Premier contrôle continu de Topologie A (28/09/2016)

Premier Semestre 2016-2017

Justifier toutes les réponses - Le barème est seulement indicatif.

Exercice 1. (2 pt.) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b]^{\mathbb{N}}$. Montrer que si f est continue en α et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α alors $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Indiquer sa limite et donner un exemple qui montre que l'hypothèse de continuité de f est nécessaire.

Exercice 2. (4 pt.) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est exactement l'intervalle

$$\Big[\liminf_{n\to\infty} x_n, \limsup_{n\to\infty} x_n\Big].$$

Exercice 3. (4 pt.) Soit $a \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{a} \notin \mathbb{Q}$. On pose $\alpha = \sqrt{a}$. Démontrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ avec $c > 0$ tel que

$$|q\alpha - p| > \frac{c}{q} \tag{$\clubsuit$}$$

pour tous les nombres entiers $p, q \in \mathbb{Z}$ avec $q > 0$.

> **Indication:** Soit c tel que $0 < c < \min\{|\alpha|, 1/(3|\alpha|)\}$. Montrer que l'ensemble
>
> $$\big\{ |(q\alpha - p)(q\alpha + p)| : \ p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{Z}_{>0} \big\}$$
>
> est minoré par 1. Utiliser ce résultat pour prouver l'inégalité ($\clubsuit$).

Exercice 4. (3 pt.) On dit qu'une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ est **finalement arithmétique** s'ils existent $n_0 \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Q}$ tels que $a_{n+1} - a_n = q$ pour tout $n \geq n_0$. Démontrer que l'ensemble

$$\big\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} : \ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est finalement arithmétique } \big\}$$

est dénombrable.

Exercice 5. (4 pt.) Soit $(a_n)_{\mathbb{N}^*} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}^*}$ une suite possédant une valeur d'adhérence $c > 0$. Démontrer qu'il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que la suite $(b_n)_{\mathbb{N}^*}$ définie par $b_n = a_{\sigma(n)}^{1/n}$ soit convergente.

> **Indication:** Soit $d > 1$ tel que $c \in]d^{-1}, d[$. Montrer que l'ensemble
>
> $$A_1 = \big\{ n \in \mathbb{N}^* : a_n \in]d^{-1}, d[\big\}$$
>
> est non vide et poser $\sigma(1) = \min A_1$. En employant un argument semblable, continuer la construction d'une application strictement croissante $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que la suite $(b_n)_{\mathbb{N}^*}$ définie par $b_n = a_{\sigma(n)}^{1/n}$ soit convergente.

Exercice 6. (3 pt.) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit une suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $b_n = a_{n-1} + 2a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente avec limite ℓ, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi convergente. Exprimer sa limite en fonction de ℓ.