Université Grenoble Alpes
M1MF

Théorie de Galois, contrôle continu n°1
le 10 mars 2022, durée 1h30

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. **Chaque réponse doit être justifiée**; *la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation des copies.*

I Autour du cours

1. Les réels $a = \sqrt[4]{\frac{1}{2} + \sqrt{5}}$ et $b = \sqrt[4]{\frac{1}{2} + \sqrt[3]{5}}$ sont-ils constructibles à la règle et au compas?

2. Soit L/K une extension finie, telle que la caractéristique de K ne divise pas $[L : K]$. Montrer que L/K est séparable.

II

1. Expliciter les angles solutions de l'équation $3\theta = 2\pi/5$.

On rappelle les formules $\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, et $\cos(2\pi/5) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\cos(4\pi/5) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

2. L'angle $2\pi/5$ est-il trisectable à la règle et au compas?

III

On pose $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{3}, i)$.

1. Déterminer tous les plongements de $L/\mathbb{Q}$.

2. Déterminer le groupe de Galois de L sur $\mathbb{Q}$.

3. Montrer que $\alpha = i\sqrt[3]{3}$ est un élément primitif de $L/\mathbb{Q}$.

4. En déduire que le polynôme $X^6 + 9$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

T.S.V.P.

IV

Soient K un corps parfait et Ω/K une extension algébrique telle que tout polynôme non constant de $K[X]$ admette une racine dans Ω.

1. Soient P un polynôme non constant de $K[X]$ et L un corps de décomposition de P sur K. Montrer qu'il existe $\alpha \in L$ tel que $L = K(\alpha)$.

2. En considérant le polynôme $Q = \mu_{\alpha,K}$, montrer qu'il existe un K-morphisme de corps de L dans Ω.

3. Conclure que P est scindé dans Ω. *On rappelle que cela entraîne que* Ω *est une clôture algébrique de* K*.*

◇ ◇ ◇