Université Grenoble Alpes
M1MG

Théorie de Galois, contrôle continu n°2

le 16 avril 2024, durée 1h30

Aucun document ni appareil électronique n'est autorisé. **Chaque réponse doit être justifiée**; *la qualité de la rédaction sera un élément d'appréciation des copies.*

On pourra utiliser le résultat de TD suivant, noté [LD]*:* si N/M est une extension de corps dont E/M est une sous-extension algébrique et si $t \in N$ est transcendant sur M, alors E/M et $M(t)/M$ sont linéairement disjointes.

I

1. Trouver un élément primitif α de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})/\mathbb{Q}$.

2. Soit P le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$. Quelles sont ses racines dans $\overline{\mathbb{Q}}$?

3. Soit $G = \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(P)$, que vaut $|G|$?

4. Donner la structure de G à isomorphisme près.

II

On considère le corps $L = \mathbb{F}_5(T)$ et son sous-corps $K = \mathbb{F}_5(T^3)$.

1. Montrer que L/K est une extension finie.

2. L'extension L/K est-elle séparable?

3. L'extension L/K est-elle normale?

4. Quelle est la clôture normale de L/K?

T.S.V.P.

III

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme $X^4 + 2X^2 + X + 3$.

1. Étudier la réduction de P modulo 2. Qu'en déduisez-vous pour P et pour le groupe $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(P)$?

2. Étudier la réduction de P modulo 3. Qu'en déduisez-vous pour le groupe $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(P)$?

3. En déduire le groupe $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}(P)$ à isomorphisme près.

IV

On note T une indéterminée et $n \geq 3$ un entier.

1. Soit $K = \mathbb{C}(T)$. Déterminer le groupe de Galois de $X^n - T$ sur K. On donnera sa structure.

2. Déterminer le groupe de Galois de $X^n - T$ sur $\mathbb{R}(T)$. Ce groupe est-il abélien?

◇ ◇ ◇

$\boxed{\textit{Barème indicatif: } 6/5/5/4}$