde{\Delta} \xrightarrow{j} \Delta$ introduit dans l'annexe (A.4). Le faisceau normal $N_{\iota_1 \circ j}$ est en fait un fibré vectoriel sur $\tilde{\Delta}$ puisque ι_1 est un plongement et j est étale. Nous notons ce fibré \tilde{N} , par la projection sur $\tilde{\Delta}$ et ι_2 le plongement de $\tilde{\Delta}$ dans \tilde{N} . Enfin, nous tirons ce fibré en arrière par pr pour en faire un fibré sur \tilde{N} . Le diagramme suivant résume la situation

$$\begin{array}{ccccc} \text{pr}^* \tilde{N} & & \tilde{N} & & \\ \downarrow & & \downarrow \text{pr} & & \\ \tilde{N} & \xrightarrow{\text{pr}} & \tilde{\Delta} & \xrightarrow{j} & \Delta \xrightarrow{\iota_1} \bar{\mathcal{C}}_{g,n} \\ & \nwarrow \text{pr} & \nwarrow \iota_2 & & \end{array}$$

Alors, la résolution de Koszul est la suite exacte sur \tilde{N}

$$(9) \quad 0 \rightarrow \Lambda^2(\text{pr}^* \tilde{N})^\vee \rightarrow (\text{pr}^* \tilde{N})^\vee \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{N}} \rightarrow \iota_{2*}\mathcal{O}_{\tilde{\Delta}} \rightarrow 0.$$

Remarquons que le fibré vectoriel \tilde{N} sur $\tilde{\Delta}$ est scindé en deux fibrés en droites, $\tilde{N} = L_1 \oplus L_2$, et sous l'identification (4) nous avons $c_1(L_1) = \psi_\alpha$ et $c_1(L_2) = \psi_\beta$. Nous pouvons donc exprimer les classes de Todd des termes de la suite exacte comme

$$\begin{aligned}
\mathrm{Td}(\mathcal{O}_{\tilde{N}}) &= 1 \\
\mathrm{Td}(\tilde{N}^\vee) &= \frac{\psi_\alpha}{1 - e^{-\psi_\alpha}} \frac{\psi_\beta}{1 - e^{-\psi_\beta}} \\
\mathrm{Td}(\Lambda^2 \tilde{N}^\vee) &= \frac{1 - e^{-(\psi_\alpha + \psi_\beta)}}{\psi_\alpha + \psi_\beta}
\end{aligned}$$

si bien que, dans la cohomologie de \tilde{N} ,

$$\frac{1}{\mathrm{Td}(\iota_{2*} \mathcal{O}_{\tilde{\Delta}})} = \mathrm{pr}^* \left(\frac{\mathrm{Td}(N^\vee)}{\mathrm{Td}(\Lambda^2 N^\vee)} \right) = \mathrm{pr}^* \left(\frac{\psi_\alpha}{1 - e^{-\psi_\alpha}} \frac{\psi_\beta}{1 - e^{-\psi_\beta}} \frac{1 - e^{-(\psi_\alpha + \psi_\beta)}}{\psi_\alpha + \psi_\beta} \right).$$

Lorsque nous tirons en arrière cette expression par ι_2 , nous avons d'un côté $\mathrm{Td}(\iota_2^* \iota_{2*} \mathcal{O}_{\tilde{\Delta}}) = \mathrm{Td}(j^* \iota_1^* \iota_{1*} \mathcal{O}_\Delta)$ en raison de l'invariance topologique de la classe de Todd⁶ et de l'autre côté $\iota_2^* \mathrm{pr}^* = \mathrm{id}^*$. Nous obtenons alors dans la cohomologie de $\tilde{\Delta}$

$$j^* \iota_1^* \left(\frac{1}{\mathrm{Td}(\iota_{1*} \mathcal{O}_\Delta)} \right) = \frac{\psi_\alpha}{1 - e^{-\psi_\alpha}} \frac{\psi_\beta}{1 - e^{-\psi_\beta}} \frac{1 - e^{-(\psi_\alpha + \psi_\beta)}}{\psi_\alpha + \psi_\beta}.$$

Réexprimons ce résultat grâce aux nombres de Bernoulli, toujours dans la cohomologie de $\tilde{\Delta}$,

$$\begin{aligned}
j^* \iota_1^* \left(\frac{1}{\mathrm{Td}(\iota_{1*} \mathcal{O}_\Delta)} \right) &= \frac{\psi_\alpha \psi_\beta}{\psi_\alpha + \psi_\beta} \frac{1 - e^{-(\psi_\alpha + \psi_\beta)}}{(1 - e^{-\psi_\alpha})(1 - e^{-\psi_\beta})} \\
&= \frac{\psi_\alpha \psi_\beta}{\psi_\alpha + \psi_\beta} \frac{1 - e^{-\psi_\alpha} + e^{-\psi_\alpha} - e^{-(\psi_\alpha + \psi_\beta)}}{(1 - e^{-\psi_\alpha})(1 - e^{-\psi_\beta})} \\
&= \frac{\psi_\alpha \psi_\beta}{\psi_\alpha + \psi_\beta} \left(\frac{1}{1 - e^{-\psi_\beta}} + \frac{e^{-\psi_\alpha}}{1 - e^{-\psi_\alpha}} \right) \\
&= \frac{\psi_\alpha \psi_\beta}{\psi_\alpha + \psi_\beta} \left(\frac{1}{1 - e^{-\psi_\beta}} + \frac{1}{1 - e^{-\psi_\alpha}} - 1 \right) \\
&= 1 + \psi_\alpha \psi_\beta \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{\psi_\alpha^{2k-1} + \psi_\beta^{2k-1}}{\psi_\alpha + \psi_\beta}.
\end{aligned}$$

Nous avons la relation $\psi_\alpha \psi_\beta = j^* \iota_1^*(\Delta)$ qui vient du fait que $\Delta = c_2(N_{\iota_1})$ dans la cohomologie de $\bar{\mathcal{C}}_{g,n}$. Nous en sommes à

$$j^* \iota_1^* \left(\frac{1}{\mathrm{Td} \iota_{1*} \mathcal{O}_\Delta} - 1 \right) = j^* \iota_1^*(\Delta) \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{\psi_\alpha^{2k-1} + \psi_\beta^{2k-1}}{\psi_\alpha + \psi_\beta}$$

6. La classe de Todd est un invariant topologique donc elle ne dépend pas du plongement de $\tilde{\Delta}$ dans \tilde{N} ou dans $\bar{\mathcal{C}}_{g,n}$; propriété qui se traduit par la formule énoncée.

donc en prenant l'image directe par $\iota_1 \circ j$ et en remarquant que $\iota_{1*} j_*(\mathbf{1}) = 2 \cdot \Delta$, nous obtenons

$$2 \cdot \Delta \cdot \left(\frac{1}{\text{Td}_{\iota_{1*} \mathcal{O}_\Delta}} - 1 \right) = \Delta \cdot \iota_{1*} j_* \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{\psi_\alpha^{2k-1} + \psi_\beta^{2k-1}}{\psi_\alpha + \psi_\beta}.$$

Un fait important est que $(\text{Td}_{\iota_{1*} \mathcal{O}_\Delta})^{-1} - 1$ n'a pas de composante de degré 0 et que toutes ses composantes sont supportées sur Δ dans $\bar{\mathcal{C}}_{g,n}$. De l'autre côté, nous avons un terme qui est une image directe par $\iota_{1*} j_*$ et qui est donc également supporté sur Δ .

Ceci nous permet d'écrire

$$\frac{1}{\text{Td}_{\iota_{1*} \mathcal{O}_\Delta}} = 1 + \frac{1}{2} \iota_{1*} j_* \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{\psi_\alpha^{2k-1} + \psi_\beta^{2k-1}}{\psi_\alpha + \psi_\beta}.$$

Nous sommes à présent en mesure de regrouper les termes et de finir le calcul de cette démonstration

$$\begin{aligned} \text{ch}(\omega_\pi) \frac{\text{Td}(\bar{\mathcal{C}}_{g,n})}{\pi^*(\text{Td}(\mathcal{M}_{g,n}))} &= \text{ch}(\omega_\pi) \frac{\text{Td}(\omega_\pi^\vee)}{\text{Td}(\mathcal{O}_\Delta^\vee)} \\ &= e^{c_1(\omega_\pi)} \frac{c_1(\omega_\pi)}{e^{c_1(\omega_\pi)} - 1} \left(1 + \frac{1}{2} \iota_{1*} j_* \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{\psi_\alpha^{2k-1} + \psi_\beta^{2k-1}}{\psi_\alpha + \psi_\beta} \right) \\ &= \frac{c_1(\omega_\pi)}{1 - e^{-c_1(\omega_\pi)}} \left(1 + \frac{1}{2} \iota_{1*} j_* \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{\psi_\alpha^{2k-1} + \psi_\beta^{2k-1}}{\psi_\alpha + \psi_\beta} \right) \\ &\stackrel{(28)}{=} 1 + \frac{c_1(\omega_\pi)}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(c_1(\omega_\pi)^{2k} + \frac{1}{2} \iota_{1*} j_* \frac{\psi_\alpha^{2k-1} + \psi_\beta^{2k-1}}{\psi_\alpha + \psi_\beta} \right) \\ &\stackrel{(29)}{=} 1 + \frac{c_1(\omega_\pi)}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left((\psi_{n+1} - \sum_{i=1}^n \delta(i, n+1))^{2k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \iota_{1*} j_* \sum_{a+a'=2k-2} \psi_\alpha^a (-\psi_\beta^{a'}) \right) \\ &\stackrel{(31)}{=} 1 + \frac{c_1(\omega_\pi)}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(\psi_{n+1}^{2k} + \sum_{i=1}^n \delta(i, n+1)^{2k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \iota_{1*} j_* \sum_{a+a'=2k-2} \psi_\alpha^a (-\psi_\beta^{a'}) \right) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (28) conjointement avec le fait que l'image par $\iota_1 \circ j$ est dans Δ . Il ne reste plus qu'à prendre l'image directe de cette expression par π

$$\begin{aligned} \text{ch}(\Lambda) &= 1 + \frac{\pi_*(c_1(\omega_\pi))}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \pi_* \left(\psi_{n+1}^{2k} + \sum_{i=1}^n \delta(i, n+1)^{2k} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \iota_{1*} j_* \sum_{a+a'=2k-2} \psi_\alpha^a (-\psi_\beta^{a'}) \right) \\ &= 1 + \frac{2g-2+n-n}{2} + \sum_{k \geq 1} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \left(\pi_*(\psi_{n+1}^{2k}) - \sum_{i=1}^n \psi_i^{2k-1} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} (\pi \circ \iota_1 \circ j)_* \left(\sum_{a+a'=2k-2} \psi_\alpha^a (-\psi_\beta^{a'}) \right) \right) \end{aligned}$$

où à la dernière ligne nous avons utilisé (34). Pour terminer la preuve, nous utilisons (4) et (1.3) qui nous dit que le fibré Λ est de rang g et

donc que $\text{ch}_0(\Lambda) = g$. Nous remarquons au passage que

$$(10) \quad \pi_*(c_1(\omega_\pi)) = 2g - 2.$$

□

Nous remarquons que les quatre types de termes intervenant dans (1.3.1) proviennent

- de la courbe universelle $\bar{\mathcal{C}}_{g,n} \stackrel{\text{annexe(2)}}{=} \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ ⁷
- de l'espace de module $\bar{\mathcal{M}}_{g,n}$
- du terme de bord $\bar{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}$
- des autres termes de bord $\bar{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+1} \times \bar{\mathcal{M}}_{g_2,n-|I|+1}$

Nous remarquons aussi l'absence de caractères de degré pair, d'où

$$(11) \quad \int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \text{ch}_{i_1}(\Lambda) \dots \text{ch}_{i_m}(\Lambda) = 0$$

dès qu'il existe k pour lequel i_k est pair. Enfin, les nombres de Bernoulli, définis par (6), seront sans cesse présents lors d'utilisations futures de Grothendieck-Riemann-Roch pour les généralisations à la théorie de Gromov-Witten et au modèle de Landau-Ginzburg.

D'après le théorème et les remarques précédentes, pour tout $s \leq (g+1)/2$, nous pouvons réécrire

$$\int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b_{2s-1}} \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)$$

sous la forme d'une combinaison linéaire des termes suivants

- $\int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}} p_*(\psi_{n+1}^{2s} p^*(\psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b'_{2s-1}}))$
- $\int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_i^{2s-1} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b'_{2s-1}}$
- $\int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}} j_{\text{boucle}*}(\psi_{n+1}^a \psi_{n+2}^{a'} j_{\text{boucle}}^*(\psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b'_{2s-1}}))$
- $\int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}} j_{\text{arbre}*}(\psi_\alpha^a \psi_\beta^{a'} j_{\text{arbre}}^*(\psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b'_{2s-1}}))$

qui eux-même se réécrivent sous la forme

- $\int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \psi_{n+1}^{2s} p^*(\psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b'_{2s-1}})$
- $\int_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_i^{2s-1} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b'_{2s-1}}$
- $\int_{\bar{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}} \psi_{n+1}^a \psi_{n+2}^{a'} j_{\text{boucle}}^*(\psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b'_{2s-1}})$
- $\int_{\bar{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+1} \times \bar{\mathcal{M}}_{g_2,n-|I|+1}} \psi_\alpha^a \psi_\beta^{a'} j_{\text{arbre}}^*(\psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b'_{2s-1}}).$

7. Le diagramme (2) de l'annexe nous permet non seulement d'identifier ces deux espaces mais aussi de confondre les morphismes de projection π et d'oubli $p_{g,n}$.

1.4. Comportement des caractères de Chern et des classes psi sous les morphismes d'oubli et de recollement. Afin de soulager les notations, nous faisons les changements suivants dans les démonstrations de cette sous-section :

ancienne notation	nouvelle notation
$\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$	\mathcal{M}
$\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$	\mathcal{M}'
$\overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}$	\mathcal{M}_b
$\overline{\mathcal{M}}_{g_1, I +1}$	\mathcal{M}_1
$\overline{\mathcal{M}}_{g_2,n- I +1}$	\mathcal{M}_2

avec les changements similaires pour $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}, \omega_{g,n}, \dots$

Nous commençons par considérer les deux diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{ccccc}
 & \omega_\pi & & \omega_{\pi'} & & \omega_{\pi_b} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C} & \xleftarrow{j'_b} & \mathcal{C}' & \xleftarrow{\nu_b} & \mathcal{C}_b \\
 \sigma_i \uparrow \pi \downarrow & & \sigma'_i \uparrow \pi' \downarrow & & \uparrow \pi_b \downarrow \\
 \mathcal{M} & \xleftarrow{j_b} & \mathcal{M}_b & & \\
 & & \sigma_{b,i} & &
 \end{array} &
 \begin{array}{ccccc}
 & \omega_\pi & & \omega_{\pi''} & & \omega_{\pi,1} \oplus \omega_{\pi,2} \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{C} & \xleftarrow{} & \mathcal{C}'' & \xleftarrow{\nu_a} & \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \\
 \sigma_i \uparrow \pi \downarrow & & \sigma''_i \uparrow \pi'' \downarrow & & \uparrow \pi_a \downarrow \\
 \mathcal{M} & \xleftarrow{j_a} & \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 & & \\
 & & \sigma_{a,i} & &
 \end{array}
 \end{array}$$

avec $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_b$ et $\mathcal{C}'' = \mathcal{C} \times_{\mathcal{M}} (\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2)$. Nous devons regarder plus en détail comment sont construits \mathcal{C}' et ν_b . L'étude est similaire pour j_{arbre} . Au-dessus d'un point de \mathcal{M}_b , nous avons une courbe nodale S avec le choix d'un noeud non séparant et d'une branche en ce noeud privilégiés. Ainsi, le morphisme ν_b dont nous pouvons trouver une construction dans [1] est le morphisme de désingularisation de la courbe nodale S en ce noeud non séparant privilégié et en prenant la branche privilégiée pour y placer le nouveau point marqué $n+1$ dans la désingularisée \tilde{S} .

Nous commençons par démontrer le

Théorème 1.4.1. *Nous avons les comportements suivants sous les morphismes de recollement*

$$j_b^* \sigma_i^* \omega_\pi = \sigma_{b,i}^* \omega_{\pi_b} \quad j_a^* \sigma_i^* \omega_\pi = \sigma_{a,i}^* \omega_{\pi,1} \oplus \sigma_{a,i}^* \omega_{\pi,2}.$$

Démonstration. D'après la définition des sections⁸ de ω_π et $\omega_{\pi'}$, et d'après le comportement du morphisme de désingularisation, nous avons les deux relations cruciales

$$\nu_b^* \omega_{\pi'} = \omega_{\pi_b}(\sigma_{b,n+1} + \sigma_{b,n+2}) \quad \text{et} \quad \nu_a^* \omega_{\pi''} = \omega_{\pi,1}(a, \sigma_\alpha) \oplus \omega_{\pi,2}(a, \sigma_\beta).$$

De plus, nous avons $j'_b \omega_\pi = \omega_{\pi'}$ puisque \mathcal{C}' est un produit cartésien. Ainsi,

$$(12) \quad \nu_b^* j'_b \omega_\pi = \omega_{\pi_b}(\sigma_{b,n+1} + \sigma_{b,n+2}).$$

C'est le point le plus important de la démonstration.

Tout d'abord, (12) nous donne le calcul suivant

$$\begin{aligned} j_b^* \sigma_i^* \omega_\pi &= \sigma_{b,i}^* \nu_b^* j'_b \omega_\pi \\ &= \sigma_{b,i}^* \omega_{\pi_b}(\sigma_{b,n+1} + \sigma_{b,n+2}) \\ &= \sigma_{b,i}^* \omega_{\pi_b} \otimes \sigma_{b,i}^* \mathcal{O}(\sigma_{b,n+1}) \otimes \sigma_{b,i}^* \mathcal{O}(\sigma_{b,n+2}) \\ &= \sigma_{b,i}^* \omega_{\pi_b} \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{O}(\sigma_{b,n+1})$ est trivial en dehors du lieu donné par $\sigma_{b,n+1}$ et que ce lieu n'intersecte pas le lieu de $\sigma_{b,i}$ (idem pour $\mathcal{O}(\sigma_{b,n+2})$). De même, nous montrons sans difficulté l'autre égalité. \square

Passons maintenant à l'étude du fibré de Hodge.

Théorème 1.4.2. *Les relations suivantes sont valables en K -théorie*

$$[j_{\text{boucle}}^*(\Lambda)] \stackrel{K}{=} [\Lambda_b] + [\mathbb{C}] \quad [j_{\text{arbre}}^*(\Lambda)] \stackrel{K}{=} [\Lambda_1 \oplus \Lambda_2].$$

Démonstration. Concentrons nous sur le cas de j_{boucle} , l'autre partie du théorème est similaire. Le premier ingrédient est la suite exacte de désingularisation [1], qui s'énonce pour une courbe nodale S et sa désingularisée $S \xleftarrow{\nu} \tilde{S}$ comme

$$0 \rightarrow \omega_S \rightarrow \nu_* \nu^* \omega_S \rightarrow (\omega_S)_{|\text{noeud}} \rightarrow 0$$

où ω_S est le fibré canonique de la courbe S .

Cette suite exacte admet une version globale pour notre fibré ω et notre morphisme ν_b . Nous utilisons donc la suite exacte sur \mathcal{C}'

$$(13) \quad 0 \rightarrow \omega_{\pi'} \rightarrow \nu_{b*} \nu_b^* \omega_{\pi'} \rightarrow \omega_{\pi'}|_{\sigma(\mathcal{M}_b)} \rightarrow 0.$$

où σ est la section correspondant au lieu du noeud non séparant privilégié.

8. Ce sont des formes holomorphes en dehors des singularités de la courbe nodale et, sur les noeuds, elles peuvent avoir des pôles à condition que les résidus de part et d'autre du noeud soient opposés.

Nous appliquons $R\pi'_*$ et nous trouvons :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow R^0\pi'_*\omega_{\pi'} \rightarrow R^0\pi'_*\nu_{b*}\nu_b^*\omega_{\pi'} \rightarrow R^0\pi'_*\omega_{\pi'|\sigma(\mathcal{M}_b)} \rightarrow R^1\pi'_*\omega_{\pi'} \\ \rightarrow R^1\pi'_*\nu_{b*}\nu_b^*\omega_{\pi'} \rightarrow R^1\pi'_*\omega_{\pi'|\sigma(\mathcal{M}_b)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Par dualité de Serre, $R^1\pi'_*\omega_{\pi'} = (R^0\pi'_*\mathcal{O})^\vee$ donc est isomorphe à \mathcal{O} . De même, en utilisant (12),

$$R^1\pi'_*\nu_{b*}\nu_b^*\omega_{\pi'} = R^1\pi'_*\nu_{b*}\omega_{\pi_b}(\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2}) = (R^0\pi'_*\nu_{b*}\mathcal{O}(-\sigma_{n+1} - \sigma_{n+2}))^\vee = 0.$$

Enfin, $R^0\pi'_*\omega_{\pi'|\sigma(\mathcal{M}_b)} = \pi'_*\sigma_*\sigma^*\omega_{\pi'}$. Mais alors

$$\begin{aligned} R^0\pi'_*\omega_{\pi'|\sigma(\mathcal{M}_b)} &= \sigma^*\omega_{\pi'} = \sigma_{n+1}^*\nu_b^*\omega_{\pi'} = \sigma_{n+1}^*\omega_{\pi_b}(\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2}) \\ &= \sigma_{n+1}^*\omega_{\pi_b} \otimes \sigma_{n+1}^*\mathcal{O}(\sigma_{n+1}) \end{aligned}$$

puisque les lieux de σ_{n+1} et σ_{n+2} ne s'intersectent pas. Or, pour un diviseur $D \hookrightarrow X$, nous avons $\mathcal{O}(D)|_D = N_{D/X}$, où N est le fibré normal $T^\vee D/T^\vee X$. Ainsi, $R^0\pi'_*\omega_{\pi'|\sigma(\mathcal{M}_b)} = \mathcal{O}$.

Ceci nous permet de réexprimer la suite exacte longue sous la forme :

$$0 \rightarrow R^0\pi'_*\omega_{\pi'} \rightarrow R^0\pi'_*\nu_{b*}\nu_b^*\omega_{\pi'} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0$$

ce qui, combiné avec (12), nous donne finalement l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \pi'_*\omega_{\pi'} &= \pi'_*\nu_{b*}(\omega_{\pi_b}(\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2})) \\ (14) \quad &= \pi_{b*}(\omega_{\pi_b}(\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2})). \end{aligned}$$

Le deuxième ingrédient est la suite exacte [7]

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-D) \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}|_D \rightarrow 0$$

qui se réécrit pour nous sur \mathcal{C}_b sous la forme

$$(15) \quad 0 \rightarrow \omega_{\pi_b} \rightarrow \nu_b^*\omega_{\pi'} \rightarrow \nu_b^*\omega_{\pi'|\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2}} \rightarrow 0.$$

Nous appliquons $R\pi_{b*}$ et trouvons

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow \pi_{b*}\omega_{\pi_b} \rightarrow \pi_{b*}\nu_b^*\omega_{\pi'} \rightarrow \pi_{b*}\nu_b^*\omega_{\pi'|\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2}} \rightarrow R^1\pi_{b*}\omega_{\pi_b} \rightarrow R^1\pi_{b*}\nu_b^*\omega_{\pi'} \\ \rightarrow R^1\pi_{b*}\nu_b^*\omega_{\pi'|\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2}} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Comme précédemment, nous avons

$$\begin{aligned} R^1\pi_{b*}\nu_b^*\omega_{\pi'} &= 0 \\ R^1\pi_{b*}\omega_{\pi_b} &= \mathcal{O} \\ \pi_{b*}\nu_b^*\omega_{\pi'|\sigma_{n+1} + \sigma_{n+2}} &= \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}. \end{aligned}$$

La suite exacte longue se réduit à

$$(16) \quad 0 \rightarrow \pi_{b*}\omega_{\pi_b} \rightarrow \pi_{b*}\nu_b^*\omega_{\pi'} \rightarrow \mathcal{O} \oplus \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O} \rightarrow 0.$$

En combinant (14) avec (16), nous obtenons en K-théorie l'égalité

$$[\pi'_*\omega_{\pi'}] \stackrel{K}{=} [\pi_{b*}\nu_b^*\omega_{\pi'}] \stackrel{K}{=} [\pi_{b*}\omega_{\pi_b}] + [\mathcal{O}].$$

Nous utilisons maintenant le fait que C' est un produit cartésien pour dire que $j_b^* \pi_* \omega_\pi = \pi'_* \omega_{\pi'}$.

Par conséquent, nous terminons avec

$$[j_b^* \pi_* \omega_\pi] \stackrel{K}{=} [\pi_{b*} \omega_{\pi_b}] + [\mathcal{O}].$$

□

Pour démontrer des relations analogues sur le morphisme d'oubli, nous allons procéder autrement.

Théorème 1.4.3. *Le fibré de Hodge se tire en arrière par l'application d'oubli de façon invariante :*

$$p^*(\Lambda) = \Lambda.$$

Démonstration. Pour commencer, formons le produit cartésien $P = \bar{\mathcal{C}}_{g,n} \times_{\bar{\mathcal{M}}_{g,n}} \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ [10]. Un point de P est un couple (C, C') de courbes stables avec les points marqués p_1, \dots, p_n sur C , un point q quelconque sur C et les points marqués p'_1, \dots, p'_{n+1} sur C' . Ce qui distingue q des autres points est qu'il peut être égal à un autre marquage de C ou même à un noeud de C . Nous devons aussi rajouter la condition suivante

- si q est distinct des noeuds et des p_i , alors $C = C'$, $p_i = p'_i$ et $q = p'_{n+1}$
- si $q = p_i$ pour un i , alors $C' = (C \cup \mathbb{CP}^1)/(p_i = 0)$, $p_j = p'_j$ pour $j \neq i$, $p'_i = 1 \in \mathbb{CP}^1$ et $p'_{n+1} = \infty \in \mathbb{CP}^1$
- si q est un noeud s , alors en écrivant \tilde{C} la normalisation de C en s , s_1 et s_2 les points de \tilde{C} correspondant à s , nous avons $C' = (\tilde{C} \cup \mathbb{CP}^1)/(s_1 = 0, s_2 = \infty)$, $p_i = p'_i$ et $p'_{n+1} = 1 \in \mathbb{CP}^1$.

Nous définissons une application $\bar{\mathcal{C}}_{g,n+1} \rightarrow P$ en envoyant une courbe stable C marquée de p_1, \dots, p_{n+1} et munie d'un point q vers le produit $(\text{Stab}_{p_{n+1}}(C), C)$ avec $\text{Stab}_{p_{n+1}}(C)$ la stabilisation de C en oubliant le point p_{n+1} , et en prenant les points marqués p_1, \dots, p_{n+1} sur C et les images des points p_1, \dots, p_n, q sur $\text{Stab}_{p_{n+1}}(C)$.

Cette construction peut se réaliser en familles [1] et donne un morphisme de champs $e: \bar{\mathcal{C}}_{g,n+1} \rightarrow P$ complétant le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \omega_\pi & & \omega_{\pi'} \\
 & & \curvearrowright & & \curvearrowleft \\
 & \bar{\mathcal{C}}_{g,n} & \xleftarrow{\bar{p}} & P & \xleftarrow{e} \bar{\mathcal{C}}_{g,n+1} \\
 & \downarrow \pi & & \downarrow \tilde{\pi} & \swarrow \pi' \\
 & \bar{\mathcal{M}}_{g,n} & \xleftarrow{p} & \bar{\mathcal{M}}_{g,n+1} &
 \end{array}$$

Le premier carré est cartésien d'où les formules

$$(17) \quad \tilde{p}^* \omega_\pi = \omega_{\tilde{\pi}}$$

$$(18) \quad p^* \pi_* \omega_\pi = \tilde{\pi}_* \tilde{p}^* \omega_\pi.$$

Le deuxième résultat est donné par la formule d'adjonction [9] qui donne :

$$(19) \quad \begin{aligned} \omega_{\pi'} &= \omega_e \otimes e^* \omega_{\tilde{\pi}} \\ &= \omega_e \otimes (\tilde{p} \circ e)^* \omega_\pi \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} e_* \omega_{\pi'} &= e_*(\omega_e \otimes e^* \tilde{p}^* \omega_\pi) \\ &= e_* \omega_e \otimes \tilde{p}^* \omega_\pi \\ &= \tilde{p}^* \omega_\pi. \end{aligned}$$

La dernière égalité provient du fait crucial que $e_* \omega_e = \mathcal{O}$. En effet, les fibres de e sont ou bien triviales ou bien isomorphes à $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Le faisceau ω_e est un fibré en droites concentré sur les fibres qui sont des $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Ce fibré en droite est le fibré cotangent, il n'a donc pas de sections globales. Ainsi, nous pouvons conclure par

$$\begin{aligned} p^* \pi_* \omega_\pi &= \tilde{\pi}_* \tilde{p}^* \omega_\pi \\ &= \tilde{\pi}_* e_* \omega_{\pi'} \\ &= \pi'_* \omega_{\pi'}. \end{aligned}$$

□

Pour terminer notre étude, il ne reste plus qu'à établir le

Théorème 1.4.4. *Les classes ψ_i ne sont pas invariantes sous l'opération de tiré en arrière par le morphisme d'oubli : $p^*(\psi_i) = \psi_i - \delta_{(i,n+1)}$.*

Démonstration. Nous avons les sections σ_i et $\sigma_{i'}$ de π et de π' respectivement, correspondant aux marquages du point i . Par définition, $p^*(\psi_i) = p^*(c_1(\sigma_i^* \omega_\pi))$. Par commutativité du diagramme et par functorialité de la classe de Chern, nous arrivons à

$$\begin{aligned} p^*(c_1(\sigma_i^* \omega_\pi)) &= c_1(p^* \sigma_i^* \omega_\pi) \\ &= c_1(\sigma_i'^* e^* \tilde{p}^* \omega_\pi). \end{aligned}$$

En appliquant la première classe de Chern à (19), nous avons

$$c_1(\omega_{\pi'}) = c_1(\omega_e) + c_1(e^* \tilde{p}^* \omega_\pi)$$

d'où

$$\begin{aligned} c_1(\sigma_i'^* \omega_{\pi'}) &= c_1(\sigma_i'^* \omega_e) + c_1(\sigma_i'^* e^* \tilde{p}^* \omega_{\pi}) \\ &= c_1(\sigma_i'^* \omega_e) + p^*(c_1(\sigma_i^* \omega_{\pi})) \end{aligned}$$

donc $p^*(\psi_i) = \psi_i - c_1(\sigma_i'^* \omega_e)$.

Les fibres de e sont ou bien triviales ou bien des \mathbb{CP}^1 . Le faisceau ω_e est un fibré en droites concentré sur les fibres qui sont des \mathbb{CP}^1 . Se donner une section méromorphe de ω_e est donc se donner une section sur les fibres qui sont des \mathbb{CP}^1 et alors le lieu des zéros est concentré sur deux points. Lorsque la fibre \mathbb{CP}^1 contient le point marqué i , alors nous pouvons le prendre comme zéro de la section. La première classe de Chern de $\sigma_i'^* \omega_e$ est donc le lieu de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ noté $\delta_{(i,n+1)}$, c'est-à-dire le lieu où la fibre est un \mathbb{CP}^1 qui contient le point marqué i , ce qui termine la démonstration. \square

Corollaire 1.4.5. *Les classes ψ_i , λ_k et $\text{ch}_k(\Lambda)$ se comportent comme suit :*

classes tirées par	p^*	j_{boucle}^*	j_{arbre}^*
ψ_i	$\psi_i - \delta_{(i,n+1)}$	ψ_i	ψ_i
λ_k	λ_k	λ_k	$\lambda_{k,g} + \lambda_{k,d}$
$\text{ch}_k(\Lambda)$	$\text{ch}_k(\Lambda)$	$\text{ch}_k(\Lambda)$	$\text{ch}_k(\Lambda_g) + \text{ch}_k(\Lambda_d)$

Ce corollaire nous permet de ramener notre calcul à une combinaison linéaire de termes faisant intervenir :

$$\begin{aligned} & - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \psi_{n+1}^{2s} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b_{2s-1}} \\ & - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_i^{2s-1} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b_{2s-1}} \\ & - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \psi_{n+1}^a \psi_{n+2}^{a'} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b_{2s-1}} \\ & - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+1}} \psi_{\alpha}^a \prod_{j \in I} \psi_j^{a_j} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b_{2s-1}} \\ & \quad \times \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g_2,n-|I|+1}} \psi_{\beta}^{a'} \prod_{k \in \mathbb{N}_n - I} \psi_k^{a_k} \text{ch}_1(\Lambda)^{b_1} \dots \text{ch}_{2s-1}(\Lambda)^{b_{2s-1}}. \end{aligned}$$

Remarque. Pour le premier point, nous avons éliminé $\delta_{(i,n+1)}$ en utilisant la relation (31) : $\delta_{(i,n+1)} \psi_{n+1} = 0$.

Le nombre de classes $\text{ch}_d(\Lambda)$ est diminué de 1 et nous pouvons répéter plusieurs cette opération pour éliminer toutes les classes $\text{ch}_d(\Lambda)$.

1.5. Récurrences sur les invariants n'ayant que des classes psi.

Nous sommes ramené à calculer les invariants suivants

$$\langle \tau_{a_1} \dots \tau_{a_n} \rangle_{g,n} \stackrel{\text{définition}}{=} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n}.$$

Remarquons que nous pouvons éviter de préciser g et n puisque la condition (1) impose que $\langle \tau_{a_1} \dots \tau_{a_n} \rangle_{g,n} = 0$ lorsque $a_1 + \dots + a_n \neq 3g - 3 + n$. Ainsi, nous écrirons $\langle \tau_{a_1} \dots \tau_{a_n} \rangle$ à la place de $\langle \tau_{a_1} \dots \tau_{a_n} \rangle_{g,n}$ avec $g = 1 + (a_1 + \dots + a_n - n)/3$ et avec la convention $\langle \tau_{a_1} \dots \tau_{a_n} \rangle_{g,n} = 0$ lorsque $g \notin \mathbb{N}$. Aussi, nous utilisons la notation $\tau_{\underline{d}} = \tau_{d_1} \dots \tau_{d_m}$ pour un multi-indice $\underline{d} = (d_1, \dots, d_m)$.

Calculer ces nombres est l'objet central de la théorie de Gromov-Witten de l'espace de modules des courbes stables. Il existe des formules de récurrence exprimant $\langle \tau_{\underline{d}} \tau_{k+1} \rangle_{g,n}$ pour tout $k \geq -1$ et multi-indice \underline{d} . La démonstration générale de ce théorème est très difficile et elle n'est pas l'objet de ce texte. En revanche nous allons prouver les deux premières relations, celle pour $k = -1$ et celle pour $k = 0$. Elles sont appelées respectivement équation des cordes et équation de dilaton.

Théorème 1.5.1. *Nous avons les relations de récurrence*

$$\begin{aligned} \langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \tau_0 \rangle &= \sum_{i=1}^n \langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_{i-1}} \dots \tau_{d_n} \rangle \quad (\text{cordes}) \\ \langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \tau_1 \rangle &= (2g - 2 + n) \langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle \quad (\text{dilaton}). \end{aligned}$$

Démonstration. Le point clef de la preuve repose sur l'utilisation du morphisme $p_{g,n}$ et du comportement de ψ_i sous $p_{g,n}^*$.

Les relations (1.4.5), (31) et (30) nous donnent l'égalité

$$(20) \quad \psi_i^d - p_{g,n}^*(\psi_i)^d = \delta_{(i,n+1)} p_{g,n}^*(\psi_i)^{d-1}$$

avec la convention $\psi_i^{-1} = 0$.

Pour la première équation, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n} &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} (p_{g,n}^*(\psi_1)^{d_1} + \delta_{(1,n+1)} p_{g,n}^*(\psi_1)^{d_1-1}) \dots \\ &\quad \dots (p_{g,n}^*(\psi_n)^{d_n} + \delta_{(n,n+1)} p_{g,n}^*(\psi_n)^{d_n-1}) \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} p_{g,n}^*(\psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \delta_{(i,n+1)} p_{g,n}^*(\psi_1^{d_1} \dots \psi_i^{d_i-1} \dots \psi_n^{d_n}). \end{aligned}$$

Or, $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} p_{g,n}^*(\psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n}) = \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} p_{g,n} p_{g,n}^*(\psi_1^{d_1} \dots \psi_n^{d_n}) = 0$ d'après la remarque (3). Ainsi, il nous reste

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n} &= \sum_{i=1}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \delta_{(i,n+1)} p_{g,n}^*(\psi_1^{d_1} \cdots \psi_i^{d_i-1} \cdots \psi_n^{d_n}) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \sigma_{i*}(\mathbf{1}) p_{g,n}^*(\psi_1^{d_1} \cdots \psi_i^{d_i-1} \cdots \psi_n^{d_n}) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \sigma_{i*} \sigma_i^* p_{g,n}^*(\psi_1^{d_1} \cdots \psi_i^{d_i-1} \cdots \psi_n^{d_n}) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \sigma_{i*}(\psi_1^{d_1} \cdots \psi_i^{d_i-1} \cdots \psi_n^{d_n}) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_i^{d_i-1} \cdots \psi_n^{d_n}.
\end{aligned}$$

Passons à la deuxième équation.

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n} \psi_{n+1} &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} (p_{g,n}^*(\psi_1) + \delta_{(1,n+1)})^{d_1} \cdots \\
&\quad \cdots (p_{g,n}^*(\psi_n) + \delta_{(n,n+1)})^{d_n} \psi_{n+1} \\
&= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}} p_{g,n}^*(\psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n}) \psi_{n+1} \\
&= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} p_{g,n*}(p_{g,n}^*(\psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n}) \psi_{n+1}) \\
&= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{d_1} \cdots \psi_n^{d_n} p_{g,n*}(\psi_{n+1}).
\end{aligned}$$

L'égalité (10) termine la démonstration. \square

Théorème 1.5.2. *Ces deux équations, avec les conditions initiales*

$$\langle \tau_0^3 \rangle_{0,3} = 1 \quad \text{et} \quad \langle \tau_1 \rangle_{1,1} = \frac{1}{24}$$

permettent de calculer tous les invariants pour les genres 0 et 1.

Démonstration. Commençons par calculer les valeurs de $\langle \tau_0^3 \rangle_{0,3}$ et de $\langle \tau_1 \rangle_{1,1}$.

Étant donné deux triplets de points distincts sur \mathbb{CP}^1 , il existe une et une seule transformation holomorphe qui envoie le premier triplet sur le deuxième. L'espace $\overline{\mathcal{M}}_{0,3}$ est donc un point. Ainsi, nous avons bien

$$\langle \tau_0^3 \rangle_{0,3} = 1.$$

Sur $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}$, le fibré de Hodge Λ est de rang 1. Le fibré cotangent à un tore est trivial, une 1-forme holomorphe sur un tore est donc déterminée par sa valeur sur le point marqué. Cela nous procure un isomorphisme entre le fibré de Hodge et le fibré Ψ . En prenant la première classe de Chern, nous obtenons donc $\lambda_1 = \psi_1$. Regardons ce que nous donne le

théorème (1.3.1) :

$$\begin{aligned}\psi_1 &= \lambda_1 \\ &= \text{ch}_1(\Lambda) \\ &= \frac{B_2}{2!} \left(\pi_*(\psi_2^2) - \psi_1 + \frac{1}{2} j_{\text{boucle}}(\mathbf{1}) \right).\end{aligned}$$

Intégrons sur $\overline{\mathcal{M}}_{1,1}$, utilisons l'équation des cordes et obtenons

$$\begin{aligned}\langle \tau_1 \rangle_{1,1} &= \frac{B_2}{2} \left(\langle \tau_1 \tau_0 \rangle_{1,2} - \langle \tau_1 \rangle_{1,1} + \frac{1}{2} \langle \tau_0^3 \rangle_{0,3} \right) \\ &= \frac{B_2}{4} \langle \tau_0^3 \rangle_{0,3} \\ &= \frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Montrons à présent que nous obtenons tous les invariants en genre 0 et 1 grâce aux deux équations et aux deux conditions initiales. Pour les genres 0 et 1, nous avons toujours dans $\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle$ au moins un indice i pour lequel $d_i < 2$. Dans le cas contraire, nous aurions $n \geq 3g - 3 + n = \sum_{i=1}^n d_i \geq 2n$ ce qui est absurde puisque $n \geq 1$. Cette remarque nous permet d'utiliser les équations (*cordes*) (celle-ci suffit pour le genre 0) et (*dilaton*) pour calculer tous les nombres souhaités en genre 0 et 1. Ces équations faisant diminuer strictement de 1 la valeur de n à chaque étape, le processus se termine. \square

Quand au calcul des invariants de Gromov-Witten en genre supérieur, nous disposons du théorème suivant

Théorème 1.5.3 (Kontsevich-Witten). ⁹ *Les invariants ne faisant intervenir que des classes ψ_i vérifient les relations de récurrence suivantes*¹⁰ pour tout $k \geq -1$

$$\begin{aligned}
(2k+3)!! \langle \tau_{k+1} \tau_{\underline{d}} \rangle_{g,n+1} &= \sum_{j=1}^n \frac{(2k+2d_j+1)!!}{(2d_j-1)!!} \langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_j+k} \dots \tau_{d_n} \rangle_{g,n} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{r+s=k-1} (2r+1)!! (2s+1)!! \langle \tau_r \tau_s \tau_{\underline{d}} \rangle_{g-1,n+2} \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{r+s=k-1} ((2r+1)!! (2s+1)!! \\
(21) \quad &\sum_{I \subset \mathbb{N}_n} (\langle \tau_r \tau_{\underline{d}_I} \rangle_{p,a+1} \langle \tau_s \tau_{\underline{d}_I^c} \rangle_{q,b+1}) .
\end{aligned}$$

□

Ces relations permettent de calculer de façon récursive tous les nombres $\langle \tau_{d_1} \dots \tau_{d_n} \rangle$ en partant de la donnée initiale $\langle \tau_0^3 \rangle = 1$. Nous retrouvons bien l'équation (*cordes*) pour $k = -1$ et l'équation (*dilaton*) pour $k = 0$. Nous remarquons une similarité avec le théorème résultant de Grothendieck-Riemann-Roch. Nous avons encore une fois quatre types de termes différents, provenant

- de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$
- de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$
- du bord $\overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}$
- des bords $\overline{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n-|I|+1}$.

Nous verrons des exemples d'utilisation de ces formules dans la partie suivante.

Ce dernier théorème permet de conclure le calcul récursif de tout invariant de Gromov-Witten de la forme

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \lambda_1^{b_1} \dots \lambda_g^{b_g} .$$

9. Se référer au texte [12] pour une discussion sur l'origine physique de cette conjecture.

10. Rappelons que le symbole $(2p+1)!!$ signifie $\prod_{i=0}^p (2i+1)$.

2. UN EXEMPLE DE CALCUL

Dans cette partie, nous allons illustrer ce que nous venons de voir en explicitant un calcul à l'aide de deux méthodes, afin de se rassurer sur le bon résultat obtenu.

Il s'agit du calcul de $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \lambda_1^3$.

2.1. Présentation des méthodes. La première méthode sera d'utiliser une particularité liée à notre exemple. Il s'agit de l'égalité

$$(22) \quad \lambda_1^3 = -12\text{ch}_3(\Lambda).$$

Ensuite, nous utilisons le théorème (1.3.1) à l'ordre 3.

La seconde méthode est d'utiliser la méthode récursive décrite dans la partie précédente.

Pour obtenir (22), nous appliquons la formule générale (1.3.1) obtenue par le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch et la formule (1.2.1) à notre exemple et regardons les premiers termes

$$(23) \quad \lambda_1 = \frac{p_{2,0*}(\psi_1^2) + \frac{1}{2}j_{\text{boucle},2,0*}(\mathbf{1}) + \frac{1}{2}j_{\text{arbre},(1,1),0,\emptyset*}(\mathbf{1})}{12}$$

$$\frac{\lambda_1^2}{2} - \lambda_2 = \text{ch}_2(\Lambda) = 0$$

$$\frac{\lambda_1^3}{6} - \frac{\lambda_1\lambda_2}{2} = \text{ch}_3(\Lambda)$$

Ainsi, dans ce cas particulier, nous avons $\lambda_2 = \frac{\lambda_1^2}{2}$ donc (22).

2.2. Calcul sur les classes psi. Au cours des deux méthodes, pour effectuer l'application numérique, nous devons connaître les valeurs suivantes

$$\langle \tau_1 \rangle_{1,1} = \frac{1}{24} =: x$$

$$\langle \tau_4 \rangle_{2,1} = \frac{1}{1152} = \frac{x^2}{2}$$

$$\langle \tau_2^3 \rangle_{2,3} - 3\langle \tau_2\tau_3 \rangle_{2,2} = \frac{9}{640} = \frac{81x^2}{10}$$

$$\langle \tau_2^2\tau_0^2 \rangle_{1,4} = 2\langle \tau_2\tau_1\tau_0 \rangle_{1,3} = 2\langle \tau_1^2 \rangle_{1,2} + 2\langle \tau_2\tau_0 \rangle_{1,2} = 4x.$$

Pour $\langle \tau_2^2\tau_0^2 \rangle_{1,4}$, nous utilisons successivement les équations (*cordes*) et (*dilaton*).

Pour les autres valeurs, nous devons utiliser les équations générales (21) pour différentes valeurs de k . Regardons l'exemple de $\langle \tau_4 \rangle_{2,1}$.

$$\langle \tau_4 \rangle_{2,1} \stackrel{(cordes)}{=} \langle \tau_5 \tau_0 \rangle_{2,2}$$

$$\begin{aligned} (2.4 + 3)!! \langle \tau_{4+1} \tau_0 \rangle_{2,1+1} &\stackrel{(21)}{=} \frac{(2.4 + 2.0 + 1)!!}{(2.0 - 1)!!} \langle \tau_{0+4} \rangle_{2,1} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r+s=3} (2r+1)!! (2s+1)!! \langle \tau_r \tau_s \tau_0 \rangle_{1,3} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{r+s=3} (2r+1)!! (2s+1)!! \sum_{I \subset \{1\}} \\ &\quad (\langle \tau_r \tau_{d_I} \rangle_{p,a+1} \langle \tau_s \tau_{d_I^c} \rangle_{q,b+1}) \\ &= 9!! \langle \tau_4 \rangle_{2,1} \\ &\quad + 7!! \langle \tau_0 \tau_3 \tau_0 \rangle_{1,3} + 3!! \cdot 5!! \langle \tau_1 \tau_2 \tau_0 \rangle_{1,3} \\ &\quad + 7!! \langle \tau_0 \rangle_{p,1} \langle \tau_3 \tau_0 \rangle_{q,2} \\ &\quad + 7!! \langle \tau_0 \tau_0 \rangle_{p,2} \langle \tau_3 \rangle_{q,1} \\ &\quad + 3!! \cdot 5!! \langle \tau_1 \rangle_{p,1} \langle \tau_2 \tau_0 \rangle_{q,2} \\ &\quad + 3!! \cdot 5!! \langle \tau_1 \tau_0 \rangle_{p,2} \langle \tau_2 \rangle_{q,1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11!! \langle \tau_4 \rangle_{2,1} &= 9!! \langle \tau_4 \rangle_{2,1} + 7!! \langle \tau_3 \tau_0^2 \rangle_{1,3} + 3!! \cdot 5!! \langle \tau_1 \tau_2 \tau_0 \rangle_{1,3} \\ &\quad + 7!! \cdot 0.0 + 7!! \cdot 0.0 + 3!! \cdot 5!! \langle \tau_1 \rangle_{1,1} \langle \tau_2 \tau_0 \rangle_{1,2} + 3!! \cdot 5!! \cdot 0.0 \\ &= 9!! \langle \tau_4 \rangle_{2,1} + 7!! \cdot x + 3!! \cdot 5!! \cdot 2 \cdot x + 3!! \cdot 5!! \cdot x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \tau_4 \rangle_{2,1} &= \frac{11}{10} \left(\frac{1}{99} \cdot x + \frac{1}{7 \cdot 3 \cdot 11} \cdot 2 \cdot x + \frac{1}{7 \cdot 3 \cdot 11} \cdot x^2 \right) \\ &= \frac{1}{1152} \\ &= \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

2.3. Méthode sioux. C'est la méthode la plus directe mais elle a l'inconvénient de reposer sur la particularité (22). Elle nous servira néanmoins à vérifier le résultat de la méthode récursive présentée dans ce texte.

$$\begin{aligned}
\lambda_1^3 &\stackrel{(22)}{=} -12\text{ch}_3(\Lambda) \\
&\stackrel{(1.3.1)}{=} -12\frac{B_4}{4!} \left(p_{2,0*}(\psi_1^4) + \frac{1}{2} \sum_{a+a'=2} j_{\text{boucle},2,0*}(\psi_1^a(-\psi_2)^{a'}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{a+a'=2} j_{\text{arbre},(1,1),0,\emptyset*}(\psi_\alpha^a(-\psi_\beta)^{a'}) \right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\lambda_1^3 = \frac{1}{60} &\left(p_{2,0*}(\psi_1^4) + \frac{1}{2} j_{\text{boucle},2,0*}(\psi_1^2 + \psi_2^2 - \psi_1\psi_2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} j_{\text{arbre},(1,1),0,\emptyset*}(\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2 - \psi_\alpha\psi_\beta) \right)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \lambda_1^3 = \frac{1}{60} \left(\langle \tau_4 \rangle_{2,1} + \langle \tau_2 \tau_0 \rangle_{1,2} - \frac{1}{2} \langle \tau_1^2 \rangle_{1,2} - \frac{1}{2} \langle \tau_1 \rangle_{1,1}^2 \right)$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \lambda_1^3 &= \frac{1}{60} \left(\langle \tau_4 \rangle_{2,1} - \frac{1}{2} \langle \tau_1 \rangle_{1,1}^2 + \frac{1}{2} \langle \tau_1 \rangle_{1,1} \right) = \frac{1}{60} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} \right) \\
&= \frac{x}{120}
\end{aligned}$$

ce qui donne numériquement

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \lambda_1^3 = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2880}}.$$

2.4. Méthode récursive. Nous appliquons à la lettre les résultats de la section précédente :

- (1) nous exprimons λ_1 en fonction de $\text{ch}_1(\Lambda)$ grâce à (1.2.1)
- (2) nous exprimons $\text{ch}_1(\Lambda)$ en fonction des ψ_i grâce à (1.3.1)
- (3) nous itérons plusieurs fois l'étape précédente
- (4) nous calculons les $\langle \tau_{a_1} \dots \tau_{a_n} \rangle$ obtenus grâce à (21) puis regroupons les termes.

Le premier point donne

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \lambda_1^3 \stackrel{(1,2,1)}{=} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \text{ch}_1(\Lambda)^3.$$

Le deuxième point donne

$$(24) \quad \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \text{ch}_1(\Lambda)^2 \text{ch}_1(\Lambda) = \frac{1}{12} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda)^2 + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \text{ch}_1(\Lambda)^2 + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,1}} (\text{ch}_1(\Lambda_g) + \text{ch}_1(\Lambda_d))^2 \right).$$

$$\begin{aligned} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \lambda_1^3 &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \text{ch}_1(\Lambda)^3 && \text{point 1} \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \text{ch}_1(\Lambda)^2 \text{ch}_1(\Lambda) \\ &= \frac{1}{12} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \text{ch}_1(\Lambda)^2 p_{2,0*}(\psi_1^2) + \frac{1}{2} j_{\text{boucle},2,0*}(\mathbf{1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} j_{\text{arbre},(1,1),0,\emptyset*}(\mathbf{1}) && \text{point 2} \\ &= \frac{1}{12} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1^2 p_{2,0}^*(\text{ch}_1(\Lambda))^2 \\ &\quad + \frac{1}{24} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,1}} j_{\text{arbre},(1,1),0,\emptyset}^*(\text{ch}_1(\Lambda))^2 \\ &\quad + \frac{1}{24} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2}} j_{\text{boucle},2,0}^*(\text{ch}_1(\Lambda))^2 \\ &= \frac{1}{12} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda)^2 \\ &\quad + \frac{1}{24} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,1}} (\text{ch}_1(\Lambda_g) + \text{ch}_1(\Lambda_d))^2 \\ &\quad + \frac{1}{24} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \text{ch}_1(\Lambda)^2 && \text{partie (1.4)} \end{aligned}$$

Le terme $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \text{ch}_1(\Lambda)^2$ est nul puisque sur $\overline{\mathcal{M}}_{1,2}$, nous avons $0 = \text{ch}_2(\Lambda) = \frac{\lambda_1^2}{2} - \lambda_2$ et $\lambda_2 = 0$ par dimension.

Ainsi, $\text{ch}_1(\Lambda)^2 = \lambda_1^2 = 0$ et nous obtenons de façon générale

$$(25) \quad \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,n}} \lambda_1^n = 0, \quad \forall n \geq 2.$$

Par ailleurs, $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \text{ch}_1(\Lambda) = \frac{1}{24}$ et

$$\int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,1}} (\text{ch}_1(\Lambda_g) + \text{ch}_1(\Lambda_d))^2 = 2 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \text{ch}_1(\Lambda_g) \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \text{ch}_1(\Lambda_d) = 2x^2.$$

Nous arrivons ainsi à

$$(26) \quad \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \lambda_1^3 = \frac{1}{12} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda)^2 + x^2 \right).$$

Appliquons à nouveau la méthode au premier morceau sans oublier qu'il y a maintenant un point marqué et nous obtenons

$$(27) \quad \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda)^2 = \frac{1}{12} \left(\int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,2}} \psi_2^2 \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1^3 \text{ch}_1(\Lambda) + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) + x^2 \right).$$

$$\begin{aligned} 12 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda)^2 &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} p_{2,1*}(\psi_2^2 p_{2,1}^*(\psi_1)^2 \text{ch}_1(\Lambda)) \\ &\quad - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1 \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} j_{\text{arbre},(1,1),1,\emptyset*}(\psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda)) \\ &\quad + j_{\text{arbre},(1,1),1,\{1\}*}(\psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} j_{\text{boucle},2,1*}(\psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda)) \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,2}} \psi_2^2 p_{2,1}^*(\psi_1)^2 \text{ch}_1(\Lambda) - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1 \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) \\ &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,2}} \psi_2^2 (\psi_1^2 - \delta_{(1,2)}) \text{ch}_1(\Lambda) - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1^3 \text{ch}_1(\Lambda) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \psi_1^2 (\text{ch}_1(\Lambda_g) + \text{ch}_1(\Lambda_d)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \psi_1^2 (\text{ch}_1(\Lambda_g) + \text{ch}_1(\Lambda_d)) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,2}} \psi_2^2 \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1^3 \text{ch}_1(\Lambda) \\
&\quad + \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \text{ch}_1(\Lambda) \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \psi_1^2 + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) \\
&= \frac{\int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,2}} \psi_2^2 \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1^3 \text{ch}_1(\Lambda)}{+x^2} + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda)
\end{aligned}$$

Maintenant, appliquons la méthode aux trois morceaux.

$$\begin{aligned}
12 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,2}} \psi_2^2 \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,3}} \psi_3^2 (\psi_2 - \delta_{(2,3)})^2 (\psi_1 - \delta_{(1,3)})^2 \\
&\quad - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,2}} \psi_2^2 \psi_1^2 (\psi_1 + \psi_2) \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,4}} \psi_2^2 \psi_1^2 \\
&\quad + \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,3} \times \overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_2^2 \psi_1^2 + \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \psi_2^2 \psi_1^2 \\
&\quad + \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,\{1,\alpha\}} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,\{2,\beta\}}} \psi_2^2 \psi_1^2 \\
&= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,3}} \psi_3^2 \psi_2^2 \psi_1^2 - 2 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,2}} \psi_2^2 \psi_1^3 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,4}} \psi_2^2 \psi_1^2 \\
&\quad + 0 + 0 + \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,\{1,\alpha\}}} \psi_1^2 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,\{2,\beta\}}} \psi_2^2 \\
&= \langle \tau_2^3 \rangle_{2,3} - 2 \langle \tau_2 \tau_3 \rangle_{2,2} + 2x + x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1^3 \text{ch}_1(\Lambda) &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,2}} \psi_2^2 (\psi_1 - \delta_{(1,2)})^3 \\
&\quad - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,1}} \psi_1^4 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \psi_1^3 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,2}} \psi_1^3 + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,2} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \psi_1^3 \\
&= \langle \tau_2 \tau_3 \rangle_{2,2} - \langle \tau_4 \rangle_{2,1} + \frac{x}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \psi_1^2 \text{ch}_1(\Lambda) &= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,4}} \psi_4^2 (\psi_1^2 - \delta_{(1,4)}) \\
&\quad - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3) \psi_1^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,5}} \psi_1^2 \\
&\quad + \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,4} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,1}} \psi_1^2 + 2 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,\{1,i,\alpha\}} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,\{j,\beta\}}} \psi_1^2 \\
&\quad + \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,\{2,3,\alpha\}} \times \overline{\mathcal{M}}_{1,\{1,\beta\}}} \psi_1^2 \\
&= \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,4}} \psi_1^2 \psi_4^2 \\
&\quad - \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,3}} \psi_1^3 + 2\psi_1^2 \psi_2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,5}} \psi_1^2 \\
&\quad + \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,4}} \psi_1^2 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,1}} 1 + 2 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,\{1,i,\alpha\}}} \psi_1^2 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,\{j,\beta\}}} 1 \\
&\quad + \int_{\overline{\mathcal{M}}_{0,\{2,3,\alpha\}}} 1 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{1,\{1,\beta\}}} \psi_1^2 \\
&= \langle \tau_2^2 \tau_0^2 \rangle - \langle \tau_3 \tau_0^2 \rangle + 2\langle \tau_2 \tau_1 \tau_0 \rangle + \frac{1}{2} + \langle \tau_2 \tau_0 \rangle \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Nous n'avons plus qu'à regrouper les termes

$$\begin{aligned}
 \int_{\overline{\mathcal{M}}_{2,0}} \lambda_1^3 &= \frac{1}{12} \left(x^2 + \frac{1}{12} \left(x^2 + \frac{1}{12} (\langle \tau_2^3 \rangle_{2,3} - 3 \langle \tau_2 \tau_3 \rangle_{2,2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \langle \tau_4 \rangle_{2,1} + x^2 + \frac{3x}{2} + \frac{1}{4} \right) \right) \\
 &= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2880}}.
 \end{aligned}$$

3. DÉTAIL DU PROGRAMME INFORMATIQUE

Nous donnons ici le détail du programme réalisé sous Maple V. Un programme équivalent a été auparavant réalisé par Carel Faber [4] et est couramment utilisé par les mathématiciens pour leurs calculs sur les nombres d'intersection.

L'intégrale $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{a_1} \dots \psi_n^{a_n} \lambda_1^{b_1} \dots \lambda_g^{b_g}$ est représentée par les deux listes

$$K = [a_1 : \dots : a_n] \quad , \quad J = [b_1 : \dots : b_g].$$

3.1. Calcul en fonction des caractères de Chern.

Programme 1 (Calcul de l'invariant $\int_{\overline{\mathcal{M}}_{g,n}} \psi_1^{K[1]} \dots \psi_n^{K[n]} \text{ch}_1(\Lambda)^{J[1]} \dots \text{ch}_{2m-1}(\Lambda)^{J[m]}$).

```

Calculch:= proc(K,J::list)
> g:=Genre(K,J):  genre de l'invariant correspondant aux listes K et J
> n:=nops(K):  nombre de points marqués, c'est la longueur de la liste K
> m:=nops(J):  longueur de la liste J
> if 2*m-1>g then
> 0  puisque chk(Λ) = 0 pour k > g
> else
> d:=J[m]:  d est la puissance de ch2m-1(Λ) qui est le plus grand caractère
> if m=1 and d=0 then
> Tau(K):  renvoie au cas où il n'y a que les classes ψi
> else
> if d<0 or g=-1 then
> 0  ce cas est interdit
> else
> if (g,n)=(0,0) or (g,n)=(0,1) or (g,n)=(0,2) or (g,n)=(1,0) then
> 0  ce cas est interdit
> else
> if d=0 then
> Calculch(K,subsop(m=NULL,J)):  si J[m] = 0, alors il faut l'enlever de la liste
> else
> a:=bernoulli(2*m)/((2*m)!)*Calculch([op(K),2*m],subsop(m=d-1,J)):  calcul du terme correspondant à ψn+12m sur Mg,n+1
> b:=0:
> for i from 1 to n do
> b:=b-bernoulli(2*m)/((2*m)!)*Calculch(subsop(i=K[i]+2*m-1,K),
```

```

subsop(m=d-1,J)):
> od: calcul du terme correspondant aux  $\psi_i^{2m-1}$  sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 
> c:=bernoulli(2*m)/((2*m)!)*1/2*sum((-1)^a
*Calculch([op(K),a,2*m-2-a],subsop(m=d-1,J)),a=0..2*m-2): calcul
du terme correspondant à  $\psi_{n+1}^a \psi_{n+2}^{a'}$  sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}$ 
> e:=0:
> R:=[]: R2:=[]:
> for j from 1 to m do
> R:=[op(R),0]:
> R2:=[op(R2),0]:
> od:
> na:=product(J[i]+1,i=1..m-1)*J[m]: nombre de monômes dans
le développement de  $(\text{ch}_1(\Lambda_g)+\text{ch}_1(\Lambda_d))^J[1] \dots (\text{ch}_{2m-1}(\Lambda_g)+\text{ch}_{2m-1}(\Lambda_d))^J[m]-1$ 
> for s from 0 to na-1 do
> q:=na:
> for i from 1 to m-1 do
> R[i]:=irem(q,J[i]+1,'q'): correspond aux puissances de  $\text{ch}_i(\Lambda_g)$ 
dans les monômes
> R2[i]:=J[i]-R[i]: correspond aux puissances de  $\text{ch}_i(\Lambda_d)$  dans les
monômes
> od:
> R[m]:=irem(q,J[m],'q'):
> R2[m]:=d-1-R[m]:
> for p from 0 to 2^n-1 do compte les sous-listes  $I \in \mathbb{N}_n$ 
> for h from 0 to g do compte le sous-genre  $g_1$ 
> P:=Sublist(p,K):
> Q:=Sublist(2^n-1-p,K):
> a1:=3*h-3+nops(P)+1-Degre(P)-sum(R[i]*(2*i-1),i=1..m): condi-
tion à respecter pour  $\psi_\alpha^b$  (Degre(L) renvoie la sommes des entrées de
la liste L)
> a2:=3*(g-h)-3+nops(Q)+1-Degre(Q)
-sum((J[i]-R[i))*(2*i-1),i=1..m-1)-(d-1-R[m])*(2*m-1): condi-
tion à respecter pour  $\psi_\beta^{b'}$ 
> if a1>-1 and a2>-1 then
> e:=e+bernoulli(2*m)/((2*m)!)*(-1)^a2*1/2
*product(binomial(J[i],R[i]),i=1..m-1)*binomial(d-1,R[m])
*Calculch([op(P),a1],R)*Calculch([op(Q),a2],R2): calcul du terme
correspondant à  $\psi_\alpha^b \psi_\beta^{b'}$  sur  $\overline{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n-|I|+1}$ 
> fi: od: od: od:
> a+b+c+e: ajout des termes

```

```
> fi: fi: fi: fi: fi:
> end;
```

3.2. Programmes auxiliaires.

Programme 2 (Calcul des invariants $\langle \tau_{K[1]} \dots \tau_{K[nops(K)]} \rangle$).

```
Tau := proc(K::list)
> n:=nops(K)-1: nous avons n + 1 points marqués
> k:=K[1]-1: l'invariant est de la forme  $\langle \tau_{k+1} \tau_{(d)} \rangle_{g,n+1}$ 
> if K=[0,0,0] then
> 1: condition initiale  $\langle \tau_0^3 \rangle_{0,3} = 1$ 
> else
> if Genre(K, [])=-1 then
> 0: ce cas est interdit
> else
> if n=-1 then
> 0: ce cas est interdit
> else
> if n=0 then
> if k=0 then
> 1/24: condition initiale  $\langle \tau_1 \rangle_{1,1} = \frac{1}{24}$ 
> else
> if k=-1 then
> 0: ce cas est interdit
> else
> if k<-1 then
> 0: ce cas est interdit
> else
> W:=0:
> for r from 0 to k-1 do
> W:=W+1/2*(product(2*s+1,s=0..r))*(product(2*s+1,s=0..k-1-r))
> *Tau([r,k-1-r]): cas où il n'y a qu'un point marqué
> od:
> for r from 0 to k-1 do
> W:=W+1/2*(product(2*s+1,s=0..r))*(product(2*s+1,s=0..k-1-r))
> *(Tau([r])*Tau([k-1-r])): cas où il n'y a qu'un point marqué
> od:
> W:=1/(product(2*s+1,s=0..k+1))*W: cas où il n'y a qu'un point
marqué
> W:
> fi: fi: fi:
> else
> if k<-1 then
```

```

> 0: ce cas est interdit
> else
> W:=0:
> for j from 1 to n do
> W:=W+(product(2*s+1,s=0..k+K[j+1]))/(product(2*s+1,s=0..K[j+1]-1))
*Tau(subsop(1=NULL,j+1=K[j+1]+k,K)): terme correspondant à  $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ 
> od:
> for r from 0 to k-1 do
> W:=W+1/2*(product(2*s+1,s=0..r))*(product(2*s+1,s=0..k-1-r))
*Tau([r,k-1-r,op(K[2..n+1])]): terme correspondant à  $\overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}$ 
> od:
> for r from 0 to k-1 do
> for p from 0 to 2^n-1 do
W:=W+1/2*(product(2*s+1,s=0..r))*(product(2*s+1,s=0..k-1-r))
*(Tau([r,op(Sublist(p,subsop(1=NULL,K))]))
*Tau([k-1-r,op(Sublist(2^n-1-p,subsop(1=NULL,K)))])): terme
correspondant à  $\overline{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n-|I|+1}$ 
> od: od:
> W:=1/(product(2*s+1,s=0..k+1))*W:
> W:
> fi: fi: fi: fi: fi:
> end;

```

Lorsque le terme de bord correspondant à $\overline{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n-|I|+1}$ apparaît, nous avons besoin de parcourir l'ensemble des sous-listes d'une liste donnée.

Programme 3 (Renvoie la sous-liste de K numéroté p en base 2).

```

Sublist :=proc(p::integer,K::list)
> n:=nops(K):
> L:=[]:
> if -1<p and p<2^n then
> A:=convert(p,base,2):
> m:=nops(A):
> for i from 1 to m do
> if A[i]=1 then
> L:=[op(L),K[i]]:
> fi: od:
> else
> L:=K:
> fi:
> L:
> end;

```

Programme 4 (Calcule le genre de l'invariant contenant ψ_i et $\text{ch}_d(\Lambda)$).

Genre:= proc(K,J::list)

```
> t:=0:
> for i from 1 to nops(K) do
> t:=t+K[i]:
> od:
> for i from 1 to nops(J) do
> t:=t+(2*i-1)*J[i]:
> od:
> if t-nops(K) mod 3 =0 then
> 1+(t-nops(K))/3
> else
> -1
> fi:
> end;
```

Programme 5 (Calcule le degré d'une liste des ψ_i seulement).

Degre:= proc(K::list)

```
> t:=0:
> for i from 1 to nops(K) do
> t:=t+K[i]:
> od:
> t
> end;
```

Rappelons pour finir que pour manipuler des listes sous Maple V, nous disposons des commandes

nops(L)	renvoie la longueur de la liste L
subsop(a=b,L)	donne la valeur b à L[a]
subsop(a=NULL,L)	efface l'entrée numéro a de la liste L
[a,b,op(L[2..c])]	fait la concaténation de [a,b] avec [L[2],...,L[c]]

3.3. Calcul en fonction des classes de Chern. Le passage des classes λ_k en une combinaison linéaire d'intégrales sur les caractères $\text{ch}_k(\Lambda)$ se fait par le programme suivant

Programme 6 (Principal).

Final:=proc(K,J::list)

```
> g:=Genre(K,J):
> n:=nops(K):
> k:=floor((g+1)/2):
> Co:=[]: liste des coefficients de la combinaison linéaire
> R:=0:
```

```

> E:=x->exp(sum(B[i]*x^(2*i-1)*((2*i-2)!),i=1..k)): formule
(1.2.1)
> F:=convert(series(E(x),x=0,g+1),list): développement en série
entière de (1.2.1) puis conversion sous forme de liste
> K2:=[]:
> for i from 1 to nops(F)/2-4 do
> K2:=[op(K2),F[2*i+1]]: transformation de la liste pour isoler les
termes de même degré ( $K2[k] = \lambda_k$ )
> od:
> a:=1:
> for i from 1 to nops(J) do
> a:=a*K2[i]^J[i]: multiplication des  $\lambda_k$  selon la liste J
> od:
> a:=expand(a): résultat sous forme développée
> L:=convert(a,list): conversion sous forme d'une liste, les monômes
sont séparés :  $k * x * y^2 + z$  devient  $[k * x * y^2, z]$ 
> for i from 1 to nops(L) do
> Q[i]:=[]:
> for l from 1 to g do
> Q[i][l]:=0:
> od:
> M[i]:=convert(L[i],list): séparation des facteurs :  $[k*x*y^2, z]$ 
devient  $[[k, x, y^2], [z]]$ 
> if type(M[i][1],numeric) then
> Co:=[op(Co),M[i][1]]: isolement du coefficient multiplicatif : k
> N[i,1]:=convert(M[i][1],list):
> for j from 2 to nops(M[i]) do
> N[i,j]:=convert(M[i][j],list): séparation des puissances :  $[[k, x, y^2], [z]]$ 
devient  $[[[k], [x], [y, 2]], [[z]]]$ 
> if nops(N[i,j])=2 then
> w:=0:
> for l from 1 to g while w=0 do
> if N[i,j][1]=B[l] then
> Q[i][l]:=N[i,j][2]: puissance de  $ch_{2l-1}(\Lambda)$ 
> w:=1:
> fi: od:
> else
> w:=0:
> for l from 1 to g while w=0 do
> if N[i,j][1]=B[l] then
> Q[i][l]:=1: puissance de  $ch_{2l-1}(\Lambda)$ 
> w:=1:

```

```

> fi: od: fi: od:
> else
> Co:=[op(Co),1]:
> for j from 1 to nops(M[i]) do
> N[i,j]:=convert(M[i][j],list):
> if nops(N[i,j])=2 then
> w:=0:
> for l from 1 to g while w=0 do
> if N[i,j][1]=B[l] then
> Q[i][l]:=N[i,j][2]:
> w:=1:
> fi: od:
> else
> w:=0:
> for l from 1 to g while w=0 do
> if N[i,j][1]=B[l] then
> Q[i][l]:=1:
> w:=1:
> fi: od: fi: od: fi:
> for l from 1 to g while Q[i][g+1-l]=0 do
> subsop(g+1-l=NULL,Q[i]): effacement des  $\text{ch}_{2l-1}(\Lambda)^0$ 
> od: od:
> for i from 1 to nops(L) do
> R:=R+Co[i]*Calcul\mathrm{ch}(J,Q[i]): combinaison linéaire
d'intégrales sur les caractères
> od:
> R:
> end;

```

Remarque. Pour le bon fonctionnement de ce programme, nous devons implémenter les programmes dans MapleV dans l'ordre suivant $\{3, 4, 5\} \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 6$.

ANNEXE A. GUIDE DE L'ESPACE DE MODULES DES COURBES
STABLES

Dans cette annexe, nous donnons de façon synthétique les principaux résultats utilisés dans le texte. Pour plus de détails, nous renvoyons principalement à notre livre de référence [1].

A.1. Les courbes lisses :

Définition (Courbe lisse de genre g). Variété sur \mathbb{C} de dimension 1, irréductible, compacte et lisse, telle que $h^0(\omega) = g$ avec ω le fibré canonique de la courbe.

Définition (Courbe lisse de genre g à n points marqués). Donnée d'une courbe lisse C de genre g et de n points de C tous distincts entre eux.

Définition (Morphisme de courbes marquées). $f: (C; p_1, \dots, p_n) \rightarrow (C'; p'_1, \dots, p'_n)$ est un morphisme de variétés $f: C \rightarrow C'$ qui vérifie $f(p_i) = p'_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$.

Définition (Famille de courbes lisses marquées sur une base B). Donnée d'un morphisme plat¹¹ $\pi: X \rightarrow B$ pour lequel toutes les fibres sont des courbes lisses et de sections σ_i correspondant aux marquages des points.

Définition (Catégorie des familles de courbes lisses marquées). Les objets sont les familles de courbes lisses marquées sur une base et les morphismes de $(X \rightarrow B; \sigma_1, \dots, \sigma_n)$ vers $(X' \rightarrow B'; \sigma'_1, \dots, \sigma'_n)$ sont donnés par les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X' \\ \sigma_i \updownarrow & & \sigma'_i \updownarrow \\ B & \longrightarrow & B' \end{array}$$

Noté $\mathcal{M}_{g,n}$, c'est l'espace de modules des courbes lisses de genre g à n points marqués.

Cette catégorie a une structure algébrique particulière qui permet d'étendre toutes les notions de la géométrie algébrique qui sont nécessaires à la théorie de l'intersection décrite dans [5]. Il s'agit de la structure de *champ algébrique de type Deligne-Mumford* définie dans [10]. En particulier, $\mathcal{M}_{g,n}$ est lisse de dimension $3g - 3 + n$ mais n'est pas compacte. C'est pour cette raison que nous considérons maintenant les courbes nodales.

¹¹. Lorsque B est réduit, la platitude du morphisme entraîne que le genre des fibres est localement constant.

A.2. Les courbes nodales et les courbes stables :

Définition (Courbe nodale). Courbe algébrique complète, lisse en dehors d'un nombre fini de points appelés noeuds. Localement au voisinage d'un noeud, la courbe est définie par l'équation $xy = 0$ dans \mathbb{C}^2 . Ces noeuds sont des points doubles ordinaires.

Définition (Courbe nodale marquée). Courbe nodale sur laquelle nous distinguons des points marqués. Ces points doivent être différents non seulement entre eux mais aussi des noeuds.

Définition (Famille de courbes nodales). Morphisme plat dont chaque fibre est une courbe nodale.

Les familles de courbes nodales forment une catégorie, mais cette catégorie n'a pas les propriétés géométriques voulues. Par exemple, c'est un champ algébrique de Artin mais pas de Deligne-Mumford. Il y a des groupes d'automorphismes infinis et elle est non séparée. Nous devons nous restreindre aux courbes stables.

Définition (Courbe stable marquée). Courbe nodale marquée dont le groupe des automorphismes est fini. Prenons le faisceau $\omega(D)$ avec ω le faisceau canonique de la courbe nodale et D le diviseur correspondant aux points marqués. Une définition équivalente de la notion de stabilité d'une courbe nodale est de dire que $\omega(D)$ est ample.

Résultat 1 (Caractérisation de la notion de stabilité pour une courbe nodale marquée). *Une courbe nodale marquée est stable si et seulement si toutes ses composantes de genre 0 ont au moins trois points spéciaux et toutes ses composantes de genre 1 ont au moins un point spécial*¹².

Définition (Espace de modules des courbes stables). Catégorie des familles de courbes stables de genre g à n points marqués. Cet espace est un champ de Deligne-Mumford, lisse de dimension $3g - 3 + n$. C'est une compactification de $\mathcal{M}_{g,n}$, notée $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

Définition (Termes de bord). Ce sont les points de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n} - \mathcal{M}_{g,n}$, c'est-à-dire les points qui représentent les courbes nodales.

Définition (Espace des courbes universelles). Catégorie dont les objets sont des couples $([C], x)$ avec $[C] \in \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ et $x \in C$. Cet espace est un champ de Deligne-Mumford, muni d'un morphisme de projection canonique vers l'espace des courbes $\pi: \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$.

12. Un point spécial étant un point marqué ou un demi-noeud. Pour une courbe nodale, nous avons deux types de noeuds, les séparants et les non séparants. Un noeud séparant apporte un point spécial à la composante mais un noeud non séparant en apporte deux.

A.3. Le morphisme d'oubli :

Définition (Morphisme d'oubli semi-stable). Morphisme de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ vers $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{ss}$ qui, à un point $(C; p_1, \dots, p_{n+1})$ associe le point $(C; p_1, \dots, p_n)$. $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{ss}$ est une version de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ où nous admettons les courbes semi-stables, c'est-à-dire celles qui ont des composantes de genre 0 avec seulement deux points spéciaux¹³.

Définition (Morphisme de réduction stable). Morphisme de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}^{ss}$ vers $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ noté *Stab* dont l'effet sur une courbe semi-stable est de contracter sur un point chaque composante de genre 0 qui ne porte que deux points spéciaux. Se référer aux §4, 6 et 8 du chap.10 de [1], en particulier au théorème (4.11), pour l'existence de ce morphisme.

Un exemple de l'action de ce morphisme est illustré sur le dessin suivant

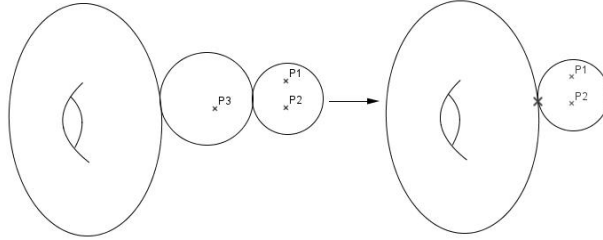


FIGURE 2. Exemple avec $p_{1,2}$

Définition (Morphisme d'oubli). Morphisme de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ vers $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, composé du morphisme d'oubli semi-stable et du morphisme de réduction stable. Se référer au §6 du chap.10 de [1] pour plus de détails sur l'existence de ce morphisme. Nous le noterons $p_{g,n} : \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, ou simplement p .

Résultat 2 (Identification entre morphismes d'oubli et de projection). *Le morphisme $p_{g,n}$ peut être identifié au morphisme de projection $\pi_{g,n} : \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ via le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{array}{ccc}
 \overline{\mathcal{C}}_{g,n} & & \\
 \pi_{g,n} \downarrow & \swarrow & \\
 \overline{\mathcal{M}}_{g,n} & \xleftarrow{p_{g,n}} & \overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}
 \end{array}$$

¹³. Les courbes semi-stables diffèrent peu des courbes stables mais cet espace a un mauvais comportement qu'il doit aux groupes d'automorphismes infinis de certains de ses points.

dans lequel la flèche $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1} \rightarrow \overline{\mathcal{C}}_{g,n}$ est un isomorphisme.

Le dessin suivant, emprunté à [12], évoque cette correspondance selon les trois cas possibles

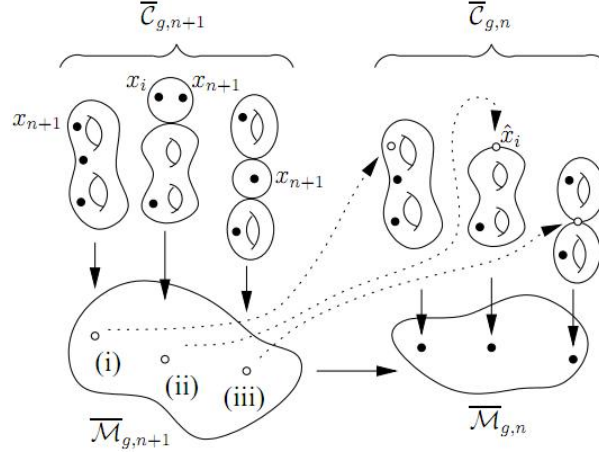


FIGURE 3. Identification de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$ avec $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$

Résultat 3. Nous avons la relation $p_{g,n*}p_{g,n}^* = 0$, pour tous g et n .

Démonstration. Pour des raisons de dimensions, $p_{g,n*}(\mathbf{1}) = 0$, ce qui entraîne $p_{g,n*}p_{g,n}^*(z) = z.p_{g,n*}(\mathbf{1}) = 0$, d'où finalement $p_{g,n*}p_{g,n}^* = 0$. \square

A.4. Les morphismes de recollement :

Définition (noeud séparant). Noeud d'une courbe nodale tel que la désingularisation en ce noeud produit deux composantes connexes. Dans le cas contraire où la désingularisation en le noeud reste connexe, le noeud est dit *non séparant*.

Définition (Morphisme de recollement de type arbre). Prenons g_1 et g_2 deux entiers tels que $g = g_1 + g_2$ et I un sous-ensemble de \mathbb{N}_n . Le morphisme de recollement de type arbre est un morphisme de $\overline{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n-|I|+1}$ vers $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. L'effet sur deux courbes C et C' de genre g_1 et g_2 respectivement et munies des marquages indexés par $I \cup \{n+1\}$ pour C et par $(\mathbb{N}_n - I) \cup \{n+2\}$ pour C' est de produire la courbe $(C \cup C')/(n+1 = n+2)$. Cette courbe porte les marquages nommés par I sur la composante de genre g_1 et les autres marquages sur la composante de genre g_2 . De plus, elle possède un nouveau noeud, de type séparant sur l'image du point $n+1$. Nous noterons $j_{\text{arbre},(g_1,g_2),n,I}$ ce morphisme, ou plus simplement j_{arbre} . Nous renvoyons au §7 du chap.10 de [1] pour une discussion détaillée sur ce morphisme.

Définition (Morphisme de recollement de type boucle). Morphisme de $\overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2}$ vers $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ dont l'effet sur une courbe marquée C est de produire la courbe $C/(n+1 = n+2)$. La courbe obtenue possède un nouveau noeud, de type non séparant. Nous noterons ce morphisme $j_{\text{boucle},g,n}$, ou plus simplement j_{boucle} . Nous renvoyons au §7 du chap.10 de [1] pour une discussion détaillée sur ce morphisme.

Remarque. Lorsque $g_1 = 0$ et $|I| \leq 1$ ou lorsque $g_1 = g$ et $|I| \geq n - 1$, le morphisme $j_{\text{arbre},(g_1,g_2),n,I}$ n'est pas défini. De même, lorsque $g = 0$ ou lorsque $g = 1$ et $n = 0$, le morphisme $j_{\text{boucle},g,n}$ n'est pas défini.

Nous pouvons regarder ces morphismes sous un autre éclairage en passant par la courbe universelle.

Définition (Lieu des noeuds et revêtement double). Le sous-champ de $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$ correspondant au lieu des noeuds forme un diviseur de codimension 2 que nous notons Δ . $N_{\Delta/\overline{\mathcal{M}}_{g,n}}$ en est le fibré normal. Ce sous-champ admet un revêtement étale double $j: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ donné en chaque point par un couple (noeud, choix d'une branche au noeud).

Résultat 4 (Identification des termes de bord). *Nous avons l'identification*

$$\tilde{\Delta} = \overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2} \cup \left(\bigcup_{g_1+g_2=g, I \subset \mathbb{N}_n} \overline{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n-|I|+1} \right)$$

et le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
 \overline{\mathcal{M}}_{g-1,n+2} & & & \xrightarrow{j_{\text{boucle},g,n}} & & & \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \\
 & \searrow & & & \nearrow & & \\
 & & \tilde{\Delta} & \xrightarrow{j} & \Delta & \hookrightarrow & \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \xrightarrow{\pi_{g,n}} \overline{\mathcal{M}}_{g,n} \\
 & \nearrow & & & \searrow & & \\
 \overline{\mathcal{M}}_{g_1,|I|+1} \times \overline{\mathcal{M}}_{g_2,n-|I|+1} & & & \xrightarrow{j_{\text{arbre},(g_1,g_2),n,I}} & & & \overline{\mathcal{M}}_{g,n}
 \end{array}$$

A.5. Quelques mots sur l'anneau des classes tautologiques :

L'étude complète de la cohomologie des espaces $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ constitue un problème ouvert. La première approche est l'étude du sous-anneau des classes tautologiques. Il s'agit d'une structure très riche qui possède de bonnes propriétés de factorisations sous les opérations d'oubli et de recollement. Il est difficile en pratique de construire des classes cohomologiques qui ne sont pas dans cet anneau mais cela a été fait dans [6].

Définition (Anneaux des classes tautologiques). La famille $(R_{g,n}^*)_{g,n}$, appelée famille des classes tautologiques, est la plus petite famille de sous-anneaux de $H^*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ stable sous les trois opérations fondamentales définies ci-dessus, c'est-à-dire en prenant l'image directe ou en tirant en arrière par les morphismes $p_{g,n}$, j_{boucle} et j_{arbre} .

Remarque. Nous avons $(\mathbf{1}_{g,n} \in R_{g,n}^*)_{g,n}$, puisque c'est un anneau. Ainsi, en considérant le système d'anneaux engendrés par $\mathbf{1}_{g,n}$ et par les opérations tirer en arrière et image directe par les morphismes $p_{g,n}$, $j_{\text{boucle},g,n}$ et $j_{\text{arbre},(g_1,g_2),n,I}$, nous obtenons toutes les classes tautologiques. En particulier, les termes de bord correspondent à des classes tautologiques.

Définition $(\delta_{(i,j)})$. Classe cohomologique associée au lieu des courbes comportant une composante de genre 0 attachée en un seul noeud et portant seulement les points marqués i et j . Cette classe est l'image directe de $\mathbf{1}_{g,n}$ par le morphisme j_{arbre} de $\overline{\mathcal{M}}_{g,\{1,\dots,i,\dots,n,\alpha\}} \times \overline{\mathcal{M}}_{0,\{i,n+1,\beta\}}$ vers $\overline{\mathcal{M}}_{g,n+1}$.

Définition $(\delta_{(k)})$. Classe cohomologique associée au terme de bord de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ dont les points représentent les courbes comportant une composante de genre 0 attachée en exactement deux noeuds et portant le point marqué k seulement.

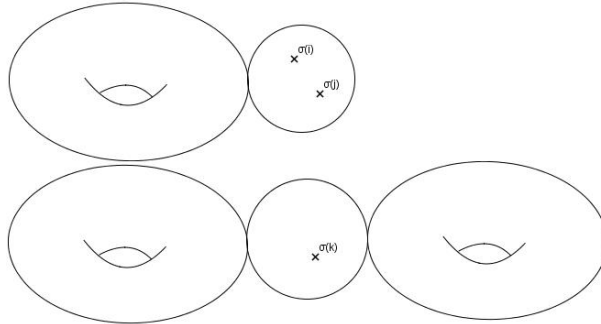


FIGURE 4. Exemples de courbes stables appartenant aux diviseurs $\delta_{(i,j)}$ et $\delta_{(k)}$

A.6. Certaines classes tautologiques et leurs relations :

Définition (Fibré cotangent relatif $\omega_{g,n}$). Il s'agit du faisceau cotangent relatif [9] au morphisme de projection $\pi: \overline{\mathcal{C}}_{g,n} \rightarrow \overline{\mathcal{M}}_{g,n}$. C'est un fibré en droite sur $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$, défini par exemple dans le §2 du chap.10 de [1], il intervient dans la dualité de Serre. Au voisinage d'un noeud, dans la

carte locale $p: (x, y) \rightarrow xy$, les sections de ce fibré sont engendrées par $\langle \frac{dx}{x}, \frac{dy}{y} \rangle$ modulo la relation $\frac{d(xy)}{xy} = \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$.

Définition (Fibré logarithmique $(\omega_{g,n})_{\log}$). Il est défini par $\omega_{g,n}(\sum_{i=1}^n \sigma_{i*}(\mathbf{1}))$.

Définition (Formes holomorphes et méromorphes d'une courbe nodale). Une 1-forme holomorphe sur $\bar{\mathcal{C}}_{g,n}$ peut avoir des pôles mais seulement sur les noeuds et à la condition que les résidus soient opposés sur chaque branche.

Une 1-forme méromorphe sur $\bar{\mathcal{C}}_{g,n}$ est une forme holomorphe qui peut avoir des pôles en dehors des noeuds¹⁴. Ceci fait l'objet de la formule (2.12) du §2 du chap.10 de [1].

Résultat 5. *Nous avons*

$$(\omega_{g,n})|_{\tilde{\Delta}} = \mathcal{O}$$

d'où

$$(28) \quad c_1(\omega_{g,n}) \cdot \Delta = 0.$$

Démonstration. La restriction de $\omega_{g,n}$ à Δ n'est pas nécessairement triviale. Les sections de $\omega_{g,n}$ peuvent avoir des pôles sur Δ mais le signe du résidu n'est pas bien défini.

En revanche, sur $\tilde{\Delta}$, nous avons une branche privilégiée et le signe du résidu est donc bien défini. Ainsi, $(\omega_{g,n})|_{\tilde{\Delta}}$ s'identifie avec \mathcal{O} par l'application des résidus. Par conséquent, nous avons

$$c_1(\omega_{g,n}) \cdot \tilde{\Delta} = 0$$

Comme $j: \tilde{\Delta} \rightarrow \Delta$ est un revêtement étale [2: 1], $c_1(\omega_{g,n}) \cdot \tilde{\Delta} = 2c_1(\omega_{g,n}) \cdot \Delta$ et la proposition en découle. \square

Définition (Classes ψ_i). Pour $1 \leq i \leq n$, nous posons $\psi_i = c_1(\sigma_i^*(\omega_{g,n}))$, où σ_i est la section correspondant au point marqué i .

Résultat 6. [12] *Sous l'identification (2), nous avons*

$$(29) \quad c_1(\omega_{g,n}) = \psi_{n+1} - \sum_{i=1}^n \delta_{(i,n+1)}.$$

\square

¹⁴. Les éventuels pôles en les noeuds ne comptent pas vraiment. Par exemple, dans la formule « #zéros - #pôles » pour calculer la caractéristique d'Euler du fibré, nous ne devons pas les compter.

Résultat 7. [12] *Sous l'identification (2), nous avons*

$$\delta_{(i,n+1)} = \sigma_{i*}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$$

et

$$\delta_{(n+1)} = \Delta$$

□

Résultat 8. *Pour tous i, j distincts de $n + 1$ et distincts entre eux,*

$$(30) \quad \delta_{(i,n+1)}\delta_{(j,n+1)} = 0$$

$$\delta_{(i,j)}\delta_{(n+1)} = 0$$

$$(31) \quad \delta_{(i,j)}\psi_i = 0$$

Démonstration. Les sections du fibré $\omega_{g,n \log}$ sont les 1-formes qui ont des pôles simples sur les points marqués. Nous pouvons donc identifier la restriction de ce fibré sur $\sigma_{i*}(\mathbf{1})$ avec le fibré des résidus, d'où l'égalité

$$(32) \quad c_1(\omega_{g,n \log}) \cdot \sigma_{i*}(\mathbf{1}) = 0$$

Enfin, nous utilisons (29) pour conclure. □

Résultat 9. *Les classes ψ_i sont des classes tautologiques.*

Plus précisément, nous avons

$$(33) \quad \psi_i = -p_{g,n*}(\delta_{(i,n+1)}^2) \in R_{g,n}^*$$

et même

$$(34) \quad p_{g,n*}(\delta_{(i,n+1)}^{2k}) = -\psi_i^{2k-1}.$$

Démonstration. Pour montrer (33), nous devons étudier l'auto-intersection de $\sigma_{i*}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$. Pour cela, nous utilisons (7).

Cela vaut $c_{top}(N_{\sigma_{i*}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})/\overline{\mathcal{C}}_{g,n}})$ et le fibré normal s'identifie naturellement avec $T_{\sigma_i \overline{\mathcal{C}}_{g,n}}/T_{\sigma_i \sigma_{i*}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})}$ qui n'est autre que le fibré $(\sigma_i^*(\omega_{g,n}))^\vee$. Comme $\sigma_{i*}(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$ est de codimension 1 dans $\overline{\mathcal{C}}_{g,n}$, $c_{top} = c_1$ et le premier résultat est démontré.

Pour (34), nous écrivons

$$\begin{aligned} p_{g,n*}(\delta_{(i,n+1)}^{2k}) &\stackrel{(33)}{=} p_{g,n*}(\delta_{(i,n+1)}^2(\psi_i - p_{g,n}^*(\psi_i))^{2k-2}) \\ &= p_{g,n*}(\delta_{(i,n+1)}^2(-p_{g,n}^*(\psi_i))^{2k-2}) \\ &= (-1)^{2k-2} p_{g,n*}(\delta_{(i,n+1)}^2 p_{g,n}^*(\psi_i^{2k-2})) \\ &= \psi_i^{2k-2} p_{g,n*}(\delta_{(i,n+1)}^2) \\ &\stackrel{(33)}{=} -\psi_i^{2k-1} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation (31). □

Résultat 10. *Nous avons les égalités suivantes*

$$\begin{aligned} p_{g,n*}(\psi_{n+1}) &= 2g - 2 + n \\ p_{g,n*}(\delta_{(i,n+1)}) &= 1. \end{aligned}$$

Démonstration. La deuxième égalité vient de

$$p_{g,n*}(\delta_{(i,n+1)}) \stackrel{(7)}{=} p_{g,n*}(\sigma_{i*}(\mathbf{1})) = 1.$$

De plus, nous avons, d'après (10) et ce qui précède, nous avons la première égalité

$$p_{g,n*}(\psi_{n+1}) \stackrel{(29)}{=} p_{g,n*}(c_1(\omega_{g,n}) + \sum_{i=1}^n \delta_{(i,n+1)}) = 2g - 2 + n.$$

□

Définition (Fibré de Hodge et classes λ_d). Le faisceau $R\pi_{g,n*}(\omega_{g,n})$ est un fibré vectoriel de rang g sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$, appelé fibré de Hodge et noté Λ . Ceci a déjà été vu dans (1.3).

Pour $1 \leq d \leq g$, nous posons $\lambda_d = c_d(\Lambda)$.

Corollaire A.6.1 (du théorème (1.3.1) et du résultat (9)). *Les classes λ_d sont des classes tautologiques.*

RÉFÉRENCES

- [1] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip A. Griffiths. *Geometry of Algebraic Curves. Volume II* - Volume 268 Springer-Verlag, N.Y.
- [2] Alessandro Chiodo, Yong-Bin Ruan. *Landau-Ginzburg/Calabi-Yau correspondence for quintic three-folds via symplectic transformations.* - arXiv :math/0812.4660
- [3] D. Eisenbud. *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry.* Chapitre 17 - 2004, Springer.
- [4] Carel Faber. *Programme informatique.* - [http : //math.stanford.edu/vakil/programs/index.html](http://math.stanford.edu/vakil/programs/index.html).
- [5] William Fulton. *Intersection Theory.* - A Series of Modern Surveys in Mathematics, Springer-Verlag, N.Y.
- [6] Tom Graber, Rahul Pandharipande. *Constructions of nontautological classes on moduli spaces of curves.* - arXiv :math/0104057.
- [7] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry.* - Graduate texts in mathematics, 52, 1997, Springer-Verlag, N.Y.
- [8] Maxim Kontsevich. *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function.* - Communications in Mathematical Physics vol. 147 (1992), pages 1 – 23.
- [9] Qing Liu. *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves* (théorème 4.9 du chap.6) - Oxford Graduate Texts in Mathematics.

- [10] David Mumford. *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curve*. - Arithmetic and Geometry II (M. Artin and J. Tate eds). Progress in Mathematics 36, Birkhäuser, Boston, 1983, pp. 271 – 328.
- [11] Edward Witten. *Two dimensional gravity and intersection theory on moduli space*. - Surveys in Differential Geometry, vol. 1 (1991), p. 243 – 310.
- [12] Dimitri Zvonkine. *An introduction to moduli spaces of curves and its intersection theory*. - Ecole d'été de l'institut Fourier de Grenoble. <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/Course-notes,1097.html>