Université Grenoble Alpes — **Année 2023-2024**
Licence de mathématiques, 3e année — **Calcul différentiel, parcours A**

Contrôle continu numéro 1
5 mars 2024

Une feuille A4 autorisée, pas de calculatrice.

Exercice 1 On considère les applications f et g définies par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) &\mapsto (zx, z-2y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto (y^2 - e^x, \sin(\pi x y)) \end{aligned}$$

Soit $a = (1,0,1)$.

1. Calculer la matrice jacobienne de f en a ;
2. Calculer la matrice jacobienne de g en $f(a)$;
3. En déduire la matrice jacobienne de $g \circ f$ en a. L'application $d(g\circ f)(a)$ est-elle inversible ? Injective ? Surjective ?

Réponses

$$Jac(f,(x,y,z)) = \begin{pmatrix} z & 0 & x \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{(x,y,z)=a}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$Jac(g,(x,y)) = \begin{pmatrix} -e^x & 2y \\ \pi y \cos(\pi x y) & \pi x \cos(\pi x y) \end{pmatrix} \underset{(x,y)=f(a)=(1,1)}{=} \begin{pmatrix} -e & 2 \\ -\pi & -\pi \end{pmatrix}$$

Par la règle de composition des différentielles,

$$Jac(g\circ f, a) = Jac(g, f(a)) Jac(f,a) = \begin{pmatrix} -e & 2 \\ -\pi & -\pi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e & -4 & 2-e \\ -\pi & 2\pi & -2\pi \end{pmatrix}$$

L'application linéaire $d(g\circ f)(a) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ne peut pas être injective car $3 > 2$, donc ne peut pas être bijective. De plus les deux premières colonnes de la jacobienne sont libres car $(-e)(-2\pi) - 4\pi \neq 0$ donc le rang de $d(g\circ f)(a)$ est au moins $2 = \dim \mathbb{R}^2$, donc l'application est surjective.

Exercice 2 On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + \sin^2 y} & \text{si } x^2 + \sin^2 y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que si $a = (x,y) \neq (0,0)$ satisfait $x^2 + \sin^2 y = 0$, alors f n'est pas bornée au voisinage de a.
2. Montrer que f est continue en $(0,0)$. On pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité

$$\forall t \in [0, \pi/2],\ \sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t.$$

3. Quel est l'ensemble de continuité de f ?
4. Montrer que f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$. Que valent les dérivées partielles ? En déduire que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Corrigé Soit (x,y) tels que $x^2+\sin^2 y=0$. C'est équivalent à dire que $x=0$ et $y\in\pi\mathbb{Z}$. Soit $k\in\mathbb{Z}^*$. Alors pour tout

$$\forall x\neq 0, |f(x,\pi k)| = \pi^2k^2|x|/x^2 = \pi^2k^2/|x|$$

qui tend vers l'infini en 0 ($k\neq 0$). Donc f n'est pas bornée au voisinage de (x,y). En particulier f n'a pas de limite en $(x,k\pi)$.

Montrons que f est continue en $(0,0)$. En effet $|\sin y|\geqslant \dfrac{2}{\pi}|y|$ sur $[-\pi/2,\pi/2]$, donc

$$\forall x\in\mathbb{R}, |y|\leqslant \pi/2,\ |f(x,y)|\leqslant \frac{|x|y^2}{x^2+\frac{4}{\pi^2}y^2}.$$

En passant en polaires, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, et en bornant $\sin^2$ et $|\cos|$ par 1,

$$|f(x,y)|\leqslant r\frac{1}{\cos^2\theta+\frac{4}{\pi^2}\sin^2\theta}$$

ou vaut 0. Le dénominateur est une fonction continue strictement positive de θ sur le compact $[0,2\pi]$. En effet il est positif ou nul, et s'il s'annule alors $\cos\theta=\sin\theta=0$ ce qui est impossible. Donc le dénominateur atteint son minimum, et donc il existe $c>0$ telle que $|f(x,y)|\leqslant r/c$ pour r assez petit. On a donc $f \underset{(x,y)\to(0,0)}{\to} 0 = f(0,0)$.

Le numérateur est polynomial donc $\mathscr{C}^\infty$, le dénominateur est aussi $\mathscr{C}^\infty$ car $\sin^2$ l'est ainsi que x^2 qui est polynomial. Donc f est continue partout où le dénominateur est non nul. Donc le domaine de continuité de f contient

$$\mathbb{R}^2\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{(0,\pi k)\}.$$

Par ailleurs f est continue en $(0,0)$ et discontinue en tout point de $\cup_{k\in\mathbb{Z}^*}\{(0,\pi k)\}$ par les questions précédentes. Au finale, l'ensemble de continuité est égal à

$$\mathbb{R}^2\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}^*}\{(0,\pi k)\}.$$

Soit $v=(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus(0,0)$ une direction fixée et $t\in\mathbb{R}^*$. Alors pour t assez petit, $(tx)^2+\sin^2(ty)\neq 0$ et donc

$$\frac{f(tv)-f(0,0)}{t} = \frac{xy^3}{x^2+\frac{\sin^2(ty)}{t^2}} \to_{t\to 0} \frac{xy^3}{x^2+y^2}.$$

Donc f a des dérivées dans toutes les directions. Par ailleurs en appliquant ce qui précède à $v=(1,0)$ puis $v=(0,1)$ on obtient $\partial f/\partial x=\partial f/\partial y(0,0)=0$. Donc si

f est différentiable en $(0,0)$, $df(0,0)=0$. Mais la dérviée directionnelle selon $(1,1)$ vaut $1/2$ et $df(0,0)(1,1)$ ce qui est contradictoire.

Exercice 3 Soit $E=\mathbb{R}[X]$ muni de la norme N définie par :

$$N(\sum_{i=0}^{d} a_i X^i) = \sum_{i}^{d} |a_i|.$$

et $F=\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty([0,1])}$. On fixe une fonction $\varphi \in F$, et on définit

$$\begin{array}{rcl} f_\varphi : E & \to & F \\ P & \mapsto & P^2 \circ \varphi. \end{array}$$

1. Montrer que f_φ est bien définie.
2. Soit $L_\varphi : E \to F$ définie par

$$\begin{array}{rcl} L_\varphi : E & \to & F \\ Q & \mapsto & Q \circ \varphi \end{array}$$

   (a) On suppose que φ est à valeurs dans $[-1,1]$. Montrer que L_φ est continue.
   (b) On suppose que $\varphi = 2$. Montrer que L_φ n'est pas continue.

   Dans toute la suite, on suppose que

$$\forall x \in [0,1], |\varphi(x)| \leqslant 1.$$

3. Montrer que
$$f_\varphi(Q) = \mathrm{o}(Q).$$
4. En déduire que f_φ est différentiable sur E et calculer la différentielle de f_φ en un polynôme P.
5. On suppose que $\varphi = 1$. Soit $P \in E$. Que vaut $|||df(P)|||$?

Corrigé f_φ est bien définie car P^2 est $\mathscr{C}^0$ ainsi que φ, par compostion f_φ l'est aussi et est définie sur $[0,1]$.

Si $Q = \sum_i a_i X^i$, alors

$$\forall x \in [0,1], |L_\varphi(Q)(x)| \leqslant |a_i| \|\varphi\|_\infty^i \leqslant N(Q)$$

car $\|\varphi^i\|_\infty = \|\varphi\|_\infty^i \leqslant 1$ pour $i \in \mathbb{N}$. Comme f_φ est linéaire et lipschitzienne, elle est continue. Par ailleurs sa norme est inférieure à 1.

Si $\varphi = 2$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in [0,1],\ |L_2(X^n)(x)| = 2^n \to \infty$ donc

$$\|L_2(X^n)\|_{\infty[0,1]} \to_n \infty$$

alors que $N(X^n) = 1$. Donc l'application linéaire L_2 n'est pas bornée sur la sphère unité de E, et donc pas continue.

Maintenant

$$\forall x \in [0,1], |f_\varphi(Q)(x)| = |\sum a_i \varphi^i(x)|^2 \leqslant \sum_{i,j} |a_i||a_j|\|\varphi\|_\infty^{i+j} \leqslant \sum_{i,j} |a_i||a_j| = (N(Q))^2 = o(N(Q)).$$

donc $\|f_\varphi(Q)\|_{\infty[0,1]} = o(Q)$.

Soit $P, Q \in E$. On a

$$f_\varphi(P+Q) = f_\varphi(P) + 2L_\varphi(P)L_\varphi(Q) + f_\varphi(Q).$$

L'application $Q \mapsto 2L_\varphi(P)L_\varphi(Q)$ est linéaire et continue par la question précédente, et $f_\varphi(Q) = o(Q)$, donc f est différentiable et

$$df(P) = 2L_\varphi(P)L_\varphi.$$

Si $\varphi = 1$, $df(P) = 2P(1)L_1$. Comme par la question ci-dessus, $|||L_1\| \leqslant 2$, $|||df(P)||| \leqslant 2|P(1)|$. Maintenant $|df(P)(1)| = 2|P(1)|$ donc puisque $N(1) = 1$,

$$|||df(P)||| = 2|P(1)|.$$

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = (e^x y, x^2).$$

1. Montrer que f est C^1.
2. Soit
$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}.$$
Montrer que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Déterminer $f(U)$, puis démontrer que $f_{|U}$ est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$.
3. Montrer que U est maximal, c'est-à-dire pour tout ouvert V contenant strictement U, $f_{|V}$ n'est pas un difféomorphisme sur son image.
4. Calculer la jacobienne de f^{-1} au point $(e, 1)$.

Réponses. Comme exp est C^1, et y, x^2 polynomiaux donc C^1, par produit f est C^1.

Soit $g(x,y) = x$. La fonction g est polynomiale donc continue. De plus $\mathbb{R}_+^*$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (intervalle ouvert), donc $g^{-1}(\mathbb{R}_+^*)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

On a $f(U) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ car $x^2 > 0$ si $(x,y) \in U$. Soit $(u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f(\sqrt{v}, ue^{-\sqrt{v}}) = (u,v)$$

avec $\sqrt{v} > 0$, donc $(\sqrt{v}, ue^{-\sqrt{v}}) \in U$, et finalement $f(U) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

Soit $(x, y), (x', y') \in U$ avec même image. Alors $x^2 = x'^2$, donc $x = \pm x'$ mais $x > 0$ et $x' > 0$ implique $x = x'$. De plus $e^x y = e^{x'} y'$ donc comme $e^x \neq 0$, on a $y = y'$ donc $f_{|U}$ est injective. Maintenant pour tout $(u, v) \in f(U)$,

$$f^{-1}(u, v) = (\sqrt{v}, ue^{-\sqrt{v}})$$

est C^1 car $x \mapsto \sqrt{x}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et exp est lisse, donc f est un C^1-difféomorphisme. On peut aussi calculer la jacobienne

$$Jac(f, (x, y)) = \begin{pmatrix} e^x y & e^x \\ 2x & 0 \end{pmatrix}$$

de déterminant $-2xe^x$ non nul sur U. Par le théorème d'inversion global, $f_{|U}$ est un C^1-difféomorphisme sur son image.

Soit V un ouvert contenant strictement U. Alors il existe (x, y) tel que $x = 0$ ou $x < 0$. Dans le second cas,

$$f(x, y) = f(-x, ye^{2x})$$

avec $(x, y) \neq (-x, ye^{2x})$ car $x < 0$, donc $f_{|V}$ n'est pas injective. Dans le premier cas, comme V est ouvert, il existe une boule ouverte contenant $(0, y)$ et incluse dans V, donc il y a un point $(x', y') \in V$ avec $x' < 0$ et on se ramène à la première situation.
D'abord $(e, 1) = f(1, 1)$. Ensuite

$$Jac(f, (1, 1)) = \begin{pmatrix} e & e \\ 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$Jac(f^{-1}, f(1, 1))$ est l'inverse de cette matrice, soit

$$\frac{1}{-2e} \begin{pmatrix} 0 & -e \\ -2 & e \end{pmatrix}.$$