Partiel, MAT 103

26 octobre 2023

Généralement, on peut enlever 0.5 points pour chaque erreur de calcul (dans la limite du nombre de point indiqué).

Exercice 1 :

1. (1.5 points) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 < 2xy$

2. (a) (1.5 points) Soient $x, y \in \mathbb{R}$, $(x-y)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy$

   (b) (1 point) Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2xy \\ x^2 + z^2 \geq 2xz \\ y^2 + z^2 \geq 2yz \end{cases} \Rightarrow \; x^2 + y^2 + x^2 + z^2 + y^2 + z^2 \geq 2xy + 2xz + 2yz$$

   En divisant par 2, on obtient $xy + xz + yz \leq x^2 + y^2 + z^2$

Exercice 2 :

1. (2 points) La hauteur atteinte lors du premier rebond étant $160 \times (1 - \frac{50}{100}) = 80$, celle atteinte après le second rebond est $80 \times (1 - \frac{50}{100}) = 40$.

2. (2 points) La hauteur atteinte après le troisième rebond est $40 \times (1 - \frac{50}{100}) = 20$.

On peut compter 2 points à ceux qui donne 80 pour la hauteur atteinte après le second rebond et 40 pour la hauteur atteinte après le troisième rebond.

Exercice 3 :

1. (1 point) $\log(10^n) = n \times \log(10) = n \times \frac{\ln(10)}{\ln(10)}$.

2. (1 point) $pH = -log(0.0005) = -\log(5 \times 10^{-4}) = -\log 5 + 4 \sim 3.3$.
   On peut mettre 0.5 points à l'étudiant qui écrit 0.00005 en écriture scientifique.

Exercice 4 :
Le domaine de définition est sur 0.5 points quand il n'est pas $\mathbb{R}$.

1. (a) (0.5 points) Le domaine de définition est $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

   (b) (1.5 points) Soit $x \in \mathcal{D}$.
   Si $x < 1$, alors

$$\frac{2x+1}{x-1} < 1 \iff 2x + 1 > x - 1 \iff x > -2 \; .$$

Si $x > 1$, alors
$$\frac{2x+1}{x-1} < 1 \iff 2x+1 < x-1 \iff x < -2 \ .$$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} =]-2, 1[$.

2. (a) (0.5 points) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x+2 > 0 \ et \ 3x-3 > 0\} =]1, \infty[$.
   (b) (1.5 points) Soit $x \in \mathcal{D}$.
   $$\ln(x+2) = \ln(x+3) \iff x+2 = 3x-3 \iff x = \frac{5}{2} \ .$$
   $\frac{5}{2} \in \mathcal{D}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\frac{5}{2}\}$.

3. (a) (0.5 points) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x+2 > 0 \ et \ x > 0\} =]0, \infty[$
   (b) (1 point) Soit $x \in \mathcal{D}$.
   $$\ln(3x+2) - \ln(x) = 1 \iff \ln(\frac{3x+2}{x}) = 1 \iff \frac{3x+2}{x} = e \iff x = \frac{-2}{3-e} \ .$$
   (c) (0.5 points) $\frac{-2}{3-e} \notin \mathcal{D}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \emptyset$. Mettre le demi-point s'ils disent "il faut vérifier que $\frac{-2}{3-e} \notin \mathcal{D}$".

4. (2 points) Soit $x \in \mathcal{D}$.
   $$e^{3x-1}e^{x+2} = 1 \iff e^{4x+1} = 1 \iff 4x+1 = 0 \iff x = \frac{-1}{4} \ .$$
   $\frac{-1}{4} \in \mathcal{D}$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{\frac{-1}{4}\}$.

5. (2 points) Soit $x \in \mathcal{D} = \mathbb{R}$ et soit $X = e^x$.
   $$e^{2x} - e^x - 6 \geq 0 \iff X^2 - X - 6 \geq 0 \ .$$
   On peut mettre la résolution de l'équation $X^2 - X - 6 = 0$ sur 1 point. Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ et les solutions sont -2 et 3.
   $$e^{2x} - e^x - 6 \geq 0 \iff X \leq -2 \ ou \ X \geq 3 \iff (e^x \leq -2 \ ou) \ e^x \geq 3 \iff x \leq \ln 3 \ .$$
   L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = [\ln 3, \infty[$.