Théorème de représentation de Riesz et construction de la mesure de Lebesgue

Florian Galliot

16 mai 2016

TER encadré par Jean-François Babadjian

Table des matières

Introduction

En 1909, le mathématicien hongrois Frigyes (Frédéric) Riesz énonçait la première version du théorème de représentation qui porte aujourd'hui son nom, en français dans le texte ([Rie]) :

> « Etant donnée l'opération $A[f(x)]$, on peut déterminer la fonction à variation bornée $\alpha(x)$, telle que, quelle que soit la fonction continue $f(x)$, on ait $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$. »

Ici, A désigne une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}([0,1])$ et l'intégrale est à prendre au sens de Riemann-Stieltjes. Nous ne chercherons pas ici à définir cette intégrale ; nous nous intéressons plutôt aux versions actuelles du théorème de représentation et plus particulièrement à celle qui concerne les formes linéaires positives.

Nous savons que dans n'importe quel espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$, l'intégrale par rapport à μ définit une forme linéaire positive sur $L^1(\mu)$. Ainsi, si X est un espace topologique tel que $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$ et si μ est finie sur les compacts, l'intégrale par rapport à μ définit une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X) \subset L^1(\mu)$. Le théorème de représentation de Riesz permet d'aller dans l'autre sens : il assure, sous certains hypothèses sur X, que toute forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$ s'écrit précisément comme l'intégrale par rapport à une certaine mesure μ qui la "représente". Son énoncé le plus général est le suivant :

Théorème (Théorème de représentation de Riesz pour les formes linéaires positives, cas général) *Soient X un espace topologique séparé et localement compact, et Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(X)$.*
Alors il existe une tribu $\mathcal{A}$ contenant $\mathcal{B}(X)$ et une unique mesure μ sur $(X, \mathcal{A})$ complète, finie sur les compacts, extérieurement régulière, et intérieurement régulière sur les ouverts et les ensembles de μ-mesure finie, telles que μ "représente" Λ au sens où :
$\forall\ f \in \mathcal{C}_c(X) : \Lambda f = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$.

On peut trouver une démonstration de ce théorème dans [Rud, p. 40-47]. Nous nous proposons d'adapter la démonstration dans le cas particulier de $\mathbb{R}^d$ à la manière de ce qui est fait dans [Jia, p. 31-34]. Certains arguments peuvent ainsi être simplifiés ou rendus plus intuitifs, en utilisant notamment les deux propriétés essentielles que $\mathbb{R}^d$ est un espace métrique et qu'il s'écrit (ainsi que tous ses ouverts) comme union dénombrable de compacts. De plus, les mesures fournies par le théorème dans $\mathbb{R}^d$ sont en réalité régulières, d'où l'énoncé suivant qui est celui que nous démontrons :

Théorème (Théorème de représentation de Riesz pour les formes linéaires positives, version $\mathbb{R}^d$) *Soit Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.*
Alors il existe un unique couple $(\mathcal{A}, \mu)$, où $\mathcal{A}$ est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et μ est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A})$ complète, régulière et finie sur les compacts, tel que μ "représente" Λ au sens où : $\quad \forall\ f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) : \Lambda f = \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\mu$.
De plus, la mesure μ est précisément la complétée de sa restriction aux boréliens.

Une application remarquable du théorème précédent est la construction de la mesure de Lebesgue (dont on appellera mesure de Borel-Lebesgue la restriction aux boréliens), que l'on voit grâce au théorème comme le représentant de la forme linéaire positive qui à une fonction continue à support compact associe son intégrale de Riemann :

Théorème (Existence et unicité de la mesure de Borel-Lebesgue)
Il existe une unique mesure λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, appelée mesure de Borel-Lebesgue, qui coïncide avec le volume sur les rectangles.

Un "rectangle" de $\mathbb{R}^d$ désigne ici un produit cartésien d'intervalles de $\mathbb{R}$, et son "volume" est défini comme le produit des longueurs de ces intervalles (avec la convention $0 \times \infty = 0$).

La démonstration classique de ce dernier théorème (voir [Zak, p. 168] par exemple) consiste à montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ des réunions finies disjointes de rectangles de $\mathbb{R}^d$ forme une algèbre d'ensembles, et que l'application qui à un élément de $\mathcal{E}$ associe la somme des volumes de ses rectangles est une mesure d'algèbre (ou "prémesure"). Pour étendre cette dernière, il faut alors démontrer le théorème de prolongement de Carathéodory qui assure qu'une mesure d'algèbre s'étend de manière unique en une mesure sur la tribu engendrée par cette algèbre, à savoir $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ici, ce qui conclut.
A l'inverse, notre construction ne fait pas apparaître directement que la mesure de Lebesgue coïncide avec le volume sur les rectangles, mais en contrepartie elle présente un double avantage de taille : d'une part elle assure l'égalité des intégrales de Riemann et de Lebesgue pour les fonctions continues à support compact, d'autre part elle donne gratuitement la régularité de la mesure de Lebesgue.

Ce TER s'appuie sur les connaissances de topologie et d'intégration acquises en licence et qui ne seront donc pas nécessairement rappelées. L'énoncé du théorème de représentation fait apparaître les notions de mesure complète et de mesure régulière ; nous commencerons donc par rappeler ces définitions. Nous consacrerons les pages suivantes aux mesures extérieures, qui sont à la base de la construction des mesures fournies par le théorème. Ce dernier étant un point de rencontre entre théorie de la mesure et analyse fonctionnelle, ce travail préparatoire en théorie de la mesure devra être complété par quelques résultats fondamentaux de topologie, qui nous permettront d'attaquer le théorème convenablement armés. Nous présenterons enfin la construction annoncée de la mesure de Lebesgue utilisant le théorème de représentation de Riesz, à partir de l'intégrale de Riemann que nous aurons pris le temps de construire proprement au préalable en dimension quelconque.

1 Résultats de théorie de la mesure

1.1 Mesures complètes, mesures régulières

Définition 1.1.1. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
- On dit qu'une partie $N \subset X$ est *μ-négligeable* lorsque : $\exists\, A \in \mathcal{A} \mid N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.
- On dit que l'espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est *complet*, et par extension que la mesure μ est *complète*, lorsque la tribu $\mathcal{A}$ contient toutes les parties μ-négligeables de X.

Définition 1.1.2. Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.
On appelle *tribu complétée* de $\mathcal{A}$ la plus petite tribu $\bar{\mathcal{A}}$ contenant $\mathcal{A}$ telle que μ s'étende en une mesure complète $\bar{\mu}$ sur l'espace mesurable $(X, \bar{\mathcal{A}})$.
On a $\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A}$ et $N \subset X$ négligeable$\}$, et $\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$: l'extension $\bar{\mu}$ est unique.

Définition 1.1.3. Soient X un espace topologique et $\mathcal{A}$ une tribu sur X contenant $\mathcal{B}(X)$.
On dit qu'une mesure μ sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{A})$ est *régulière* lorsque :

(i) $\forall\, A \in \mathcal{A} :\ \mu(A) = \inf\{\mu(V) \mid V \supset A \text{ ouvert}\}$ (μ est *extérieurement régulière*)

(ii) $\forall\, A \in \mathcal{A} :\ \mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ compact}\}$ (μ est *intérieurement régulière*)

Exemple. La mesure de comptage sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est un exemple de mesure intérieurement régulière qui n'est pas extérieurement régulière (en effet les ouverts sont tous de mesure infinie). Il existe aussi des mesures extérieurement régulières qui ne sont pas intérieurement régulières, bien qu'elles soient plus difficiles à expliciter. On verra que les mesures données par le théorème de représentation dans $\mathbb{R}^d$ sont toutes régulières, ce qui se généralise en fait à toutes les mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ qui sont finies sur les compacts.

Remarque. On sait par monotonie de μ que $\mu(A)$ est toujours un minorant de $\{\mu(V) \mid V \supset A \text{ ouvert}\}$, ainsi on a (i) si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $V \supset A$ tel que $\mu(V) \leq \mu(A) + \varepsilon$ (automatique si $\mu(A) = +\infty$ car alors $V = X$ convient). De même, $\mu(A)$ est toujours un majorant de $\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ compact}\}$, donc on a (ii) si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $a < \mu(A)$ il existe un compact $K \subset A$ tel que $a < \mu(K)$ (automatique si $\mu(A) = 0$ car alors $K = \varnothing$ convient).

Remarque. On peut aussi remarquer que (i) est vérifiée dès lors que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $V \supset A$ tel que $\mu(V \setminus A) < \varepsilon$. Ceci vient du fait que $\mu(V) = \mu(A) + \mu(V \setminus A)$. De même, (ii) est vérifiée dès lors que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subset A$ tel que $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$. Ainsi, une mesure μ sera régulière dès lors que pour tout $A \in \mathcal{A}$ et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $V \supset A$ et un compact $K \subset A$ tels que $\mu(V \setminus K) < \varepsilon$. Cette condition suffisante est nécessaire pour les mesures finies, mais on n'a pas l'équivalence en général : par exemple, $A := \mathbb{R}^d$ privé de n'importe quel compact est toujours de mesure de Lebesgue infinie, bien que la mesure de Lebesgue soit régulière (nous le verrons par la suite).

Proposition 1.1.4. *Soient X un espace topologique, $\mathcal{A}$ une tribu sur X contenant $\mathcal{B}(X)$, et μ une mesure régulière sur $(X, \mathcal{A})$.*
Alors la mesure complétée $\bar{\mu}$ est encore régulière.

Démonstration.
Soit $E = (A \cup N) \in \bar{\mathcal{A}}$, où $A \in \mathcal{A}$ et $N \subset B \in \mathcal{A}$ avec $\mu(B) = 0$. Alors $\bar{\mu}(E) = \mu(A)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par régularité extérieure de μ, il existe un ouvert $V \supset A$ tel que $\mu(V) \leq \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}$ et un ouvert $W \supset B$ tel que $\mu(W) \leq \mu(B) + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $V \cup W$ est un ouvert contenant E et on a $\bar{\mu}(V \cup W) = \mu(V \cup W) \leq \mu(V) + \mu(W) \leq (\mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}) + \frac{\varepsilon}{2} = \mu(A) + \varepsilon = \bar{\mu}(E) + \varepsilon$, ce qui montre que $\bar{\mu}$ est extérieurement régulière.
Soit maintenant $a < \bar{\mu}(E) = \mu(A)$. Par régularité intérieure de μ, il existe un compact $K \subset A \subset E$ tel que $a < \mu(K)$, ainsi $a < \bar{\mu}(K) = \mu(K) \leq \mu(A) = \bar{\mu}(E)$, ce qui montre que $\bar{\mu}$ est intérieurement régulière. □

1.2 Mesures extérieures

Définition 1.2.1. On appelle *mesure extérieure* sur un ensemble X une application $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ qui vérifie les trois propriétés suivantes :

(i) $\mu^*(\varnothing) = 0$

(ii) $\forall\, E, F \in \mathcal{P}(X) : \quad E \subset F \implies \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$ (monotonie)

(iii) $\forall\, (E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}(X)^{\mathbb{N}} : \quad \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n)$ (sous-additivité dénombrable)

Il est possible à partir d'une mesure extérieure de construire une tribu et une mesure sur cette tribu, par simple restriction. C'est l'objet du théorème fondamental qui suit (Théorème 1.2.3).

Définition 1.2.2. Soient X un ensemble et $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ une mesure extérieure sur X. On dit que $E \subset X$ est *(μ^*-)mesurable* lorsque : $\forall\, F \subset X : \; \mu^*(F) = \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \cap {}^cE)$.

Remarque. Le sens "$\leq$" est automatique par sous-additivité de μ^* puisque $F = (F \cap E) \cup (F \cap {}^cE)$. Ainsi $E \subset X$ est μ^*-mesurable si et seulement si : $\forall\, F \subset X : \; \mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \cap {}^cE)$.

Théorème 1.2.3. *Soient X un ensemble et $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ une mesure extérieure sur X. Alors l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties μ^*-mesurables de X est une tribu sur X, et $\mu^*_{|\mathcal{A}}$ est une mesure complète sur $(X, \mathcal{A})$.*

Démonstration.
Il est évident que $\mathcal{A}$ contient $\varnothing$ et est stable par passage au complémentaire. Pour obtenir que $\mathcal{A}$ est une tribu, il reste à montrer que $\mathcal{A}$ est stable par union dénombrable.
Commençons par vérifier que $\mathcal{A}$ est stable par union finie (donc par intersection finie également). Soient $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ et $F \subset X$. La mesurabilité de A_1 appliquée à l'ensemble $F \cap (A_1 \cup A_2)$ donne :

$$\begin{aligned}\mu^*(F \cap (A_1 \cup A_2)) &= \mu^*(F \cap (A_1 \cup A_2) \cap A_1) + \mu^*(F \cap (A_1 \cup A_2) \cap {}^cA_1)\\ &= \mu^*(F \cap A_1) + \mu^*(F \cap {}^cA_1 \cap A_2)\end{aligned}$$

Comme ${}^c(A_1 \cup A_2) = {}^cA_1 \cap {}^cA_2$, on en déduit :

$$\mu^*(F \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(F \cap {}^c(A_1 \cup A_2)) = \mu^*(F \cap A_1) + \mu^*(F \cap {}^cA_1 \cap A_2) + \mu^*(F \cap {}^cA_1 \cap {}^cA_2)$$

D'où par mesurabilité de A_2 puis de A_1 :

$$\mu^*(F \cap (A_1 \cup A_2)) + \mu^*(F \cap {}^c(A_1 \cup A_2)) = \mu^*(F \cap A_1) + \mu^*(F \cap {}^cA_1) = \mu^*(F)$$

On a donc $(A_1 \cup A_2) \in \mathcal{A}$: $\mathcal{A}$ est stable par union finie.

Soient maintenant $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ et $F \subset X$. Posons $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $B_n := A_n \setminus (A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1})$. Les B_n sont deux-à-deux disjoints, et mesurables puisque $\mathcal{A}$ est stable par union finie et par

différence. On a de plus $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On applique la mesurabilité de B_n à l'ensemble $F \cap (B_0 \cup \ldots \cup B_n)$:

$$\begin{aligned}\mu^*(F \cap (B_0 \cup \ldots \cup B_n)) &= \mu^*(F \cap (B_0 \cup \ldots \cup B_n) \cap B_n) + \mu^*(F \cap (B_0 \cup \ldots \cup B_n) \cap {}^c B_n) \\ &= \mu^*(F \cap B_n) + \mu^*(F \cap (B_0 \cup \ldots \cup B_{n-1}))\end{aligned}$$

On applique désormais la mesurabilité de B_{n-1} à l'ensemble $F \cap (B_0 \cup \ldots \cup B_{n-1})$, et ainsi de suite. On obtient au final :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \mu^*\left(F \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(F \cap B_k) \tag{1}$$

En particulier, par monotonie de μ^* :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \mu^*(F \cap A) \geq \mu^*\left(F \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} \mu^*(F \cap B_k)$$

Le passage à la limite donne :

$$\mu^*(F \cap A) \geq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(F \cap B_n)$$

La sous-additivité dénombrable de μ^* donne précisément l'inégalité dans l'autre sens, ainsi :

$$\mu^*(F \cap A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(F \cap B_n) \tag{2}$$

Enfin, par mesurabilité de $B_0 \cup \ldots \cup B_n$:

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \mu^*(F) &= \mu^*\left(F \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)\right) + \mu^*\left(F \cap {}^c\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mu^*(F \cap B_k) + \mu^*\left(F \cap {}^c\left(\bigcup_{k=0}^{n} B_k\right)\right) && \text{(d'après (1))} \\ &\geq \sum_{k=0}^{n} \mu^*(F \cap B_k) + \mu^*(F \cap {}^c A) && \text{(par monotonie de } \mu^*)\end{aligned}$$

Passons à la limite dans cette inégalité. D'après l'égalité (2), on obtient :

$$\mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap A) + \mu^*(F \cap {}^c A)$$

Ainsi $A \in \mathcal{A}$. On en conclut que $\mathcal{A}$ est une tribu.
Considérons désormais le cas où la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes deux-à-deux disjoints. Alors $B_n = A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc l'égalité (2) appliquée à $F = X$ donne : $\mu^*(A) = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n)$.
Ainsi μ^* est σ-additive sur les éléments de $\mathcal{A}$, i.e. $\mu := \mu^*_{|\mathcal{A}}$ est une mesure sur $(X, \mathcal{A})$.

De plus, soit $N \subset X$ une partie μ-négligeable : $\exists\, A \in \mathcal{A} \mid N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Alors $\mu^*(N) = 0$ puisque $\mu^*(N) \leq \mu^*(A) = \mu(A) = 0$. Soit $F \subset X$. Par sous-additivité, on a $\mu^*(F \cap N) \leq \mu^*(N) = 0$ et $\mu^*(F \cap {}^c N) \leq \mu^*(F)$ donc $\mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap N) + \mu^*(F \cap {}^c N)$. Ainsi $N \in \mathcal{A}$, ce qui montre que la mesure μ est complète.

□

Le théorème fournit peu d'information sur le contenu de cette tribu. On sait qu'elle contient toutes les parties de mesure extérieure nulle, mais il n'est pas certain a priori qu'elle soit "suffisamment grande" pour nous intéresser. Dans le cas métrique, on a toutefois le résultat suivant qui assure que si la mesure extérieure est additive sur les couples de parties positivement séparées (au sens de la distance), alors les boréliens sont mesurables :

Proposition 1.2.4. *Soient (X, d) un espace métrique et $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ une mesure extérieure sur X. Notons $\mathcal{A}$ la tribu des parties μ^*-mesurables de X.*
On suppose que la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall\ E, F \subset X : \quad d(E, F) > 0 \implies \mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F) \qquad \text{(P)}$$

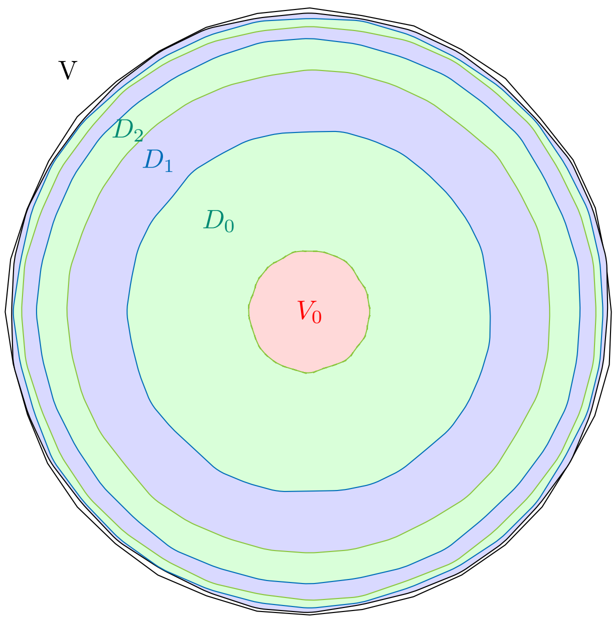
Alors $\mathcal{A}$ contient la tribu borélienne $\mathcal{B}(X)$.

Démonstration.
Remarquons d'abord que la propriété (P) se propage par récurrence à n'importe quelle famille finie $(E, F_1, \ldots, F_n)$ de parties deux-à-deux positivement séparées, car alors E est encore positivement séparée de $F_1 \cup \ldots \cup F_n$ par une distance égale à $\min\limits_{1 \leq i \leq n} d(E, F_i) > 0$.
Remarquons également que si deux parties E et F sont positivement séparées, alors c'est encore le cas de E' et F' pour tous $E' \subset E$ et $F' \subset F$, en particulier c'est encore le cas de $E \cap G$ et $F \cap G$ pour n'importe quelle partie $G \subset X$.

Puisque $\mathcal{A}$ est une tribu, il suffit de montrer qu'elle contient les ouverts. Soit $V \subset X$ un ouvert, montrons donc que $V \in \mathcal{A}$ i.e. $\forall\ F \subset X : \ \mu^*(F) \geq \mu^*(F \cap V) + \mu^*(F \cap {}^cV)$.
Soit $F \subset X$. Supposons $\mu^*(F) < +\infty$, sans quoi il n'y a rien à montrer. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$V_n := \left\{ x \in X \ \middle|\ d(x, {}^cV) > \frac{1}{2^n} \right\} \subset V \quad ,$$

$$\text{et} \quad D_n := \left\{ x \in X \ \middle|\ \frac{1}{2^{n+1}} < d(x, {}^cV) \leq \frac{1}{2^n} \right\} = V_{n+1} \setminus V_n .$$



Par sous-additivité, on a $\mu^*(F \cap V) \le \mu^*(F \cap (V \setminus V_n) + \mu^*(F \cap V_n)$ donc :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \mu^*(F \cap V) + \mu^*(F \cap {}^cV) \le \mu^*(F \cap (V \setminus V_n) + [\mu^*(F \cap V_n) + \mu^*(F \cap {}^cV)] \tag{3}$$

Etudions séparément les deux termes de la somme de droite dans l'inégalité (3). Traitons d'abord le second terme. On a $\forall\, n \in \mathbb{N} : d(V_n, {}^cV) \ge \dfrac{1}{2^n} > 0$, d'où en appliquant la propriété (P) :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \mu^*(F \cap V_n) + \mu^*(F \cap {}^cV) = \mu^*(F \cap (V_n \cup {}^cV)) \le \mu^*(F)$$

L'inégalité (3) devient :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \quad \mu^*(F \cap V) + \mu^*(F \cap {}^cV) \le \mu^*(F \cap (V \setminus V_n) + \mu^*(F) \tag{4}$$

Intéressons-nous maintenant au terme $\mu^*(F \cap (V \setminus V_n)$, il faut montrer qu'il tend vers 0.
Soient $i, j \in \mathbb{N}$ tels que $i + 2 \le j$, et $y \in {}^cV$. Alors :

$$\forall\, x_i \in D_i\,, \forall\, x_j \in D_j : \quad d(x_i, x_j) \ge d(x_i, y) - d(x_j, y) > \frac{1}{2^{i+1}} - \frac{1}{2^j} =: C_{i,j}$$

D'où en passant à l'inf sur x_i et x_j : $d(D_i, D_j) \ge C_{i,j} > 0$, et $d(F \cap D_i, F \cap D_j) > 0$.
Ainsi, à $n \in \mathbb{N}$ fixé, la propriété (P) assure en particulier que :

$$\begin{aligned} &\mu^*(F \cap D_0) + \mu^*(F \cap D_2) + \ldots + \mu^*(F \cap D_{2n}) &&= \mu^*\left(F \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} D_{2k}\right)\right) &&\le \mu^*(F) \\ \text{et} \quad &\mu^*(F \cap D_1) + \mu^*(F \cap D_3) + \ldots + \mu^*(F \cap D_{2n+1}) &&= \mu^*\left(F \cap \left(\bigcup_{k=0}^{n} D_{2k+1}\right)\right) &&\le \mu^*(F) \end{aligned}$$

On en déduit : $\displaystyle\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu^*(F \cap D_n) \le 2\mu^*(F) < +\infty.$

Comme V est ouvert, on a $\forall\, x \in V : d(x, {}^cV) > 0$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \forall\, n \in \mathbb{N} : \quad V \setminus V_n &= \left\{ x \in X \;\middle|\; 0 < d(x, {}^cV) \le \frac{1}{2^n} \right\} \\ &= \bigcup_{k \ge n} \left\{ x \in X \;\middle|\; \frac{1}{2^{k+1}} < d(x, {}^cV) \le \frac{1}{2^k} \right\} \\ &= \bigcup_{k \ge n} D_k \end{aligned}$$

Par conséquent : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N} : \ \mu^*(F \cap (V \setminus V_n)) = \mu^*\left(\displaystyle\bigcup_{k \ge n} (F \cap D_k)\right) \le \displaystyle\sum_{k \ge n} \mu^*(F \cap D_k).$

La somme de droite est le reste d'une série convergente donc $\mu^*(F \cap (V \setminus V_n)) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$
En passant à la limite dans l'inégalité (4), on obtient $V \in \mathcal{A}$ ce qui conclut.

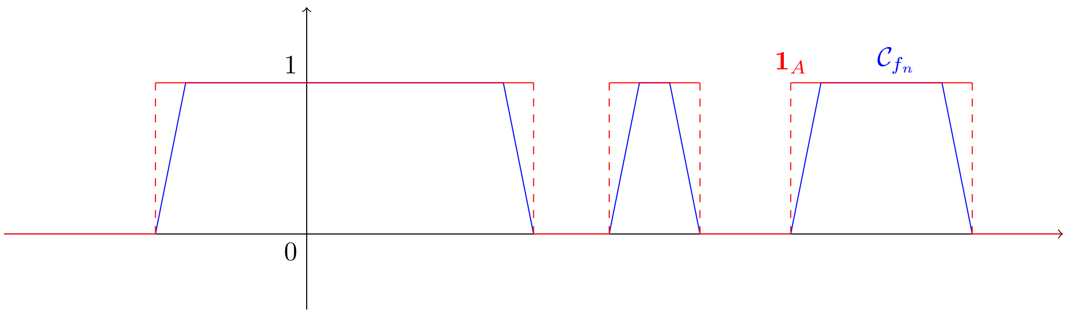
$\square$

2 Le théorème de représentation de Riesz

2.1 Approche intuitive

Si l'on souhaite définir une mesure μ qui représente une forme linéaire positive Λ sur $\mathcal{C}_c(X)$, i.e. $\Lambda f = \int_{\mathbb{R}^d} f \, \mathrm{d}\mu \quad \forall\, f$, la première formule qui vient en tête est "$\mu(A) = \int_X \mathbf{1}_A \, \mathrm{d}\mu \, = \Lambda \mathbf{1}_A$". Mais cette égalité n'a pas de sens puisque $\mathbf{1}_A \notin \mathcal{C}_c(X)$. Il faut approcher cette indicatrice par des fonctions continues. Supposons que X est un espace métrique, on est alors tenté de poser :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin A \\ n.d(x, {}^cA) & \text{si} \quad x \in A \quad \text{et} \quad d(x, {}^cA) \leq \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si} \quad x \in A \quad \text{et} \quad d(x, {}^cA) \geq \frac{1}{n} \end{cases}$$



On se heurte à deux nouveaux problèmes. Tout d'abord, ces fonctions sont certes continues (par continuité de la distance), mais elles ne sont pas nécessairement à support compact. Enfin, cette suite de fonctions ne converge pas simplement vers $\mathbf{1}_A$ a priori, en fait c'est le cas si et seulement si tout point $x \in A$ vérifie $d(x, {}^cA) > 0$, ce qui est équivalent à demander que $A = V$ soit un ouvert. Malgré tout, on a donc pu constater par cette approche naïve qu'il serait plus aisé de définir μ sur les ouverts. Soit ainsi V un ouvert, et supposons qu'on est capable d'approcher $\mathbf{1}_V$ par une suite croissante $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues positives à support compact. Alors le fait que la mesure μ cherchée doive représenter Λ implique d'après le théorème de convergence monotone que :

$$\mu(V) = \int_X \mathbf{1}_V \, \mathrm{d}\mu \, = \int_X (\lim_n \uparrow f_n) \, \mathrm{d}\mu \, = \lim_n \uparrow \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu \, = \lim_n \uparrow \Lambda f_n = \sup_{\substack{0 \leq f \leq \mathbf{1}_V \\ f \in \mathcal{C}_c(X)}} \Lambda f$$

Ce raisonnement par analyse-synthèse nous permet de poser $\mu(V) := \sup_{\substack{0 \leq f \leq \mathbf{1}_V \\ f \in \mathcal{C}_c(X)}} \Lambda f$ pour V ouvert.

On verra que cette définition est "suffisante", au sens où elle capture toute l'information de Λ. En effet, la formule $\mu(E) := \inf\{\mu(V) \mid V \supset E \text{ ouvert}\}$ suffira à définir une mesure (extérieure dans un premier temps) qui représente Λ. Ceci est dû au fait que l'on dispose de "suffisamment" de fonctions continues à support compact pour que notre définition de μ sur les ouverts soit convenable, propriété assurée par le lemme 2.2.2 à venir (lemme d'Urysohn). Celui-ci assure que sous les bonnes hypothèses sur X, pour tout ouvert $V \subset X$ et pour tout compact $K \subset V$, il y a la "place" nécessaire entre K et ${}^cV$ pour pouvoir définir une fonction à support compact qui vaut 1 sur K, 0 sur ${}^cV$, et joint les deux bouts de manière continue.

2.2 Préliminaires topologiques

Le cadre le plus général du théorème de représentation de Riesz est celui des espaces topologiques séparés (i.e. deux points distincts admettent des voisinages respectifs disjoints) et localement compacts (i.e. tout point admet un voisinage compact). Il s'agit en effet du cadre d'application des quelques lemmes à suivre, que la démonstration du théorème de représentation utilise de manière cruciale. En nous inspirant de [Rud, p. 38-40] et [Vil, p. 38-39] nous montrons ces résultats préliminaires dans le cas métrique localement compact, qui n'est pas plus difficile que le cas de $\mathbb{R}^d$ dont nous avons besoin.

Notation. Soit X un espace topologique.
- On note $\mathcal{C}_c(X)$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions continues à support compact de X dans $\mathbb{R}$.
- Si $K \subset X$ est un compact, la notation $K \prec f$ signifiera que $f \in \mathcal{C}_c(X)$ et $\mathbf{1}_K \leq f \leq 1$.
- Si $V \subset X$ est un ouvert, la notation $f \prec V$ signifiera que $f \in \mathcal{C}_c(X)$ et $0 \leq f \leq \mathbf{1}_V$.

Lemme 2.2.1. *Soient X un espace métrique localement compact, $K \subset X$ un compact et $V \subset X$ un ouvert tels que $K \subset V$.*
Alors il existe un ouvert V' et un compact K' tels que $K \subset V' \subset K' \subset V$.

Démonstration.
Soit $x \in K$. D'une part, X étant localement compact, il existe un voisinage compact K_x de x. D'autre part, puisque $x \in V$ qui est ouvert : $\exists\, r_x > 0 \mid B(x, 2r_x) \subset V$. Posons $K'_x := \overline{B(x, r_x)} \cap K_x \subset V$. Alors K'_x est compact (intersection d'un fermé avec un compact), et c'est un voisinage de x (intersection finie de voisinages de x) donc il contient un ouvert V'_x contenant x.
On définit ainsi K'_x et V'_x pour chaque $x \in K$. La famille $(V'_x)_{x \in K}$ recouvre K donc par compacité on peut extraire un recouvrement fini $V' := V'_{x_1} \cup \ldots \cup V'_{x_n} \supset K$. Posons $K' := K'_{x_1} \cup \ldots \cup K'_{x_n}$: V' est ouvert, K' est compact, et $K \subset V' \subset K' \subset V$ ce qui conclut. □

Lemme 2.2.2 (Lemme d'Urysohn)**.** *Soient X un espace métrique localement compact, $K \subset X$ un compact et $V \subset X$ un ouvert tels que $K \subset V$.*
Alors il existe une fonction f telle que $K \prec f \prec V$.

Démonstration.
Le lemme 2.2.1 fournit un ouvert V' et un compact K' tels que $K \subset V' \subset K' \subset V$. Posons :

$$f : x \mapsto \frac{d(x, {}^cV')}{d(x, {}^cV') + d(x, K)}$$

Remarquons que pour tout fermé $F \subset X$, on a $d(x, F) = 0 \iff x \in F$. Comme ${}^cV'$ et K sont des fermés disjoints, ceci assure que f est bien définie. On sait de plus que pour toute partie non vide $Y \subset X$ la fonction $x \mapsto d(x, Y)$ est continue, donc f est continue. Clairement, f est à valeurs dans $[0, 1]$ et vaut 1 sur K. Enfin, f est nulle sur ${}^cV' \supset {}^cK'$: son support est inclus dans $K' \subset V$ donc est compact et inclus dans V. □

Lemme 2.2.3 (Partition de l'unité)**.** *Soient X un espace métrique localement compact, $K \subset X$ un compact et $V_1, \ldots, V_n \subset X$ des ouverts tels que $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_i$.*
Alors il existe $f_1 \prec V_1, \ldots, f_n \prec V_n$ telles que $\forall\ x \in K : \sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$.

Démonstration.
Pour chaque $x \in K$, il existe $i(x) \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\{x\} \subset V_{i(x)}$ donc le lemme 2.2.1 fournit un ouvert V'_x et un compact K'_x tels que $\{x\} \subset V'_x \subset K'_x \subset V_{i(x)}$.
On a ainsi $K \subset \bigcup_{x \in K} V'_x$ donc on peut extraire un recouvrement fini $K \subset (V'_{x_1} \cup \ldots \cup V'_{x_r})$.

Posons pour $i \in \{1, \ldots, n\}$: $\quad K_i := \bigcup\limits_{\substack{1 \leq j \leq r \\ i(x_j) = i}} K'_{x_j} \subset V_i \quad$ (notons que $\bigcup\limits_{i=1}^{n} K_i = \bigcup\limits_{j=1}^{r} K'_{x_j} \supset K$).

Comme les K_i sont des compacts, le lemme 2.2.2 donne pour chaque $i \in \{1, \ldots, n\}$ une fonction g_i telle que $K_i \prec g_i \prec V_i$. On pose alors :

$$\begin{aligned}
&f_1 := g_1 \\
&f_2 := (1 - g_1) g_2 \\
&\cdots\cdots\cdots \\
&f_n := (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_{n-1}) g_n
\end{aligned}$$

Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ on a $0 \leq f_i \leq g_i$ donc $f_i \prec V_i$. De plus, on obtient par récurrence :

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n = 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_n) \tag{5}$$

En effet $f_1 = 1 - (1 - g_1)$, et si suppose (5) vraie pour la somme jusqu'à $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ alors :

$$\begin{aligned}
f_1 + f_2 + \cdots + f_{i+1} &= (f_1 + f_2 + \cdots + f_i) + f_{i+1} \\
&= 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_i) + (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_i) g_{i+1} \\
&= 1 - (1 - g_1)(1 - g_2) \cdots (1 - g_i)(1 - g_{i+1})
\end{aligned}$$

Soit $x \in K$: $\exists\ i_0 \in \{1, \ldots, n\} \mid x \in K_{i_0}$, d'où $g_{i_0}(x) = 1$ et $\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1$ d'après (5). □

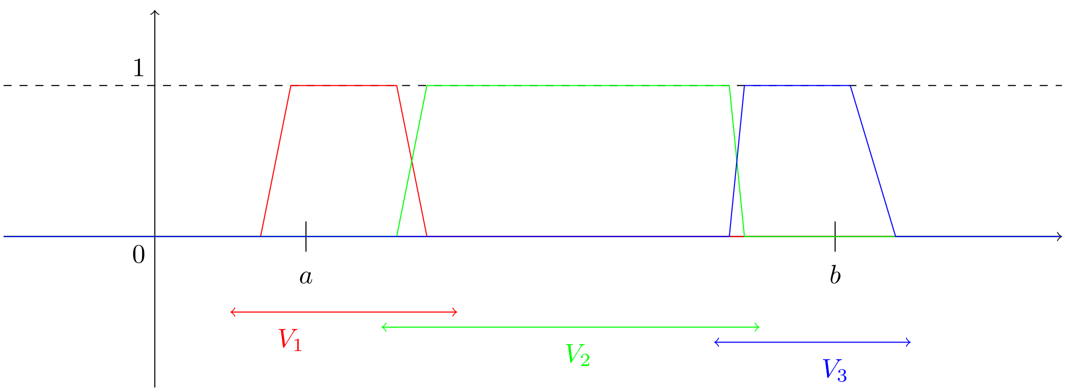


FIGURE 1 – Exemple de partition de l'unité, ici $X = \mathbb{R}$ et $K = [a, b]$

2.3 Le théorème de représentation de Riesz pour les formes linéaires positives

Définition 2.3.1. Soit X un espace topologique.
On appelle *forme linéaire positive* sur $\mathcal{C}_c(X)$ une application $\mathbb{R}$-linéaire $\Lambda : \mathcal{C}_c(X) \to \mathbb{R}$ telle que :
$\forall\, f \in \mathcal{C}_c(X) : \quad f \geq 0 \implies \Lambda f \geq 0.$

Remarque. Une forme linéaire positive est automatiquement croissante. En effet, si $f, g \in \mathcal{C}_c(X)$ vérifient $f \leq g$, alors $g - f \geq 0$ d'où $\Lambda g - \Lambda f = \Lambda(g - f) \geq 0$ et $\Lambda f \leq \Lambda g$.

Théorème 2.3.2 (Théorème de représentation de Riesz pour les formes linéaires positives)**.**
Soit Λ une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.
Alors il existe un unique couple $(\mathcal{A}, \mu)$, où $\mathcal{A}$ est une tribu contenant $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et μ est une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A})$ complète, régulière et finie sur les compacts, tel que μ "représente" Λ au sens où : $\quad \forall\, f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) : \Lambda f = \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu$.
De plus, la mesure μ est précisément la complétée de sa restriction aux boréliens.

Démonstration.

I — Unicité.
Soient $(\mathcal{A}_\mu, \mu)$ et $(\mathcal{A}_\nu, \nu)$ deux couples vérifiant la conclusion du théorème.

Etape I.1 — *μ et ν coïncident sur $\mathcal{A}_\mu \cap \mathcal{A}_\nu$, en particulier elles coïncident sur les boréliens.*
Les mesures μ et ν sont intérieurement régulières donc sont entièrement déterminées par leurs valeurs sur les compacts. Ainsi, soit $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact, montrons que $\mu(K) = \nu(K)$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme ν est extérieurement régulière et finie sur les compacts, il existe un ouvert $V \supset K$ tel que $\nu(V) < \nu(K) + \varepsilon$. Le lemme 2.2.2 nous donne une fonction f telle que $K \prec f \prec V$ et on a alors :

$$\mu(K) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_K \,\mathrm{d}\mu \;\leq \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu \;= \Lambda f = \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\nu \;\leq \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_V \,\mathrm{d}\nu \;= \nu(V) < \nu(K) + \varepsilon$$

Ceci étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mu(K) \leq \nu(K)$. On obtient l'inégalité dans l'autre sens de manière analogue, ainsi $\mu(K) = \nu(K)$. On en conclut que pour tout $A \in \mathcal{A}_\mu \cap \mathcal{A}_\nu$:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset A \text{ compact}\} = \sup\{\nu(K) \mid K \subset A \text{ compact}\} = \nu(A).$$

Etape I.2 — *$\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\nu$ est la tribu complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour la mesure $\mu_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} = \nu_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$.*
Considérons la tribu $\mathcal{A}_\mu$. Puisqu'elle est complète, il suffit de vérifier qu'elle est incluse dans la tribu complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour $\mu_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$, par minimalité de cette dernière. Ainsi, soit $A \in \mathcal{A}_\mu$, montrons que $A = B \cup N$ où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et N est μ-négligeable.
Traitons d'abord le cas où A est borné, alors $\mu(A) < +\infty$ car μ est finie sur les compacts. Comme μ est régulière, il existe une suite $(K_n)_{n\in N}$ de compacts inclus dans A telle que $\mu(K_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu(A)$. Quitte à poser $K_n' := \bigcup_{k=0}^n K_k$, supposons la suite $(K_n)_{n\in N}$ croissante, de limite $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n \subset A$. B est un borélien de mesure $\mu(B) = \lim\limits_n \uparrow \mu(K_n) = \mu(A)$.

Ainsi en posant $N := A \setminus B \in \mathcal{A}_\mu$, on a $A = B \cup N$ où $\mu(N) = \mu(A) - \mu(B) = 0$.
Revenons au cas général $A \in \mathcal{A}_\mu$. Le cas borné assure que pour chaque $n \in \mathbb{N}$ on dispose d'un borélien B_n et d'un ensemble $N_n \in \mathcal{A}_\mu$ μ-négligeable tels que $A \cap \overline{B(0,n)} = B_n \cup N_n$.
On obtient :

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap \overline{B(0,n)}) = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n\right) ,$$

où $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est un borélien, et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$ est μ-négligeable comme union dénombrable d'ensembles μ-négligeables.
Ceci montre que $\mathcal{A}_\mu$ est la tribu complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour $\mu_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$. On obtient de même que $\mathcal{A}_\nu$ est la tribu complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour $\nu_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$, or on a vu que $\mu_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} = \nu_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ donc $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\nu$.

Ceci conclut la preuve de l'unicité, puisqu'alors $\mu = \nu = \overline{\mu_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}} = \overline{\nu_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}}$ est l'unique extension possible de $\mu_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)} = \nu_{|\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)}$ à la tribu $\mathcal{A}_\mu = \mathcal{A}_\nu$, et on a bien montré au passage que la tribu $\mathcal{A}$ du théorème est précisément la tribu complétée de $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ pour la restriction de μ aux boréliens.

II — Existence.
Pour tout ouvert $V \subset \mathbb{R}^d$, on définit :

$$\mu^*(V) := \sup\{\Lambda f \mid f \prec V\} \tag{6}$$

Notons que $\mu^*(V)$ est bien défini dans $[0, +\infty]$ car la fonction identiquement nulle $f = 0$ vérifie toujours $f \prec V$ et $\Lambda f = 0$.
Il est clair que si V_1 et V_2 sont deux ouverts de $\mathbb{R}^d$ tels que $V_1 \subset V_2$ alors $\mu^*(V_1) \leq \mu^*(V_2)$, car alors toute fonction f vérifiant $f \prec V_1$ vérifie aussi $f \prec V_2$. Par conséquent tout ouvert U de $\mathbb{R}^d$ vérifie $\mu^*(U) \leq \inf\{\mu^*(V) \mid V \supset U \text{ ouvert}\}$. L'inégalité dans l'autre sens étant immédiate, il est donc cohérent avec la définition (6) de définir pour toute partie $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mu^*(E) := \inf\{\mu^*(V) \mid V \supset E \text{ ouvert}\} \tag{7}$$

Ici aussi, notons que $\mu^*(E)$ est bien défini dans $[0, +\infty]$ car on a toujours $\mathbb{R}^d \supset E$.
On a ainsi construit une application $\mu^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, +\infty]$.

Etape II.1 — *μ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^d$.*
Il faut vérifier les trois points (i), (ii) et (iii) de la définition 1.2.1. On a $\mu^*(\varnothing) = 0$ de manière évidente d'après (6) puisque la seule fonction à support vide est la fonction identiquement nulle. De plus, il est clair d'après (7) que μ^* est monotone puisque si $E \subset F \subset \mathbb{R}^d$ alors tout ouvert contenant F contient aussi E. Il reste donc à vérifier que μ^* est dénombrablement sous-additive.
Montrons dans un premier temps que μ^* est finiment sous-additive sur les ouverts. Soient V_1 et V_2 des ouverts de $\mathbb{R}^d$ et $f \prec (V_1 \cup V_2)$. Notons K le support (compact) de f. D'après le lemme 2.2.3, il existe deux fonctions g_1 et g_2 telles que $g_1 \prec V_1$, $g_2 \prec V_2$, et $\forall\, x \in K : g_1(x) + g_2(x) = 1$.
On a donc $f = f.(g_1 + g_2)$. On en déduit :

$$\Lambda f = \Lambda(fg_1) + \Lambda(fg_2) \tag{8}$$

Or $0 \leq fg_1 \leq g_1$ donc $fg_1 \prec V_1$, d'où $\Lambda(fg_1) \leq \mu^*(V_1)$ d'après (6). De même, $\Lambda(fg_2) \leq \mu^*(V_2)$. L'équation (8) devient donc :

$$\Lambda f \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2)$$

Ceci est valable pour toute fonction $f \prec (V_1 \cup V_2)$, donc par passage au sup on obtient que $\mu^*(V_1 \cup V_2) \leq \mu^*(V_1) + \mu^*(V_2)$: on a la sous-additivité finie sur les ouverts.
Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}^d$, montrons que $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n)$. Supposons que $\forall\, n \in \mathbb{N} : \mu^*(E_n) < +\infty$, sans quoi il n'y a rien à montrer. Soit $\varepsilon > 0$. D'après (7), on a pour chaque $n \in \mathbb{N}$ un ouvert $V_n \supset E_n$ vérifiant $\mu^*(V_n) < \mu^*(E_n) + 2^{-n}\varepsilon$. Posons $V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$. Soit $f \prec V$, dont on note K le support (compact). Comme $K \subset V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$, par compacité on peut extraire un recouvrement fini $K \subset \left(\bigcup_{n=0}^N V_n\right)$. Ainsi $f \prec \left(\bigcup_{n=0}^N V_n\right)$ donc d'après (6) et en appliquant la sous-additivité finie de μ^* sur les ouverts :

$$\Lambda f \leq \mu^*\left(\bigcup_{n=0}^N V_n\right) \leq \sum_{n=0}^N \mu^*(V_n) \leq \sum_{n=0}^N \mu^*(E_n) + \varepsilon \sum_{n=0}^N 2^{-n} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) + 2\varepsilon$$

Ceci vaut pour toute fonction $f \prec V$, donc par passage au sup : $\mu^*(V) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) + 2\varepsilon$. Comme $\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \subset V$, on en déduit par monotonie de μ^* :

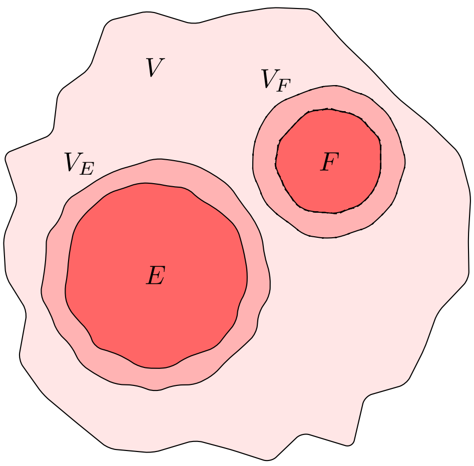
$$\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \mu^*(V) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n) + 2\varepsilon$$

Ceci est valable pour tout $\varepsilon > 0$ donc $\mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(E_n)$, ce qui conclut : μ^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^d$.

On pose $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties μ^*-mesurables de $\mathbb{R}^d$. Le théorème 1.2.3 assure que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}^d$ et que $\mu := \mu^*_{|\mathcal{A}}$ est une mesure complète sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{A})$.

Etape II.2 — *La tribu $\mathcal{A}$ contient la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*
D'après la proposition 1.2.4, il suffit de montrer que μ^* est additive sur les couples de parties de $\mathbb{R}^d$ positivement séparées. Soient ainsi $E, F \subset \mathbb{R}^d$ telles que $r := d(E,F) > 0$, et montrons que $\mu^*(E \cup F) = \mu^*(E) + \mu^*(F)$, i.e. $\mu^*(E \cup F) \geq \mu^*(E) + \mu^*(F)$.
Soit $V \supset (E \cup F)$ un ouvert. Posons :

$$V_E := V \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; d(x,E) < \frac{r}{3}\right\}$$
$$V_F := V \cap \left\{x \in \mathbb{R}^d \;\middle|\; d(x,F) < \frac{r}{3}\right\}$$



Alors V_E et V_F sont des ouverts de $\mathbb{R}^d$ (comme intersections d'ouverts). De plus, d'après la définition de r on a par inégalité triangulaire que V_E et V_F sont disjoints.
Soient $f \prec V_E$ et $g \prec V_F$. Comme f et g sont à supports disjoints, on a $f+g \prec (V_E \cup V_F) \subset V$ d'où $\Lambda f + \Lambda g = \Lambda(f+g) \leq \mu^*(V)$. En passant au sup sur f et g, on en déduit que $\mu^*(V_E) + \mu^*(V_F) \leq \mu^*(V)$, or $E \subset V_E$ et $F \subset V_F$ donc $\mu^*(E) + \mu^*(F) \leq \mu^*(V)$.
Ceci est valable pour tout ouvert $V \supset (E \cup F)$, donc en passant à l'inf sur V on obtient $\mu^*(E) + \mu^*(F) \leq \mu^*(E \cup F)$, ce qu'il fallait démontrer.

Etape II.3 — *La mesure μ est finie sur les compacts.*
Soient $K \subset \mathbb{R}^d$ un compact et f telle que $K \prec f$. Posons $V := \{x \in \mathbb{R}^d \mid 2f(x) > 1\} \supset K$, alors V est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $]\frac{1}{2}, +\infty[$ par l'application continue f.
Soit $g \prec V$: g est nulle sur ${}^cV$ et inférieure ou égale à 1 sur V, donc par définition de V on a $g \leq 2f$ d'où $\Lambda g \leq 2\,\Lambda f$. Ceci est valable pour tout $g \prec V$ donc en passant au sup on obtient $\mu(V) \leq 2\,\Lambda f$, ainsi $\mu(K) \leq \mu(V) \leq 2\,\Lambda f < +\infty$ ce qui conclut.

Etape II.4 — *La mesure μ est régulière.*
La régularité extérieure de μ est assurée par construction, il ne reste qu'à vérifier la régularité intérieure. Soit $A \in \mathcal{A}$.
Considérons d'abord le cas où A est borné, en particulier $\mu(A) < +\infty$ puisque μ est finie sur les compacts. Soient alors $\varepsilon > 0$ et $\overline{B}$ une boule fermée de $\mathbb{R}^d$ contenant A, notons que $\overline{B}$ est un compact. La régularité extérieure de μ appliquée à $\overline{B} \setminus A$ donne un ouvert $V \supset (\overline{B} \setminus A)$ tel que $\mu(V) < \mu(\overline{B} \setminus A) + \varepsilon = \mu(\overline{B}) - \mu(A) + \varepsilon$.
Posons $K := {}^cV \cap \overline{B}$. Alors K est compact comme intersection d'un fermé avec un compact, et inclus dans A car inclus à la fois dans $\overline{B}$ et dans ${}^cV \subset {}^c(\overline{B} \setminus A) = {}^c\overline{B} \cup A$.

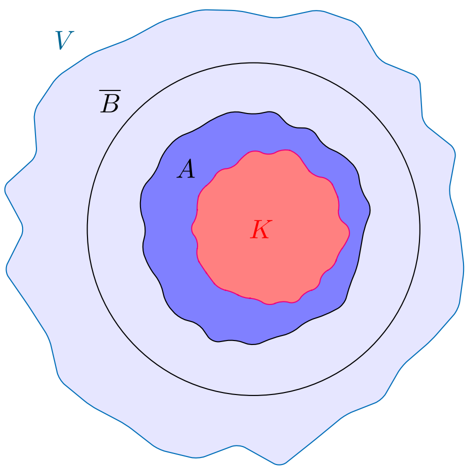


Figure 2 – Schéma de la situation. Ici V est représenté en bleu (clair+foncé) et A est représenté en foncé (bleu+rouge). Le complémentaire de V dans $\overline{B}$ nous fournit le compact K recherché (en rouge).

Remarquons que $\overline{B} = ((\overline{B} \cap V) \cup (\overline{B} \cap {}^cV)) \subset (V \cup K)$, où cette dernière union est disjointe.
Ainsi : $\mu(K) = \mu(V \cup K) - \mu(V) \geq \mu(\overline{B}) - \mu(V) > \mu(\overline{B}) - (\mu(\overline{B}) - \mu(A) + \varepsilon) = \mu(A) - \varepsilon$.
Ceci conclut le cas borné. Revenons au cas général $A \in \mathcal{A}$, soit $a < \mu(A)$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$: $A_n := A \cap \overline{B(0,n)}$. On a $\mu(A) = \lim_n \uparrow \mu(A_n)$, par conséquent il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $a < \mu(A_N) \leq \mu(A)$. Le cas borné précédemment traité appliqué à A_N donne alors un

compact $K \subset A_N \subset A$ tel que $a < \mu(K) \leq \mu(A_N) \leq \mu(A)$, ce qui conclut.

Etape II.5 — *La mesure μ représente Λ : $\forall\, f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) : \Lambda f = \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu$.*

Soient $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ et $\varepsilon > 0$. Notons K le support (compact) de f : $f(K)$ est compact comme image continue d'un compact donc $\mathrm{Im}\ f \subset (f(K) \cup \{0\})$ est contenu dans un intervalle $[a,b]$. Soit $a - \varepsilon < y_0 < a$, et soit $a = y_1 < \cdots < y_{n=n(\varepsilon)} = b$ une subdivision de $[a,b]$ de pas $\delta < \varepsilon$. Pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$, on pose $E_i := \{y_{i-1} < f \leq y_i\} \cap K$. Comme $\mathrm{Im}\ f \subset [a,b]$, on a par construction des y_i que les E_i forment une partition de K, de plus ils sont boréliens car f est continue donc borélienne. Ainsi, μ étant finie sur les compacts et extérieurement régulière, on obtient pour chaque $i \in \{1,\ldots,n\}$ un ouvert $V_i \supset E_i$ tel que $\mu(V_i) < \mu(E_i) + \frac{\varepsilon}{n}$.

Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$. Puisque $y_i - \varepsilon < y_{i-1}$, on a que l'ouvert $\{y_i - \varepsilon < f < y_i + \varepsilon\}$ contient E_i. On peut donc supposer quitte à poser $V_i' := V_i \cap \{y_i - \varepsilon < f < y_i + \varepsilon\}$ que :

$$\forall\, x \in V_i \supset E_i : \quad y_i - \varepsilon < f(x) < y_i + \varepsilon. \tag{9}$$

$K = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i$ donc par le lemme 2.2.3 : $\exists\, g_1 \prec V_1, \ldots, \exists\, g_n \prec V_n \mid \sum_{i=1}^{n} g_i \mathbf{1}_K = \mathbf{1}_K$.

Comme f est nulle en-dehors de K, on a $f = f \sum_{i=1}^{n} g_i$. De plus $fg_i \leq (y_i + \varepsilon) g_i$ d'après (9). Ainsi, par croissance de Λ :

$$\Lambda f \;=\; \sum_{i=1}^{n} \Lambda(fg_i) \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon)\Lambda g_i \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon)\mu(V_i) \tag{10}$$

Toujours d'après (9), on a également :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \int_K f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{E_i} f \,\mathrm{d}\mu \right) \;\geq\; \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) \tag{11}$$

En combinant les inégalités (10) et (11), on obtient :

$$\begin{aligned}
\Lambda f - \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu \;&\leq\; \sum_{i=1}^{n} (y_i + \varepsilon)\mu(V_i) \;-\; \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varepsilon)\mu(E_i) \\
&=\; \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(y_i + \varepsilon)}_{\leq b + \varepsilon} \underbrace{(\mu(V_i) - \mu(E_i))}_{< \frac{\varepsilon}{n}} \;+\; 2\varepsilon \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)}_{= \mu(K)} \\
&\leq\; \sum_{i=1}^{n} (b + \varepsilon) \frac{\varepsilon}{n} \;+\; 2\varepsilon\mu(K) \\
&=\; \varepsilon(b + \varepsilon + 2\mu(K))
\end{aligned}$$

Comme $\mu(K) < +\infty$, on a en faisant tendre ε vers 0 : $\Lambda f - \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu \leq 0$.

En résumé, on a montré que $\forall\, f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) : \Lambda f \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu$, alors qu'on voulait une égalité. Cependant, soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$: on a donc $-\Lambda f = \Lambda(-f) \leq \int_{\mathbb{R}^d} (-f) \,\mathrm{d}\mu = -\int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu$ d'où $\Lambda f \geq \int_{\mathbb{R}^d} f \,\mathrm{d}\mu$ ce qui assure l'égalité et achève la démonstration du théorème.

□

3 Application à la construction de la mesure de Lebesgue

3.1 Construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Une première possibilité, permise par le produit tensoriel des mesures, consiste à définir la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ à partir de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On construit cette dernière à partir de l'intégrale de Riemann.

Théorème 3.1.1 (Existence et unicité de la mesure de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}$)**.** *Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, appelée mesure de Borel-Lebesgue, telle que pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'extrémités $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ on ait $\lambda(I) = b - a$. De plus, λ et sa mesure complétée $\overline{\lambda}$ sont σ-finies, régulières et invariantes par translation.*
La mesure $\overline{\lambda}$ sera appelée mesure de Lebesgue, et les éléments de sa tribu complétée $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ seront dits Lebesgue-mesurables.

Démonstration.

I — Unicité.
L'unicité ne pose pas de problème, elle se démontre indépendamment de la construction choisie. Soient en effet deux mesures μ et ν sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui associent à tout intervalle sa longueur. Notons que μ et ν sont finies sur les intervalles bornés, donc sont σ-finies puisque $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n, n]$. Posons $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$ l'ensemble des intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$. Les mesures μ et ν coïncident sur $\mathcal{C}$, qui est stable par intersection finie et contient les intervalles $[-n, n]$, donc le corollaire du théorème de la classe monotone sur l'unicité des mesures ([Lam, p. 7]) assure que μ et ν coïncident encore sur la tribu engendrée par $\mathcal{C}$ qui n'est autre que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ (cf. le lemme 3.3.2 plus loin). Ainsi $\mu = \nu$.

II — Existence.
On construit en réalité la mesure de Lebesgue sur la tribu complétée, dont la restriction à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sera la mesure de Borel-Lebesgue.
Comme promis, on considère l'application $\Lambda : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ qui à une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ associe son intégrale de Riemann que l'on notera $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ (f est Riemann-intégrable car continue, et malgré la notation utilisée il ne s'agit pas d'une intégrale généralisée puisque le support de f est compact). Nous savons que Λ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$, donc d'après le théorème 2.3.2 de représentation de Riesz, il existe une unique tribu $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ contenant les boréliens et une unique mesure $\overline{\lambda}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}))$ complète (complétée de sa restriction aux boréliens λ, d'où la notation), régulière et finie sur les compacts telle que :

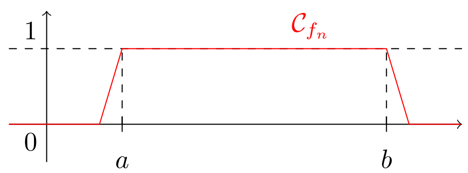
$$\forall\ f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}) : \quad \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\overline{\lambda} = \int_{\mathbb{R}} f\,\mathrm{d}\lambda\,, \tag{12}$$

où la deuxième égalité ci-dessus vient du fait qu'une fonction de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ est continue donc borélienne.

Etape II.1 — *Pour tout intervalle fermé borné $[a,b]$, on a $\lambda([a,b]) = b-a$.*

Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné, on a $\lambda([a,b]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]}\,\mathrm{d}\lambda$. On veut utiliser (12), pour cela il faut approcher la fonction non continue $\mathbf{1}_{[a,b]}$ par des éléments de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$. Posons ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$ définie par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a - 2^{-n} \\ 1 + 2^n(x-a) & \text{si } a - 2^{-n} \leq x \leq a \\ 1 & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 + 2^n(b-x) & \text{si } b \leq x \leq b + 2^{-n} \\ 0 & \text{si } x \geq b + 2^{-n} \end{cases}$$



D'après (12), on a $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 2^{-n-1} + (b-a) + 2^{-n-1} = b - a + 2^{-n}$.
De plus, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{1}_{[a,b]}$, et $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $|f_n| \leq \mathbf{1}_{[a-1,b+1]}$, où $\mathbf{1}_{[a-1,b+1]}$ est λ-intégrable puisque λ est finie sur les compacts.
Par conséquent, d'après le théorème de convergence dominée :

$$\lambda([a,b]) = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]}\,\mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} (\lim_n f_n)\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to+\infty} (b - a + 2^{-n}) = b-a.$$

Remarquons qu'en particulier, λ et $\overline{\lambda}$ sont σ-finies puisque $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n,n]$.

Etape II.2 — *Les mesures λ et $\overline{\lambda}$ sont invariantes par translation.*

Remarquons d'abord que le translaté de $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ par un vecteur $x \in \mathbb{R}$ est encore un borélien, comme image réciproque de B par l'application continue $y \mapsto y - x$.
On fixe un vecteur de translation $x \in \mathbb{R}$, et on définit l'application $\lambda_x : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,+\infty]$ par $\lambda_x(B) := \lambda(x+B)$. On veut montrer que $\lambda_x = \lambda$. Pour cela, par le même argument que celui utilisé dans la preuve de l'unicité, il suffit de montrer que λ_x est une mesure qui coïncide avec λ sur les intervalles fermés bornés.
Montrons que λ_x est une mesure. On a $\lambda_x(\varnothing) = \lambda(x+\varnothing) = \lambda(\varnothing) = 0$. Soit maintenant $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de boréliens deux-à-deux disjoints. Alors $(x+B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encore une suite de boréliens deux-à-deux disjoints, donc par σ-additivité de λ :

$$\lambda_x\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lambda\left(x + \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (x+B_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(x+B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_x(B_n)$$

Ainsi λ_x est σ-additive : c'est une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné : $\lambda_x([a,b]) = \lambda(x+[a,b]) = \lambda([x+a,x+b]) = (x+b)-(x+a) = b-a = \lambda([a,b])$.
On a donc bien $\lambda_x = \lambda$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$, ce qui montre que λ est invariante par translation.
Il reste à propager cette propriété à la mesure complétée $\overline{\lambda}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$. On sait que $A = B \cup N$ où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et N est λ-négligeable. Notons que $x+B$ est encore un borélien, et que $x+N$ est encore λ-négligeable puisque si $N \subset F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ avec $\lambda(F) = 0$ alors $(x+N) \subset (x+F)$ où l'invariance par translation de λ assure que $\lambda(x+F) = 0$. Par conséquent : $\overline{\lambda}(x+A) = \overline{\lambda}(x+(B\cup N)) = \overline{\lambda}((x+B)\cup(x+N)) = \lambda(x+B) = \lambda(B) = \overline{\lambda}(A)$, ce qui conclut : $\overline{\lambda}$ est invariante par translation.

Etape II.3 — *Les parties dénombrables de $\mathbb{R}$ sont de λ-mesure nulle.*

L'invariance par translation de λ assure que tous les singletons ont la même mesure m. Si $m > 0$, alors $1 = \lambda([0,1]) \geq \lambda([0,1] \cap \mathbb{Q}) = \sum_{x \in ([0,1] \cap \mathbb{Q})} \lambda(\{x\}) = \sum_{x \in ([0,1] \cap \mathbb{Q})} m = +\infty$, ce qui est absurde. Ainsi $m = 0$, et pour toute partie $A \subset \mathbb{R}$ dénombrable :

$$\lambda(A) = \lambda\left(\bigcup_{x \in A} \{x\}\right) = \sum_{x \in A} \lambda(\{x\}) = \sum_{x \in A} m = \sum_{x \in A} 0 = 0.$$

Etape II.4 — *Pour tout intervalle I d'extrémités $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$: $\lambda(I) = b - a$.*

On a déjà le résultat pour les intervalles fermés bornés, d'où immédiatement le résultat pour tous les intervalles bornés puisque λ est nulle sur les singletons.

On considère désormais un intervalle non borné $I =]-\infty, b]$. Alors $I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, b]$ donc :

$$\lambda(I) = \lambda\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, b]\right) = \lim_n \uparrow \lambda([-n, b]) = \lim_{n \to \infty} (b + n) = +\infty,$$

La preuve est la même pour les autres types d'intervalles non bornés.

□

Maintenant que nous avons construit la mesure de Lebesgue λ en dimension 1, il suffit de poser $\lambda_d := \lambda^{\otimes d}$ pour définir la mesure de Lebesgue en dimension supérieure. Rappelons l'essentiel sur les produits de tribus et de mesures :

Définition 3.1.2. Soient $(E_1, \mathcal{A}_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurés.
On appelle *tribu produit* de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ la tribu notée $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ sur l'ensemble $E_1 \times E_2$ engendrée par les produits cartésiens $A_1 \times A_2$ où $A_1 \in \mathcal{A}_1$ et $A_2 \in \mathcal{A}_2$.

Proposition. *Le produit tensoriel des tribus est associatif.*

Proposition. *On a $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$, et $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{m+n}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^m) \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.*

Définition 3.1.3. Soient $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ et $(E_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ deux espaces mesurés σ-finis.
On appelle *mesure produit* de μ_1 et μ_2 l'unique mesure notée $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur l'espace mesurable $(E_1 \times E_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ qui vérifie : $\forall\ A_1 \in \mathcal{A}_1, \forall\ A_2 \in \mathcal{A}_2 : (\mu_1 \otimes \mu_2)(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)$.

Proposition. *Le produit tensoriel des mesures est associatif. Si $(E_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \ldots, (E_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ sont des espaces mesurés σ-finis : $\forall\ A_1 \in \mathcal{A}_1, \ldots, \forall\ A_n \in \mathcal{A}_n : (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(A_1 \times \cdots \times A_n) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i(A_i)$.*

On obtient donc bien une mesure σ-finie sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, dont l'unicité et l'invariance par translation se montrent de la même manière qu'en dimension 1, et qui coïncide avec le volume sur les rectangles par la définition-même de la mesure produit. Cependant, la régularité est a priori perdue. En réalité, le théorème 3.1.5 à suivre assure qu'il n'en est rien :

Lemme 3.1.4. *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et μ une mesure finie sur $(U, \mathcal{B}(U))$.*
Alors μ est une mesure régulière.

Démonstration.
On pose $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{B}(U) \mid \forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, K \subset A \text{ compact}, \exists\, V \supset A \text{ ouvert } \mid \mu(V \setminus K) < \varepsilon\}$.
La mesure μ est régulière si et seulement si $\mathcal{M} = \mathcal{B}(U)$. Pour obtenir cela, on montre que $\mathcal{M}$ est une classe monotone sur U qui contient les ouverts de U.
Vérifions d'abord que $\mathcal{M}$ contient les ouverts de U (donc contient U en particulier). Soient W un ouvert de U et $\varepsilon > 0$. Comme U est ouvert dans $\mathbb{R}^d$, W l'est aussi donc est union dénombrable de compacts. En effet, il suffit de poser $K_n := \overline{B(0,n)} \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, {}^cW) \geq 2^{-n}\}$ (compact comme intersection d'un compact avec un fermé) : on a $d(x, {}^cW) = 0 \iff x \in \overline{{}^cW} \iff x \in {}^cW$ d'où $W = \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, {}^cW) > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. La suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, par conséquent $\mu(W) = \lim\limits_n \uparrow \mu(K_n)$ donc il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(W) - \varepsilon < \mu(K_N)$. En posant $K := K_N$ et $V := W$, on voit que $W \in \mathcal{M}$.
Soient désormais $A, B \in \mathcal{M}$ tels que $A \subset B$, et $\varepsilon > 0$. Alors :

$$\begin{aligned} &\exists\, K_A \subset A \subset V_A \mid \mu(V_A \setminus K_A) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{où } K_A \text{ est compact et } V_A \text{ est un ouvert de } U, \\ \text{et} \quad &\exists\, K_B \subset B \subset V_B \mid \mu(V_B \setminus K_B) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{où } K_B \text{ est compact et } V_B \text{ est un ouvert de } U. \end{aligned}$$

Mais alors en posant $V := V_B \setminus K_A = V_B \cap {}^cK_A$ et $K := K_B \cap {}^cV_A$, on a $K \subset (B \setminus A) \subset V$ avec K compact et V ouvert de U tels que :

$$\begin{aligned} \mu(V \setminus K) &= \mu((V_B \cap {}^cK_A) \cap ({}^cK_B \cup V_A)) \\ &= \mu((V_B \cap {}^cK_A \cap {}^cK_B) \cup (V_B \cap {}^cK_A \cap V_A)) \\ &\leq \mu(V_B \cap {}^cK_A \cap {}^cK_B) + \mu(V_B \cap {}^cK_A \cap V_A) \\ &\leq \mu(V_B \cap {}^cK_B) + \mu(V_A \cap {}^cK_A) = \mu(V_B \setminus K_B) + \mu(V_A \setminus K_A) < \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi $B \setminus A \in \mathcal{M}$: $\mathcal{M}$ est stable par différence propre.
Soient $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$ et $\varepsilon > 0$. On pose $A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Alors $\mu(A) = \lim\limits_n \uparrow \mu(A_n)$ donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mu(A) - \varepsilon < \mu(A_N) \leq \mu(A)$. Comme $A_N \in \mathcal{M}$, il existe un compact $K \subset A_N \subset A$ tel que $\mu(A) - \varepsilon < \mu(K) \leq \mu(A_N) \leq \mu(A)$. Il reste donc à déterminer un ouvert V de U qui convienne. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un ouvert $V_n \supset A_n$ tel que $\mu(V_n) \leq \mu(A_n) + 2^{-n}\varepsilon$. Posons $V := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$. V est un ouvert contenant A, et :

$$\begin{aligned} V \setminus A &= \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}^cA_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(V_n \cap \left(\bigcap_{N \in \mathbb{N}} {}^cA_N\right)\right) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (V_n \setminus A_n)\,, \\ \text{d'où} \quad \mu(V \setminus A) &\leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(V_n \setminus A_n) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n}\varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi $A \in \mathcal{M}$: $\mathcal{M}$ est stable par union croissante, c'est une classe monotone. On a vu qu'elle contient les ouverts de U, qui forment une classe de parties stable par intersection finie et de tribu engendrée $\mathcal{B}(U)$. Ainsi le théorème de la classe monotone assure que $\mathcal{B}(U) \subset \mathcal{M}$ i.e. $\mathcal{M} = \mathcal{B}(U)$, ce qui termine la preuve. $\square$

Théorème 3.1.5. *Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ finie sur les compacts.*
Alors μ est une mesure régulière.

Démonstration.
On pose pour tout $n \geq 1$: $E_n :=]-n, n[^d$. La suite $(E_n)_{n\geq 1}$ est une suite d'ouverts de $\mathbb{R}^d$ de μ-mesure finie dont l'union croissante est égale à $\mathbb{R}^d$.
Montrons d'abord que μ est intérieurement régulière. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a $\mu(B) = \lim_n \uparrow \mu(B \cap E_n)$. Ainsi, soit $a < \mu(B)$: il existe un $N \geq 1$ tel que $a < \mu(B \cap E_N) \leq \mu(B)$. Remarquons que $\mu(B \cap E_N) = \mu_{|\mathcal{B}(E_N)}(B \cap E_N)$, où la mesure $\mu_{|\mathcal{B}(E_N)}$ est regulière d'après le lemme 3.1.4. Par conséquent, il existe un compact $K \subset (B \cap E_N)$ tel que $a < \mu(K) \leq \mu(B \cap E_N) \leq \mu(B)$. Ceci montre que μ est intérieurement régulière.
Montrons que μ est extérieurement régulière. Soit $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, on a $\mu(B) = \lim_n \uparrow \mu(B \cap E_n)$. Supposons $\mu(B) < +\infty$, sans quoi il n'y a rien à montrer. Soit alors $\varepsilon > 0$. Pour tout $n \geq 1$, la mesure $\mu_{|\mathcal{B}(E_n)}$ est régulière d'après le lemme 3.1.4 donc il existe un ouvert V_n de E_n (a fortiori ouvert dans $\mathbb{R}^d$ puisque E_n est lui-même ouvert dans $\mathbb{R}^d$) tel que $V_n \supset (B \cap E_n)$ et $\mu(V_n \setminus (B \cap E_n)) < 2^{-n}\varepsilon$. On pose alors $V := \bigcup_{n\geq 1} V_n$. V est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ contenant B, et :

$$\begin{aligned}
V \setminus B &= \left(\bigcup_{n\geq 1} V_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\geq 1} (B \cap E_n)\right) \\
&= \left(\bigcup_{n\geq 1} V_n\right) \cap \left(\bigcap_{n\geq 1} {}^c(B \cap E_n)\right) \\
&= \bigcup_{n\geq 1} \left(V_n \cap \left(\bigcap_{N\geq 1} {}^c(B \cap E_N)\right)\right) \\
&\subset \bigcup_{n\geq 1} (V_n \cap {}^c(B \cap E_n)) = \bigcup_{n\geq 1} (V_n \setminus (B \cap E_n))
\end{aligned}$$

Ainsi : $\mu(V \setminus B) \leq \sum_{n\geq 1} \mu(V_n \setminus (B \cap E_n)) \leq \sum_{n\geq 1} 2^{-n}\varepsilon = \varepsilon$, donc μ est extérieurement régulière. □

Il est cependant regrettable d'invoquer un théorème aussi puissant, alors que dans le cadre du théorème de représentation la régularité des mesures avait été obtenue beaucoup plus facilement. De plus, la construction par le produit tensoriel nous a privé d'une autre propriété de la mesure de Lebesgue que l'on espérait obtenir, à savoir le fait que les intégrales de Riemann et de Lebesgue coïncident en n'importe quelle dimension sur les fonctions continues à support compact. C'est pourquoi nous nous proposons plutôt de construire la mesure de Lebesgue en dimension d par application directe du théorème de représentation de Riesz, comme nous l'avons fait en dimension 1 avec le théorème 3.1.1, à partir de l'intégrale de Riemann.

3.2 Construction de l'intégrale de Riemann en dimension d

Il existe plusieurs constructions de l'intégrale de Riemann en dimension d, nous utiliserons la suivante qui est également celle employée dans [Rud].

Définition 3.2.1. On appelle *rectangle* de $\mathbb{R}^d$ tout produit cartésien de d intervalles de $\mathbb{R}$. Le *volume* d'un rectangle $R \subset \mathbb{R}^d$, noté $\mathrm{Vol}(R)$, est défini comme le produit des longueurs de ses côtés (avec la convention $0 \times \infty = 0$).

Notation. Soit $n \in \mathbb{N}$.
- On note P_n le réseau de $\mathbb{R}^d$ formé par les points dont les coordonnées sont des multiples entiers de 2^{-n}.
- On note Ω_n l'ensemble des rectangles (carrés) de la forme $x + [0, 2^{-n}[^d$ où $x \in P_n$.

Remarque. La suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante, et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} P_n$ est dense dans $\mathbb{R}^d$.

Remarque. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Ω_n est une partition de $\mathbb{R}^d$. Un carré de Ω_n a pour volume 2^{-nd}, et si $r > n$ il contient exactement $2^{(r-n)d}$ points de P_r.

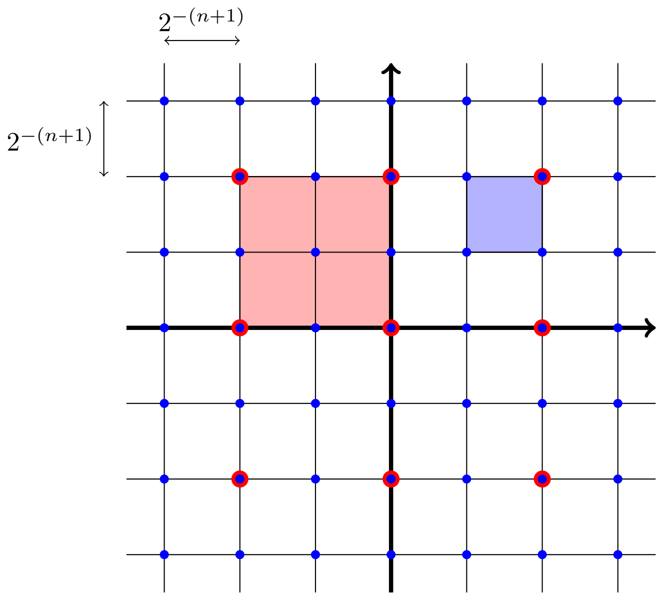


FIGURE 3 – Quadrillages superposés en dimension $d = 2$: maillage n en rouge, maillage $n + 1$ en bleu. Le carré rouge est un élément de Ω_n, il contient exactement 1 point de P_n et 4 points de P_{n+1} (les points sur les côtés haut et droit étant en-dehors du carré).

Dans cette partie, beaucoup de résultats tombent sous le sens avec un simple dessin. Nous nous efforcerons toutefois d'en donner des démonstrations rigoureuses. La proposition suivante en est un exemple :

Proposition 3.2.2. *Soit $R = \prod_{i=1}^d]a_i, b_i[\subset \mathbb{R}^d$ un rectangle ouvert borné. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose E_n l'union des carrés de Ω_n dont l'adhérence est dans R.*
Alors les E_n sont des rectangles dont le volume converge vers celui de R, et la suite d'ensembles $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers R.

Démonstration.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, d\}$, on pose a'_i le plus petit réel strictement supérieur à a_i qui soit un multiple entier de 2^{-n} et b'_i le plus grand réel strictement inférieur à b_i qui soit un multiple entier de 2^{-n}. En particulier on a $a_i < a'_i \le a_i + 2^{-n}$ et $b_i > b'_i \ge b_i - 2^{-n}$. Nous allons établir l'égalité $E_n = \prod_{i=1}^d [a'_i, b'_i[$.

Montrons l'inclusion "$\subset$". Soit $C \in \Omega_n$ tel que $\overline{C} \subset R$. On a $C = x + [0, 2^{-n}[^d = \prod_{i=1}^d [x_i, x_i + 2^{-n}[$ pour un certain $x = (x_1, \dots, x_d) \in P_n$, d'où $\overline{C} = x + [0, 2^{-n}]^d = \prod_{i=1}^d [x_i, x_i + 2^{-n}]$. Ainsi l'inclusion $\overline{C} \subset R$ signifie exactement que :

$$\forall\ i \in \{1, \dots, d\} : \quad x_i > a_i \quad \text{et} \quad x_i + 2^{-n} < b_i.$$

Or x_i et $x_i + 2^{-n}$ sont des multiples entiers de 2^{-n}, donc par définition de a'_i et b'_i on a $x_i \ge a'_i$ et $x_i + 2^{-n} \le b'_i$ d'où $[x_i, x_i + 2^{-n}[\ \subset [a'_i, b'_i[\ \forall\ i$, ce qui signifie exactement que $C \subset \prod_{i=1}^d [a'_i, b'_i[$.

Montrons l'inclusion "$\supset$". Soient $y = (y_1, \dots, y_d) \in \prod_{i=1}^d [a'_i, b'_i[$ et C l'unique élément de Ω_n contenant y, il n'y a qu'à montrer que $\overline{C} \subset R$. Comme précédemment, on a pour un certain $x = (x_1, \dots, x_d) \in P_n$ que $C = x + [0, 2^{-n}[^d = \prod_{i=1}^d [x_i, x_i + 2^{-n}[$, donc $x_i \le y_i < x_i + 2^{-n}\ \forall\ i$. Soit $i \in \{1, \dots, d\}$. Si on avait $x_i \le a_i$ alors on aurait $x_i < a'_i$ d'où $a'_i - x_i \ge 2^{-n}$ puisque x_i et a'_i sont des multiples entiers de 2^{-n}. Or $y_i \ge a'_i$, donc on aurait $|x_i - y_i| \ge 2^{-n}$ ce qui est absurde car $x, y \in C$. Ainsi $x_i > a_i$. De même, si on avait $x_i + 2^{-n} \ge b_i$ alors on aurait $x_i + 2^{-n} > b'_i$ d'où $x_i + 2^{-n} - b'_i \ge 2^{-n}$ puisque $x_i + 2^{-n}$ et b'_i sont des multiples entiers de 2^{-n}, et enfin $x_i \ge b'_i > y_i$ ce qui est absurde. Ainsi $x_i + 2^{-n} < b_i$. En conclusion $[x_i, x_i + 2^{-n}] \subset]a_i, b_i[\ \forall\ i$ donc $\overline{C} \subset R$.

On a donc montré que $E_n = \prod_{i=1}^d [a'_i, b'_i[$: c'est un rectangle, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ suffisamment grand (i.e. tel que $b_i - a_i - 2^{-n+1} \ge 0\ \ \forall\ i$) :

$$\mathrm{Vol}(R)\ \ge\ \mathrm{Vol}(E_n)\ =\ \prod_{i=1}^d (b'_i - a'_i)\ \ge\ \prod_{i=1}^d ((b_i - 2^{-n}) - (a_i + 2^{-n}))\ =\ \prod_{i=1}^d (b_i - a_i - 2^{-n+1})$$

Or le produit de droite converge vers $\prod_{i=1}^d (b_i - a_i) = \mathrm{Vol}(R)$, donc le théorème des gendarmes permet de conclure la première partie de la démonstration.
Il est clair que la suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que ses termes sont inclus dans R. Ainsi elle converge vers R si et seulement si $R \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Soit $x = (x_1, \dots, x_d) \in R$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, d\}$, on a $a_i < x < b_i$, d'où l'existence d'un $N_i \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\ n \ge N_i : a_i + 2^{-n} < x_i < b_i - 2^{-n}$. Posons $N := \max(N_1, \dots, N_d)$, et considérons les a'_i, b'_i associés à l'entier N : $E_N = \prod_{i=1}^d [a'_i, b'_i[$. Alors :

$$\forall\ i \in \{1, \dots, d\} : \quad a'_i \le a_i + 2^{-N} < x_i < b_i - 2^{-N} \le b'_i$$

On a donc bien $a'_i \le x_i < b'_i\ \ \forall\ i$, i.e. $x \in E_N$ ce qui conclut.

□

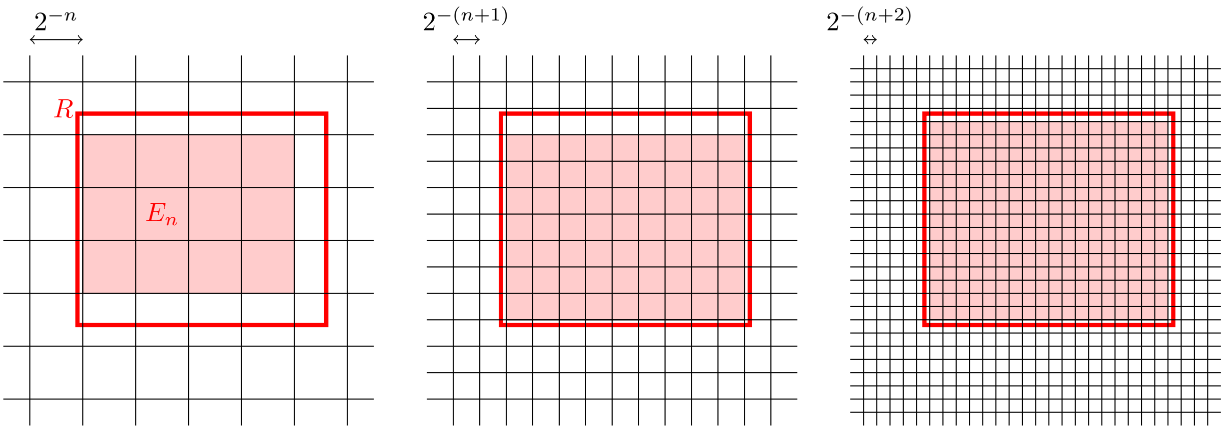


FIGURE 4 – Illustration de la proposition 3.2.2. Les rectangles E_n, E_{n+1} et E_{n+2} se rapprochent de plus en plus du grand rectangle R.

Proposition 3.2.3. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour toute fonction (non nécessairement continue) à support compact $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, on définit $S_n(f) := 2^{-nd} \sum_{x \in P_n} f(x)$.*
Alors $(S_{n|\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de formes linéaires positives sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ qui est simplement convergente, et sa limite S est encore une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration.
Tout d'abord, notons que la somme qui définit $S_n(f)$ ne contient qu'un nombre fini de termes non nuls, puisque le support de f est compact donc ne rencontre le réseau P_n qu'en un nombre fini de points. Ainsi les applications S_n sont bien définies. De plus elles sont linéaires et croissantes, et les termes de la suite $(S_{n|\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont clairement des formes linéaires positives sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$.
Commençons par effectuer un calcul qui nous sera utile par la suite. Soit R un rectangle borné de la forme $R = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i[^d$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
S_n(\mathbf{1}_R) &= 2^{-nd} \sum_{x\in P_n} \mathbf{1}_R(x) \\
&= \sum_{x\in(P_n\cap R)} 2^{-nd} \\
&= \sum_{x\in(P_n\cap R)} \mathrm{Vol}(x + [0, 2^{-n}[^d) \\
&= \mathrm{Vol}\left(\bigcup_{x\in(P_n\cap R)} (x + [0, 2^{-n}[^d) \right) ,
\end{aligned} \tag{13}$$

où la dernière égalité vient du fait que l'union est disjointe. Si de plus $a := (a_1, \dots, a_d)$ et $b := (b_1, \dots, b_d)$ sont dans P_N pour un certain $N \in \mathbb{N}$, alors cette union est une partition de R et :

$$S_N(\mathbf{1}_R) = \mathrm{Vol}(R) \tag{14}$$

Soit maintenant $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, montrons que la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Soient $\varepsilon > 0$ et $M \in \mathbb{N}$ tel que le support de f soit inclus dans $[-M, M[^d$. Comme f est continue à support compact,

f est uniformément continue : munissons par exemple $\mathbb{R}^d$ de la norme $||\cdot||_\infty$, on dispose ainsi d'un $\delta > 0$ tel que : $\forall\ x, x' \in \mathbb{R}^d : ||x - x'||_\infty < \delta \implies |f(x) - f(x')| < \varepsilon$.
Choisissons $N \in \mathbb{N}$ tel que $2^{-N} < \delta$. Soient $C \in \Omega_N$ et $x, x' \in \overline{C}$, alors $||x - x'||_\infty \leq 2^{-N} < \delta$ par définition de Ω_N d'où $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$. En particulier, puisque f atteint ses bornes sur le compact $\overline{C}$, on obtient $\left|\sup_C f - \inf_C f\right| \leq \left|\sup_{\overline{C}} f - \inf_{\overline{C}} f\right| < \varepsilon$.
Comme les $C \in \Omega_N$ partitionnent $\mathbb{R}^d$, on peut définir les fonctions "en escalier" g et h par $g(x) := \inf_C f$ et $h(x) := \sup_C f$ si $x \in C \in \Omega_N$. Par construction, on a $g \leq f \leq h$ et $h - g < \varepsilon$. De plus, les suites $(S_n(g))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n(h))_{n\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir du rang N, en effet (on détaille pour g, la preuve est la même pour h) :

$$\begin{aligned}
\forall\ n \geq N : \quad S_n(g) &= 2^{-nd} \sum_{x\in P_n} g(x) \\
&= 2^{-nd} \sum_{C\in\Omega_N} \sum_{x\in(P_n\cap C)} g(x) \\
&= 2^{-nd} \sum_{C\in\Omega_N} \sum_{x\in(P_n\cap C)} \inf_C f \\
&= 2^{-nd} \sum_{C\in\Omega_N} |P_n \cap C|. \inf_C f \\
&= 2^{-nd} \sum_{C\in\Omega_N} 2^{(n-N)d}. \inf_C f \\
&= 2^{-Nd} \sum_{C\in\Omega_N} \inf_C f \\
&= 2^{-Nd} \sum_{x\in P_N} g(x) \\
&= S_N(g)
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité vient du fait que chaque $C \in \Omega_N$ contient un et un seul point du réseau P_N. Ainsi, $\forall\ n \geq N : S_N(g) = S_n(g) \leq S_n(f) \leq S_n(h) = S_N(h)$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
&S_N(g) \ \leq\ \liminf_{n\to+\infty} S_n(f) \ \leq\ \limsup_{n\to+\infty} S_n(f) \ \leq\ S_N(h) \\
\implies\quad & 0 \ \leq\ \limsup_{n\to+\infty} S_n(f) - \liminf_{n\to+\infty} S_n(f) \ \leq\ S_N(h) - S_N(g) = S_N(h - g) \qquad (15)
\end{aligned}$$

Or h et g sont à support inclus dans $R := [-M-1, M+1[^d$. En effet, si $x = (x_1, \ldots, x_d) \notin R$ alors il existe $i_0 \in \{1, \ldots, d\}$ tel que $x_{i_0} < -M - 1$ (ou $x_{i_0} > M + 1$), et en prenant l'unique $C \in \Omega_N$ tel que $x \in C$ on a $\forall\ y = (y_1, \ldots, y_d) \in C : y_{i_0} \leq x_{i_0} + 2^{-N} < -M$ (ou $y_{i_0} \geq x_{i_0} - 2^{-N} > M$), ce qui montre que $C \cap [-M, M[^d = \varnothing$: f est nulle sur C donc g et h le sont également et on a bien $g(x) = h(x) = 0$.
Ainsi $h - g \leq \varepsilon.\mathbf{1}_{[-M-1,M+1[^d}$ d'où $S_N(h-g) \leq \varepsilon.S_N(\mathbf{1}_{[-M-1,M+1[^d}) = \varepsilon.(2M+2)^d$, où cette dernière égalité vient du calcul fait en (14). Par conséquent, en reprenant l'inégalité (15) :

$$0 \ \leq\ \limsup_{n\to+\infty} S_n(f) - \liminf_{n\to+\infty} S_n(f) \ \leq\ \varepsilon.(2M+2)^d$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\limsup_{n\to+\infty} S_n(f) = \liminf_{n\to+\infty} S_n(f)$ donc la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et si f est positive alors la suite est à termes positifs donc sa limite $S(f)$ est positive. Enfin, S est linéaire comme limite simple d'applications linéaires, ce qui termine la preuve. $\square$

3.3 Construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$

Définition 3.3.1. Soit $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$. On appelle *intégrale de Riemann* de f le nombre réel $S(f)$ défini dans la proposition 3.2.3, que l'on notera $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Comme annoncé, l'existence de la mesure de Lebesgue s'obtient par le théorème de représentation de Riesz. Quant à l'unicité, elle nécessite le lemme suivant, que nous avions déjà dû utiliser en dimension 1 dans le théorème 3.1.1.

Lemme 3.3.2. *Tout ouvert de $\mathbb{R}^d$ s'écrit comme union dénombrable de rectangles fermés bornés. En conséquence, la tribu engendrée par les rectangles fermés bornés de $\mathbb{R}^d$ est la tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soit V un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n := \bigcup_{\substack{C \in \Omega_n \\ \overline{C} \subset V}} \overline{C}$.
Comme Ω_n est dénombrable $\forall\, n$, on a que E_n est une union dénombrable de carrés fermés bornés, d'où la même chose pour $E := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \subset V$. Montrons justement que $V = E$, ce qui conclura.
Soit $x \in V$. Comme V est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset V$, où on considère la boule pour la norme $||\cdot||_\infty$. Soit maintenant N un entier tel que $2^{-N} < r$, on note C l'unique carré de Ω_N tel que $x \in C$. Pour tout $y \in \overline{C}$, on a $||x-y||_\infty \leq 2^{-N} < r$ donc $y \in V$: ainsi $\overline{C} \subset V$ donc $\overline{C} \subset E_N$ et $x \in E_N \subset E$. On obtient bien $V = E$.
Ainsi la tribu engendrée par les rectangles fermés bornés de $\mathbb{R}^d$ contient la tribu engendrée par les ouverts qui est précisément $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Inversement, les rectangles sont clairement des boréliens puisque $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes d}$ (une autre manière de le voir est, étant donné un rectangle $R = \prod_{i=1}^d I_i$, de remarquer que $R = \bigcap_{i=1}^d \pi_i^{-1}(I_i)$ est une intersection finie de boréliens puisque les projections $\pi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont continues). Ceci achève la démonstration. $\square$

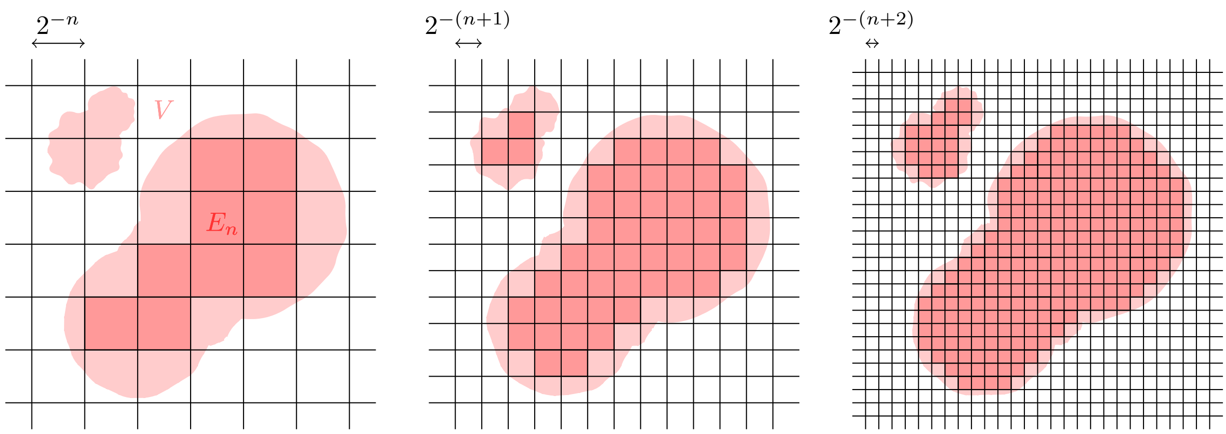


Figure 5 – Illustration du lemme 3.3.2. Les unions dénombrables de carrés E_n, E_{n+1} et E_{n+2} se rapprochent de plus en plus de l'ouvert V.

Théorème 3.3.3 (Existence et unicité de la mesure de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$).
Il existe une unique mesure λ_d sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, appelée mesure de Borel-Lebesgue, qui coïncide avec le volume sur les rectangles. De plus, λ_d et sa mesure complétée $\overline{\lambda_d}$ sont σ-finies, régulières et invariantes par translation.
La mesure $\overline{\lambda_d}$ sera appelée mesure de Lebesgue, et les éléments de sa tribu complétée $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ seront dits Lebesgue-mesurables.

Démonstration.

I — Unicité.
Supposons μ et ν deux mesures sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ qui associent à tout rectangle de $\mathbb{R}^d$ son volume. Alors μ et ν sont finies sur les compacts donc σ-finies puisque $\mathbb{R}^d = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n]^d$, de plus elles coïncident sur l'ensemble $\mathcal{C}$ des rectangles fermés bornés de $\mathbb{R}^d$. Or $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie, contient les rectangles $[-n,n]^d$, et engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ d'après le lemme 3.3.2. Ainsi μ et ν coïncident sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ d'après le corollaire du théorème de la classe monotone sur l'unicité des mesures.

II — Existence.
On construit la mesure de Lebesgue sur la tribu complétée, dont la restriction à $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sera la mesure de Borel-Lebesgue.
On considère l'application $\Lambda : \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ qui à une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ associe son intégrale de Riemann $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x$. Nous savons que Λ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$, donc d'après le théorème 2.3.2 de représentation de Riesz, il existe une unique tribu $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ contenant les boréliens et une unique mesure $\overline{\lambda_d}$ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{L}(\mathbb{R}^d))$ complète (complétée de sa restriction aux boréliens λ_d, d'où la notation), régulière et finie sur les compacts telle que :

$$\forall\ f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d) : \quad \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\overline{\lambda_d} = \int_{\mathbb{R}^d} f\,\mathrm{d}\lambda_d\,, \tag{16}$$

où la deuxième égalité ci-dessus vient du fait qu'une fonction de $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est continue donc borélienne.

Etape II.1 — *La mesure λ_d coïncide avec le volume sur les rectangles ouverts bornés de $\mathbb{R}^d$.*
Soit $R = \prod_{i=1}^d]a_i, b_i[\subset \mathbb{R}^d$ un rectangle ouvert borné. On pose $R_N := \prod_{i=1}^d]a_i, b_i + 2^{-N}[\supset R$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Notons que $\mathrm{Vol}(R_N) = \prod_{i=1}^d (b_i + 2^{-N} - a_i) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \prod_{i=1}^d (b_i - a_i) = \mathrm{Vol}(R)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose E_n l'union des carrés de Ω_n dont l'adhérence est dans R. Par définition on a $\overline{E_n} \subset R\ \ \forall\, n$, d'où par le lemme 2.2.2 une fonction f_n vérifiant $\overline{E_n} \prec f_n \prec R$.
Quitte à considérer $g_n := \max(f_0, \ldots, f_n)$, on peut supposer la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante.
Fixons $n \in \mathbb{N}$. D'une part, en reprenant les notations de la proposition 3.2.3, on a :

$$\forall\ N \geq n : \ S_N(f_n) \geq S_N(\mathbf{1}_{E_n}) = \mathrm{Vol}(E_n)\,,$$

où la dernière égalité vient de (14) et de la proposition 3.2.2 qui assure que E_n est un rectangle dont les sommets sont dans $P_n \subset P_N$. On en déduit en faisant tendre N vers $+\infty$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,\mathrm{d}x \geq \mathrm{Vol}(E_n) \tag{17}$$

D'autre part, d'après le calcul effectué en (13) :

$$\forall\ N \geq n: \quad S_N(f_n) \leq S_N(\mathbf{1}_R) = \mathrm{Vol}\left(\bigcup_{x \in (P_N \cap R)} \underbrace{(x + [0, 2^{-N}[^d)}_{\subset R_N} \right) \leq \mathrm{Vol}(R_N)$$

Par conséquent, en passant à la limite :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \lim_{N \to +\infty} \mathrm{Vol}(R_N) = \mathrm{Vol}(R) \tag{18}$$

Ainsi en mettant bout à bout les inégalités (17) et (18) : $\mathrm{Vol}(E_n) \leq \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{Vol}(R)$. Or d'après la proposition 3.2.2 on a $\mathrm{Vol}(E_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{Vol}(R)$. Par le théorème des gendarmes :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{Vol}(R)$$

D'autre part, on sait que $\forall\ n \in \mathbb{N}: \mathbf{1}_{E_n} \leq f_n \leq \mathbf{1}_R$, donc d'après la proposition 3.2.2 la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (et en croissant) vers $\mathbf{1}_R$. Par conséquent, d'après (16) et le théorème de convergence monotone :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^d} f_n\,\mathrm{d}\lambda_d \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_R\,\mathrm{d}\lambda_d = \lambda_d(R)$$

On en déduit par unicité de la limite que $\lambda_d(R) = \mathrm{Vol}(R)$, ce qu'il fallait démontrer. Remarquons qu'en particulier les mesures λ_d et $\overline{\lambda_d}$ sont σ-finies.

Etape II.2 — *La mesure λ_d coïncide avec le volume sur tous les rectangles de $\mathbb{R}^d$.*
On sait que tout intervalle borné $[a, b]$ (resp. $[a, b[$, resp. $]a, b]$) de $\mathbb{R}$ est limite décroissante d'intervalles ouverts bornés, en effet il suffit de considérer la suite $(]a - 2^{-n}, b + 2^{-n}[)_{n \in \mathbb{N}}$ (resp. $(]a - 2^{-n}, b[)_{n \in \mathbb{N}}$, resp. $(]a, b + 2^{-n}[)_{n \in \mathbb{N}}$). En considérant des produits cartésiens de tels intervalles, on obtient que tout rectangle borné $R \subset \mathbb{R}^d$ est limite décroissante de rectangles ouverts bornés $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où des formules explicites comme celles ci-dessus assurent que $\mathrm{Vol}(R_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{Vol}(R)$. La mesure λ_d étant finie sur les compacts, on obtient alors :

$$\lambda_d(R) = \lim_n \downarrow \lambda_d(R_n) = \lim_n \downarrow \mathrm{Vol}(R_n) = \mathrm{Vol}(R)$$

Enfin, si $R \subset \mathbb{R}^d$ est un rectangle quelconque, on peut se ramener au cas borné :

$$\lambda_d(R) = \lim_N \uparrow \lambda_d(R \cap [-N, N]^d) = \lim_N \uparrow \mathrm{Vol}(R \cap [-N, N]^d) = \mathrm{Vol}(R)\ ,$$

ce qui conclut. Revenons sur cette dernière égalité : si l'un au moins des côtés de R est de longueur nulle, alors il est en de même pour $R \cap [-N, N]^d\ \ \forall\ N$ d'où le résultat puisque tous les volumes sont nuls. Si $R = \prod_{i=1}^d I_i$ est non borné avec aucun côté de longueur nulle, alors $\mathrm{Vol}(R) = +\infty$, et à partir d'un certain rang $R \cap [-N, N]^d$ est un produit de certains des I_i et d'intervalles de la forme $[a, N]$, $]a, N]$, $[-N, b]$, $[-N, b[$ ou $[-N, N]$: dans tous les cas on a donc bien $\mathrm{Vol}(R \cap [-N, N]^d) \xrightarrow[N \to +\infty]{} +\infty = \mathrm{Vol}(R)$.

Enfin, les mesures λ_d et $\overline{\lambda_d}$ sont invariantes par translation : la preuve est strictement identique à celle effectuée en dimension 1 dans le théorème 3.1.1.

□

Références

[Rie] Frigyes Riesz, « Sur les opérations fonctionnelles linéaires », *C. R. Acad. Sci. Paris* **149** p. 974–977, 1909.

[Rud] Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill (third edition), 1987.

[Jia] Huiqiang Jiang, « Analysis 1 : lecture », `http://www.math.pitt.edu/~hqjiang/2301/lecture.pdf`.

[Zak] Elias Zakon, *Mathematical analysis Volume I* (1975), The Trillia Group, 2004.

[Vil] Cédric Villani, « Intégration et analyse de Fourier », `http://cedricvillani.org/wp-content/uploads/2013/03/IAF.pdf`.

[Lam] Amaury Lambert , « Intégration 1 », `http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/amaury/LM365/polyLM365.pdf`.