UJF L3 mathématiques — Octobre 2015

Mat35b Algèbre A, groupe 2

Feuille d'exercices n°6

1. Dans S_{11}, on considère les permutations

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 2 & 6 & 4 & 1 & 5 & 7 & 11 & 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

et

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 9 & 3 & 4 & 5 & 6 & 2 & 8 & 10 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer supp(σ) et supp(τ). Montrer sans calcul que σ et τ commutent.

b) Retrouver ce résultat par calcul direct.

2. Décomposer en produit de cycles à supports disjoints les permutations de S_{10}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 2 & 7 & 9 & 6 & 10 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix},$$

$$(1\ 2\ 3\ 4\ 5)(1\ 5\ 9)(2\ 4\ 9)\ ,\ (1\ 8\ 6\ 7)(8\ 6\ 7\ 5)(6\ 7\ 5\ 1),$$

$(1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6)(6\ 7)(7\ 1)$ et $(1\ 8)(1\ 7)(1\ 6)(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$.

b) Calculer l'ordre / puis la signature de chacune de ces permutations.

3. Trouver un 4–cycle σ tel que $\tau = (1\ 2)$ et σ n'engendrent pas S_4 (penser aux isométries du carré).

4. Soient $\sigma = (1\ 2\ 3)(1\ 2\ 4)$ et $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer σ^3 et η^{2015}.

5. a) Soit p un nombre premier. Montrer que les éléments d'ordre p de S_p sont exactement les p–cycles. Le résultat subsiste-t-il si p n'est pas premier?

b) Donner les classes de conjugaison et les ordres dans S_5; l'ordre maximal d'un élément de S_{10}; *****le nombre de classes de conjugaison d'éléments d'ordre 6 dans S_9.

c) Déterminer le nombre de n-cycles de S_n. Quel est le centralisateur d'un n–cycle σ?

6. Un joueur professionnel mélange un paquet de cartes plusieurs fois par la méthode suivante : il sépare le paquet en deux moitiés égales, puis intercale une carte sur deux de chaque paquet, en gardant la première carte de la première moitié sur le dessus.

L'expérimentation avec 8 cartes montre qu'au bout de 3 mélanges successifs, les cartes sont revenues dans le même ordre! S'agit-il d'un cas particulier? Le même phénomène se produit-il avec un nombre arbitraire pair de cartes?

Que se passe-t-il si on change la façon de mélanger en gardant la première carte de la seconde moitié sur le dessus?

7. Les permutations suivantes sont-elles conjuguées ? Si oui, donner une permutation qui conjugue la première en la seconde.

i) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 5 & 8 & 2 & 7 & 9 & 6 & 10 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$

ii) $(1\ 2\ 4\ 5)(1\ 5\ 9)(2\ 4\ 9)$ et $(1\ 8\ 6\ 7)(8\ 6\ 7\ 5)(6\ 7\ 5\ 1)$,

iii) $(1\ 2)(2\ 3)(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6)(6\ 7)(7\ 1)$ et $(1\ 8)(1\ 7)(1\ 6)(1\ 5)(1\ 4)(1\ 3)(1\ 2)$.

8. *Puissances de cycles* Soit σ un k–cycle de S_n. On veut montrer que pour tout $d \geq 1$, σ^d se décompose en $\mathrm{pgcd}(k, d)$ cycles de longueur $\frac{k}{\mathrm{pgcd}(k,d)}$ à supports disjoints.

a*) Montrer qu'il suffit d'établir le résultat pour $k = n$.

Indication. Seuls les éléments du support de σ vont éventuellement avoir une orbite non triviale.

b*) Quel est alors le stabilisateur d'un point i de $\{1, \ldots, n\}$ sous l'action de $< \sigma >$? de $< \sigma^d >$?

c*) En déduire le cardinal de l'orbite de i sous $< \sigma^d >$ et conclure.

d) En déduire les deux cas particuliers suivants: si $\sigma \in S_n$ est un k–cycle, et si $d \geq 1$ est un entier, alors:

- si $d \mid k$, σ^d est produit de k cycles de longueur k/d à supports disjoints.
- si d et k sont premiers entre eux, σ^d est un k–cycle.

9. Soit p un nombre premier. Soient σ un p–cycle et τ une transposition de S_p. On veut montrer que $\{\sigma, \tau\}$ engendre S_p.

a) Soit $\rho \in S_p$. Montrer que σ et τ engendrent S_p si et seulement si $\rho\sigma\rho^{-1}$ et $\rho\tau\rho^{-1}$ engendrent S_p. En déduire que l'on peut supposer $\tau = (1\ 2)$.

b) Montrer qu'il existe $1 \leq d \leq p - 1$ tel que $\sigma^d(1) = 2$. Justifier que σ^d est encore un p–cycle (on pourra utiliser l'exercice 5.a)).

c) Montrer que $\{\sigma, \tau\}$ engendre S_p si et seulement si $\{\sigma^d, \tau\}$ engendre S_p. En déduire que l'on peut supposer que $\sigma(1) = 2$.

On suppose donc que $\sigma = (1\ 2\ a_3 \cdots a_p)$ et $\tau = (1\ 2)$.

d) Montrer qu'il existe $\rho \in S_p$ tel que $\rho\sigma\rho^{-1} = (1\ 2 \cdots p)$ et $\rho\tau\rho^{-1} = (1\ 2)$ et conclure.

10. Étant donnée une permutation σ de S_n, on dit qu'une paire $\{i, j\}$ incluse dans $\{1, \ldots, n\}$ est *en inversion* pour σ si on a $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $I(\sigma)$ le nombre de ces paires. Comment s'en déduit la signature de σ? Calculer $I(\sigma)$ pour σ le k–cycle $(2\ 3\ \ldots k+1)$ puis la transposition $(1\ i)$ de S_n $(i \geq 2)$.

11. Déterminer tous les morphismes de S_n dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, puis dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, puis dans A groupe abélien donné.

12. Montrer que toute permutation d'ordre 10 dans S_8 est de signature -1.
Existe-t-il un morphisme injectif de S_7 dans A_8?

13. Soit $n \geq 3$. Montrer que A_n est engendré par les éléments $(1\ 2\ i)$, $3 \leq i \leq n$.

14. a) Trouver toutes les formes possibles de décomposition en cycles à supports disjoints des éléments de A_4. En déduire l'ordre des éléments de A_4 et le nombre d'éléments d'un ordre donné.

b) Déterminer les classes de conjugaison dans A_4 (on pourra montrer que tout 3–cycle est conjugué à $(1\ 2\ 3)$ ou $(1\ 3\ 2)$).

c) On veut montrer que A_4 n'a pas de sous–groupe d'ordre 6. On raisonne par l'absurde en supposant qu'un tel sous–groupe H existe. On sait donc que H, d'indice 2, est distingué dans A_4.

(i) Montrer que H contient le carré de tout élément de A_4.

(ii) Conclure en considérant les éléments d'ordre 3 de A_4.

d) Le groupe A_4 possède-t-il un sous–groupe d'ordre 4 ? Si oui, quelle est sa structure? Est-il distingué? Le groupe A_4 est-il simple?

15. Soit G un groupe fini. On rappelle qu'on a un morphisme de groupes injectif $\mu : G \to S(G)$, qui à $g \in G$ associe la permutation

$$\mu(g) : h \mapsto gh$$

de G. On se propose de calculer la signature de $\mu(g)$.

a) Soit X l'ensemble des classes à **droite** de G modulo $\langle g \rangle$, et soit $r = \text{card}(X)$. Justifier que $r = \frac{|G|}{o(g)}$.

b) Montrer que toute classe à droite est stable par $\mu(g)$, et en déduire que $\mu(g)$ se décompose en produit de r cycles de longueur $o(g)$, de supports disjoints.

c) En déduire que $\varepsilon(\mu(g)) = (-1)^{(o(g)-1)\frac{|G|}{o(g)}}$.

d) On écrit $|G| = 2^m s$, avec s impair et $m \geq 0$. Montrer que $\mu(G) \subset A(G)$ si et seulement si soit $m = 0$ soit G ne possède pas d'élément d'ordre 2^m.

e) On reprend les notations de la question d). On suppose que G possède un élément d'ordre 2^m. Construire un morphisme non trivial $\rho : G \to \{\pm 1\}$. En déduire que, si $m \geq 2$, G n'est pas simple.