Université Joseph Fourier
Master1, mathématiques

Algèbre 2, devoir surveillé n°1

le 5 avril 2011, de 9h45 à 11h30

Aucun document n'est autorisé. Chaque réponse doit être justifiée.

I

Vrai ou faux : tout caractère du groupe alterné $\mathfrak{A}_3$ est la restriction à $\mathfrak{A}_3$ d'un caractère du groupe $\mathfrak{S}_3$.

II

Soit G un groupe fini. On rappelle que si χ est le caractère d'une représentation V de G, la représentation duale V^* de G a pour caractère $\overline{\chi}$.

Soient V et W deux représentations irréductibles de G. Déterminer à quelle condition sur V, W la représentation triviale de G apparaît dans la représentation $V \otimes W$.

III

Soit V une représentation d'un groupe fini G, de caractère χ. Soit V' une sous–représentation de V telle que : toute sous–représentation irréductible W de V', de caractère χ_W, apparaît exactement $< \chi \,|\, \chi_W >$ fois dans V'.
Montrer à l'aide du cours que V' admet un *unique* supplémentaire G-stable dans V.

T.S.V.P.

IV

On note G le sous–groupe $\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{F}_5, a \neq 0\}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$.

a) Le groupe G est–il abélien?

b) Montrer que f: $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto a$ est un morphisme de G dans $\mathbb{F}_5^\times$.

c) Déduire de a), b) l'abélianisé G_{ab} de G. Donner sa table de caractères.

Pour les questions suivantes, on admettra que le coefficient 1-2 du conjugué $\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ est $ba' + b'(1-a)$ (et son coefficient 1-1 est a).

d) Pour $a \in \mathbb{F}_5^\times \backslash \{1\}$, montrer que $\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{F}_5\}$ est une classe de conjugaison de G.

e) Déterminer la classe de conjugaison de $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans G.

f) Déterminer la table des caractères de G.

◇◇◇◇