Université Grenoble Alpes — **Année 2022-2023**
Licence de mathématiques, 3e année — **Calcul différentiel, parcours A**

Contrôle continu numéro 1
6 février 2023

Exercice 1 Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs réelles, muni de la norme infinie. Soit $\varphi : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall f \in E,\ \varphi(f) = \int_0^1 f^2(t)dt.$$

1. L'application φ est-elle linéaire ?
2. Montrer que φ est continue.
3. Montrer que φ est différentiable sur E et donner sa différentielle en tout point $f \in E$.
4. Pour tout k, on définit la fonction $e_k \in E$ par $e_k(x) = x^k$. Calculer la dérivée $\partial_{e_k}\varphi(1)$ de φ selon le vecteur e_k au point $1 \in E$ (la fonction constante égale à 1).

Exercice 2 On considère les applications f et g définies par

$$\begin{array}{llll} f : \mathbb{R}^2 & \to \mathbb{R}^3 & \qquad g : \mathbb{R}^3 & \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto (x^2y, xy, xy^3) & \qquad (x,y,z) & \mapsto (x+y+z, xyz) \end{array}$$

Soit $a = (x,y)$. Calculer

1. la matrice jacobienne de f en a,
2. la matrice jacobienne de g en $f(a)$,
3. la matrice jacobienne de $g \circ f$ en a.

Exercice 3 Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, et $k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction différentiable sur $\mathbb{R}^n$. Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ V(x) = \langle Mx, x\rangle + \|x - k(x)\|_2^2.$$

1. Montrer que V est différentiable en tout point $a \in \mathbb{R}^n$, et calculer sa différentielle en a.
2. Montrer que $dV(0) = 0$ si et seulement si $k(0)$ est dans le noyau d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ qu'on déterminera en fonction de $dk(0)$.

Exercice 4 On considère la fonction

$$f(x,y) = \frac{x^5}{\sin^2 x + \cos^2 y},$$

définie sur un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}^2$.

1. Quel est l'ensemble de définition D_f de f ? Montrer que f est différentiable sur D_f.
2. Déterminer l'ensemble des points $a \in \mathbb{R}^2 \setminus D_f$ tels que f se prolonge par continuité en a. On note $\tilde{f}$ son prolongement par continuité.
3. Montrer que $\tilde{f}$ est différentiable en $(0, \pi/2)$. Que vaut $d\tilde{f}(0, \pi/2)$?

Exercice 5 Soit la fonction

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & e^{xy} - x^2 y. \end{array}$$

et $C = F^{-1}(0)$.

1. Montrer que F est $\mathcal{C}^2$. Calculer les dérivées partielles de F. En déduire que

$$S := \{(x,y), F(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 0\}$$

est réduit à un point $A \in \mathbb{R}^2$ qu'on déterminera (attention à la rédaction).

Dans la suite (a,b) est un point de $C \setminus \{A\}$.

2. Montrer que, près de (a,b), C est localement le graphe d'une fonction C^2 $\varphi : I \to J$ où I est un intervalle ouvert contenant a et J un intervalle de $\mathbb{R}$.
3. Donner une équation de la tangente à C au point (a,b). Cette tangente peut-elle être horizontale ? Verticale ?
4. *Question bonus* : montrer que C n'est pas borné.