Sur le temps de vie de la turbulence bidimensionnelle

Thierry Gallay et Luis Miguel Rodrigues
Institut Fourier, UMR CNRS 5582
Université de Grenoble I
B.P. 74
38402 Saint-Martin-d'Hères, France

19 juin 2007

Résumé

On sait que toutes les solutions de l'équation de Navier-Stokes dans $\mathbf{R}^2$ dont le tourbillon est intégrable convergent lorsque $t \to \infty$ vers un écoulement autosimilaire appelé tourbillon d'Oseen. Dans cet article, nous donnons une estimation du temps nécessaire à la solution pour atteindre un voisinage du tourbillon d'Oseen à partir d'une donnée initiale arbitraire, mais bien localisée en espace. Nous obtenons ainsi une borne supérieure sur le temps de vie de la turbulence bidimensionnelle libre, en fonction du nombre de Reynolds de la donnée initiale. Deux cas particuliers sont discutés plus en détail : celui des solutions à tourbillon positif, et celui des petites perturbations d'un tourbillon d'Oseen.

1 Introduction

On s'intéresse au comportement des solutions de l'équation de Navier-Stokes incompressible dans le plan $\mathbf{R}^2$. On note $u(x,t) \in \mathbf{R}^2$ la vitesse du fluide au point $x \in \mathbf{R}^2$ à l'instant t, et $\omega(x,t) := \partial_1 u_2(x,t) - \partial_2 u_1(x,t) \in \mathbf{R}$ le tourbillon associé. Sous des hypothèses très générales qui seront toujours vérifiées dans la suite, le champ de vitesse peut être reconstruit à partir du tourbillon par la loi de Biot-Savart :

$$u(x,t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2}\,\omega(y,t)\,\mathrm{d}y \;, \tag{1}$$

où $x^\perp = (x_1,x_2)^\perp = (-x_2,x_1)$. Notons que la formule (1) incorpore la relation d'incompressibilité $\operatorname{div} u := \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 = 0$. L'évolution temporelle du tourbillon est déterminée par l'équation

$$\partial_t \omega(x,t) + u(x,t)\cdot\nabla\omega(x,t) \;=\; \nu\Delta\omega(x,t) \;, \tag{2}$$

où $\nu > 0$ est un paramètre représentant la viscosité cinématique du fluide.

Il est bien connu que, pour toute donnée initiale $\omega_0 \in L^1(\mathbf{R}^2)\cap L^\infty(\mathbf{R}^2)$, le système (2), (1) possède une solution globale unique $\omega \in C^0([0,+\infty[,L^1(\mathbf{R}^2)) \cap C^0(]0,+\infty[,L^\infty(\mathbf{R}^2))$

[2, 3]. On sait aussi que cette solution converge lorsque $t \to \infty$ vers un écoulement autosimilaire appelé *tourbillon d'Oseen* et donné par les formules suivantes :

$$\omega(x,t) \;=\; \frac{\alpha}{t}\, G\Big(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\Big) \;, \qquad u(x,t) \;=\; \alpha\sqrt{\frac{\nu}{t}}\, v^G\Big(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\Big) \;, \tag{3}$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$ est un paramètre sans dimension (le nombre de Reynolds de circulation) et

$$G(\xi) \;=\; \frac{1}{4\pi}\, e^{-|\xi|^2/4} \;, \quad v^G(\xi) \;=\; \frac{1}{2\pi}\, \frac{\xi^\perp}{|\xi|^2}\Big(1 - e^{-|\xi|^2/4}\Big) \;, \quad \xi \in \mathbf{R}^2 \;. \tag{4}$$

Plus précisément, on a le résultat suivant [6] :

Théorème 1.1 *Pour toute donnée initiale $\omega_0 \in L^1(\mathbf{R}^2)$, la solution $\omega(x,t)$ du système (2), (1) vérifie*

$$\lim_{t\to\infty} \Big\| \omega(x,t) - \frac{\alpha}{t}\, G\Big(\frac{x}{\sqrt{\nu t}}\Big) \Big\|_{L^1_x(\mathbf{R}^2)} \;=\; 0 \;, \tag{5}$$

où

$$\alpha \;=\; \frac{1}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} \omega_0(x)\, \mathrm{d}x \;. \tag{6}$$

Cet énoncé simple et élégant a l'inconvénient de ne fournir aucune estimation du temps nécessaire à la solution pour atteindre un voisinage du tourbillon d'Oseen à partir d'une donnée initiale (intégrable) quelconque. La démonstration proposée dans [6] est d'ailleurs non constructive, car elle repose en partie sur un argument de compacité. Il est cependant souhaitable de préciser le temps nécessaire pour atteindre le régime asymptotique autosimilaire, en particulier si l'on envisage d'établir un résultat du même type pour des écoulements en domaine borné. Dans ce cas, il est clair en effet que le comportement de la solution ne pourra être décrit par le tourbillon d'Oseen que pour des temps inférieurs à L^2/ν, où L désigne la taille caractéristique du domaine. Le régime autosimilaire ne pourra donc être observé que de façon transitoire, et à condition qu'il s'établisse suffisamment rapidement.

On se convainc aisément qu'il n'est pas possible de préciser la vitesse de convergence dans (5) sans hypothèse de confinement sur la donnée initiale. Nous supposons dans toute la suite qu'il existe $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et $t_0 > 0$ tels que la quantité suivante soit finie :

$$D \;=\; \frac{1}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} |\omega_0(x)|\, \exp\Big(\frac{|x-x_0|^2}{8\nu t_0}\Big)\, \mathrm{d}x \;<\; \infty \;. \tag{7}$$

Cette hypothèse assez restrictive peut évidemment être assouplie, mais nous l'adoptons ici car elle nous permettra d'utiliser directement les estimations très précises obtenues par E. Carlen et M. Loss pour ce type de solutions [4]. On associe à la donnée initiale ω_0 un nombre de Reynolds défini classiquement comme suit :

$$R \;=\; \frac{1}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} |\omega_0(x)|\, \mathrm{d}x \;. \tag{8}$$

Nous pouvons à présent énoncer le résultat principal de cet article :

Théorème 1.2 *Il existe des constantes strictement positives C_1, C_2 et ρ telles que, pour toute donnée initiale $\omega_0 \in L^1(\mathbf{R}^2)$ remplissant la condition (7), la solution du système (2), (1) vérifie l'estimation*

$$\frac{1}{\nu}\left\|\omega(x,t) - \frac{\alpha}{t+t_0}G\Big(\frac{x-x_0}{\sqrt{\nu(t+t_0)}}\Big)\right\|_{L^1_x(\mathbf{R}^2)} \quad\le\quad \frac{C_1\, e^{C_2 R^2} D}{\Big(\log(1+t/t_0)\Big)^\rho}\ , \tag{9}$$

pour tout $t > 0$, où α est donné par (6) et R par (8).

Remarques :

1. Les constantes C_1, C_2, et ρ sont universelles. En particulier, elles ne dépendent pas de la viscosité $\nu > 0$. Les deux membres de (9) sont par ailleurs invariants d'échelle.

2. Comme $|\alpha| \le R$ et comme la norme L^1 du tourbillon $\omega(\cdot,t)$ est une fonction décroissante du temps, l'inégalité triangulaire montre que le membre de gauche de (9) est toujours inférieur à $2R$. L'estimation (9) n'est donc intéressante que pour des temps suffisamment grands. Ceci dit, elle n'est nullement optimale dans la limite $t \to \infty$: une étude locale au voisinage du tourbillon d'Oseen montre en effet que le membre de gauche de (9) converge vers zéro comme $t^{-1/2}$, et même comme t^{-1} lorsque x_0 est le centre de masse de la distribution de vorticité ω_0, cf. section 4.

3. Bien entendu, l'estimation (9) implique en particulier (5). A noter que, dans (5), on a choisi sans perte de généralité $x_0 = 0$, $t_0 = 0$. Dans le théorème 1.2, on a avantage à choisir $x_0 \in \mathbf{R}^2$ de façon à minimiser la quantité D (une bonne solution consiste souvent à prendre x_0 comme le centre de masse de la distribution $|\omega_0|$). Le choix de $t_0 > 0$ est plus délicat, car ce paramètre intervient non seulement dans D mais aussi au dénominateur du membre de droite de (9). Cette question sera discutée plus en détail, dans un cas particulier, à la section 3.

4. Le régime asymptotique décrit par le tourbillon d'Oseen est laminaire, dans la mesure où les effets de transport sont négligeables devant la dissipation visqueuse (cf. la preuve de la proposition 4.1). Le théorème 1.2 fournit donc une borne supérieure sur le temps de vie de la turbulence bidimensionnelle libre en fonction du nombre de Reynolds de la donnée initiale. Cette estimation explose hélas comme $\exp(\exp(CR^2))$ lorsque $R \to \infty$, et n'est certainement pas optimale. On dispose toutefois d'une bien meilleure borne pour les solutions à tourbillon positif, cf. section 3.

Dans le cas particulier des solutions à moyenne nulle ($\alpha = 0$), le théorème 1.2 est démontré dans l'article de Carlen et Loss [4, Theorem 7]. Comme nous le montrons dans la section 2, le cas général s'obtient en combinant de façon appropriée la méthode d'entropie relative utilisée dans [6] avec les estimations de recouvrement établies dans [4]. Dans la section 3, nous rappelons que la méthode d'entropie fournit un résultat bien meilleur que (9) dans le cas des solutions à tourbillon positif, et nous discutons sur cet exemple le choix optimal des paramètres $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et $t_0 > 0$. Afin de présenter une vision complète du problème, nous incluons dans la section 4 les estimations optimales de décroissance temporelle pour les petites perturbations du tourbillon d'Oseen.

Remerciements : Nous remercions chaleureusement C. Villani de nous avoir proposé ce problème, et de nous avoir aiguillé vers sa solution en nous suggérant la lecture du remarquable article de Carlen et Loss.

2 Estimation du temps de vie

Ce chapitre est consacré à la preuve du théorème 1.2. On suppose donc que $\omega(x,t)$ est une solution de l'équation (2) dont la donnée initiale $\omega_0 \in L^1(\mathbf{R}^2)$ vérifie (7) pour un $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et un $t_0 > 0$. Sans perte de généralité, on peut supposer que la quantité α définie par (6) est strictement positive. En effet, si $\alpha = 0$, l'estimation (9) est établie dans [4, Theorem 7]. Si $\alpha < 0$, on peut remplacer $\omega(x_1,x_2,t)$ par $-\omega(x_2,x_1,t)$ qui est encore une solution de (2), et on est ainsi ramené au cas où $\alpha > 0$.

En suivant [5], nous introduisons les variables autosimilaires

$$\xi \;=\; \frac{x - x_0}{\sqrt{\nu(t+t_0)}}\;, \qquad \tau \;=\; \log\Bigl(1 + \frac{t}{t_0}\Bigr)\;, \tag{10}$$

et nous exprimons le tourbillon ω et le champ de vitesse u dans ces nouvelles variables en posant

$$\omega(x,t) \;=\; \frac{1}{t+t_0}\, w\Bigl(\frac{x-x_0}{\sqrt{\nu(t+t_0)}}\,,\, \log\Bigl(1+\frac{t}{t_0}\Bigr)\Bigr)\;, \tag{11}$$

$$u(x,t) \;=\; \sqrt{\frac{\nu}{t+t_0}}\, v\Bigl(\frac{x-x_0}{\sqrt{\nu(t+t_0)}}\,,\, \log\Bigl(1+\frac{t}{t_0}\Bigr)\Bigr)\;. \tag{12}$$

Notons que les variables ξ,τ ainsi que les fonctions transformées d'échelle w,v sont sans dimension. L'évolution du tourbillon $w(\xi,\tau)$ est donnée par l'équation

$$\partial_\tau w(\xi,\tau) + v(\xi,\tau)\cdot\nabla_\xi w(\xi,\tau) \;=\; \mathcal{L} w(\xi,\tau)\;, \tag{13}$$

où $\mathcal{L}$ est l'opérateur de Fokker-Planck

$$\mathcal{L} \;=\; \Delta_\xi + \frac{\xi}{2}\cdot\nabla_\xi + 1\;. \tag{14}$$

En outre, la vitesse $v(\xi,\tau)$ est encore reliée au tourbillon $w(\xi,\tau)$ par la loi de Biot-Savart (1). Par construction, ce dernier vérifie la condition initiale $w(\xi,0) = w_0(\xi)$, où $w_0(\xi) = t_0\,\omega_0(x_0 + \xi\sqrt{\nu t_0})$. En particulier,

$$\alpha \;=\; \frac{1}{\nu}\int_{\mathbf{R}^2} \omega_0(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} w_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi\;,$$

et de même $R = \nu^{-1}\|\omega_0\|_{L^1} \;=\; \|w_0\|_{L^1}$. Par ailleurs,

$$D \;=\; \frac{1}{\nu}\int_{\mathbf{R}^2} |\omega_0(x)|\,\exp\Bigl(\frac{|x-x_0|^2}{8\nu t_0}\Bigr)\,\mathrm{d}x \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} |w_0(\xi)|\,e^{|\xi|^2/8}\,\mathrm{d}\xi\;.$$

On énumère à présent quelques estimations *a priori* sur les solutions de (13) qui résultent directement des bornes correspondantes pour l'équation originale (2) :

1. Pour tout $\tau \ge 0$, on a $\|w(\cdot,\tau)\|_{L^1} \le \|w_0\|_{L^1}$.

2. Pour tout $\tau > 0$, on a

$$\|w(\cdot,\tau)\|_{L^\infty} \;\le\; \frac{1}{4\pi a(\tau)}\,\|w_0\|_{L^1}\;, \tag{15}$$

où $a(\tau) = 1-e^{-\tau}$, cf. [4, Theorem 1]. Par la loi de Biot-Savart, on en déduit [4, Theorem 2] :

$$\|v(\cdot,\tau)\|_{L^\infty} \;\le\; \Bigl(\frac{2}{\pi}\|w(\cdot,\tau)\|_{L^\infty}\|w(\cdot,\tau)\|_{L^1}\Bigr)^{1/2} \;\le\; \frac{1}{\sqrt{2}\pi a(\tau)^{1/2}}\,\|w_0\|_{L^1}\;. \tag{16}$$

3. Pour tout $\beta \in \,]0,1[$ on a l'estimation ponctuelle

$$|w(\xi,\tau)| \;\le\; \frac{C_\beta(R)}{4\pi a(\tau)}\int_{\mathbf{R}^2}\exp\Bigl(-\beta\frac{|\xi-\eta\,e^{-\tau/2}|^2}{4a(\tau)}\Bigr)|w_0(\eta)|\,\mathrm{d}\eta\;, \tag{17}$$

pour tout $\xi \in \mathbf{R}^2$ et tout $\tau > 0$, où $C_\beta(R) = \exp(\frac{\beta}{1-\beta}\frac{R^2}{2\pi^2})$, cf. [4, Theorem 3]. Si on choisit $\beta \in \bigl]\frac{1}{2},1\bigl[$, alors un calcul direct à partir de (17) montre que, pour tout $\tau > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2}|w(\xi,\tau)|\,e^{|\xi|^2/8}\,\mathrm{d}\xi \;&\le\; \frac{C_\beta(R)}{\beta - a(\tau)/2}\int_{\mathbf{R}^2}\exp\Bigl(\frac{\beta|\eta|^2\,e^{-\tau}}{8\beta-4a(\tau)}\Bigr)|w_0(\eta)|\,\mathrm{d}\eta\\ &\le\; \frac{C_\beta(R)}{\beta-1/2}\int_{\mathbf{R}^2}|w_0(\xi)|\,e^{|\xi|^2/8}\,\mathrm{d}\xi\;.\end{aligned} \tag{18}$$

Dans la seconde inégalité, on a utilisé le fait que $\beta > 1/2$ et que $a(\tau) = 1 - e^{-\tau} < 1$.

Nous arrivons à présent à l'étape principale de la démonstration, qui consiste à décomposer la solution $w(\xi,\tau)$ de (13) en une somme $w_1(\xi,\tau)+w_2(\xi,\tau)$, où $w_1(\cdot,\tau)$ est *à moyenne nulle* et $w_2(\cdot,\tau)$ est *positive*. Plus précisément, on décompose la donnée initiale w_0 en une somme $w_{10} + w_{20}$ avec, par exemple,

$$w_{20}(\xi) \;=\; \alpha G(\xi)\;, \quad w_{10}(\xi) \;=\; w_0(\xi) - \alpha G(\xi)\;,$$

puis on définit $w_i(\xi,\tau)$ pour $i = 1,2$ comme la solution du problème

$$\partial_\tau w_i(\xi,\tau) + v(\xi,\tau)\cdot\nabla w_i(\xi,\tau) \;=\; \mathcal{L}w_i(\xi,\tau)\;, \quad w_i(\xi,0) = w_{i0}(\xi)\;. \tag{19}$$

Noter que, si l'on considère le champ de vitesse (total) $v(\xi,\tau)$ comme donné, l'équation (19) est identique à (13). Il s'ensuit en particulier que les estimations *a priori* (15)–(18) restent valables pour les solutions w_1,w_2 de (19). Avec notre choix de données initiales, on trouve $R_2 = \|w_{20}\|_{L^1} = \alpha \le R$, et donc $R_1 = \|w_{10}\|_{L^1} \le 2R$. De même, comme $D_2 = \int_{\mathbf{R}^2}|w_{20}(\xi)|\,e^{|\xi|^2/8}\,\mathrm{d}\xi = 2\alpha$, on a

$$D_1 \;=\; \int_{\mathbf{R}^2}|w_{10}(\xi)|\,e^{|\xi|^2/8}\,\mathrm{d}\xi \;\le\; D + 2\alpha \;\le\; 3D\;.$$

La solution $w_1(\cdot,\tau)$ étant à moyenne nulle, on peut lui appliquer le résultat de Carlen et Loss [4, Theorem 7] qui avec nos notations :

Proposition 2.1 *Il existe des constantes strictement positives C_3, C_4 et γ telles que*

$$\|w_1(\cdot,\tau)\|_{L^1} \;\le\; \frac{\|w_{10}\|_{L^1}}{\Bigl\{1+\gamma K(R)\tau\Bigl(\frac{\|w_{10}\|_{L^1}}{D_1}\Bigr)^\gamma\Bigr\}^{1/\gamma}}\;, \tag{20}$$

pour tout $\tau \ge 1$, où $K(R) = C_3\,e^{-C_4R^2}$.

La démonstration de cette proposition repose sur l'idée suivante. Etant donné que la solution $w_1(\cdot,\tau)$ est à moyenne nulle, on peut l'écrire comme la somme d'une partie positive et d'une partie négative qui évoluent toutes deux selon l'équation de transport-diffusion (19). Les supports de ces deux solutions sont initialement disjoints, mais le principe du maximum fort implique qu'ils se recouvrent pour tout $\tau > 0$, ce qui entraîne une diminution de la norme L^1 de $w_1(\cdot,\tau)$. Cette perte peut être quantifiée si l'on dispose d'une borne *inférieure* sur le noyau intégral de l'opérateur d'évolution associé à l'équation (19), ainsi que d'une estimation de la forme (18) garantissant que la solution reste bien localisée pour tous les temps. On obtient ainsi la borne (20), et les constantes (universelles) C_3, C_4, γ peuvent être déterminées explicitement. Par exemple, on peut prendre

$$\gamma \,=\, 5\Big(\frac{e+1}{e-1}\Big) \,=\, \frac{5}{\tanh(1/2)}\ .$$

On supposera dans la suite que $C_3 \le 1/2$, de sorte que $K(R) \le 1/2$.

Il reste à montrer que la partie positive $w_2(\xi,\tau)$ dans la décomposition de $w(\xi,\tau)$ converge vers $\alpha G(\xi)$ lorsque $\tau \to \infty$. On applique pour cela la méthode d'entropie relative introduite dans ce contexte dans l'article [6]. Si $w \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2)$ est une fonction strictement positive telle que $\int_{\mathbf{R}^2} w(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \alpha$, on note

$$H(w) \,=\, \int_{\mathbf{R}^2} w(\xi)\log\Big(\frac{w(\xi)}{\alpha G(\xi)}\Big)\,\mathrm{d}\xi\ ,\quad I(w) \,=\, \int_{\mathbf{R}^2} w(\xi)\Big|\nabla\log\Big(\frac{w(\xi)}{\alpha G(\xi)}\Big)\Big|^2\,\mathrm{d}\xi\ . \qquad (21)$$

On a alors les estimations suivantes [1]

$$\frac{1}{2\alpha}\|w-\alpha G\|_{L^1}^2 \,\le\, H(w) \,\le\, I(w)\ , \qquad (22)$$

qui montrent en particulier que $H(w) \ge 0$ avec égalité si et seulement si $w = \alpha G$. La borne inférieure sur H dans (22) est l'inégalité de Csiszár-Kullback, alors que la borne supérieure est une variante de l'inégalité de Sobolev logarithmique.

L'idée est maintenant d'étudier l'évolution temporelle de la quantité $H(w_2(\cdot,\tau))$. Un calcul direct [6] montre que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}H(w_2(\cdot,\tau)) &= -I(w_2(\cdot,\tau)) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}(\xi\cdot v(\xi,\tau))w_2(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi \\ &\le -H(w_2(\cdot,\tau)) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^2}(\xi\cdot v_1(\xi,\tau))w_2(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\ ,\end{aligned} \qquad (23)$$

où $v_1(\xi,\tau)$ désigne le champ de vitesse obtenu à partir de $w_1(\xi,\tau)$ par la loi de Biot-Savart. Outre (22), on a utilisé ici le fait que $\int_{\mathbf{R}^2}(\xi\cdot v_2(\xi,\tau))w_2(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi = 0$, ce qui est l'observation-clef permettant d'appliquer la méthode d'entropie relative à l'équation de Navier-Stokes. Comme $H(w_{20}) = H(\alpha G) = 0$, l'inégalité (23) s'intègre facilement et conduit à l'estimation

$$H(w_2(\cdot,\tau)) \,\le\, \frac{1}{2}\int_0^\tau e^{-(\tau-s)}\|v_1(\cdot,s)\|_{L^\infty}\||\xi|w_2(\xi,s)\|_{L^1_\xi}\,\mathrm{d}s\ . \qquad (24)$$

Or, les bornes *a priori* rappelées ci-dessus montrent que

$$\|v_1(\cdot,s)\|_{L^\infty} \,\le\, \begin{cases} Ca(s)^{-1/2}\|w_{10}\|_{L^1} & \text{si}\quad 0 < s \le 2\ , \\ C\|w_1(\cdot,s-1)\|_{L^1} & \text{si}\quad s \ge 2\ , \end{cases} \qquad (25)$$

où $\|w_1(\cdot,s-1)\|_{L^1}$ se majore à l'aide de la proposition 2.1. Par ailleurs, en utilisant les bornes ponctuelles établies dans [4, Theorem 3], on vérifie sans peine que

$$\||\xi|w_2(\xi,s)\|_{L^1_\xi} \le e^{-s/2}\||\xi|w_{20}(\xi)\|_{L^1_\xi} + C(1+R)a(s)^{1/2}\|w_{20}\|_{L^1} \le C\alpha(1+R)\ . \qquad (26)$$

En remplaçant (25), (26) dans (24), et en utilisant la proposition 2.1 ainsi que le lemme élémentaire ci-dessous, on arrive à l'estimation

$$H(w_2(\cdot,\tau)) \le \frac{C\alpha(1+R)\|w_{10}\|_{L^1}}{\left\{1+\gamma K(R)\tau\left(\frac{\|w_{10}\|_{L^1}}{D_1}\right)^\gamma\right\}^{1/\gamma}}\ , \quad \tau \ge 0\ . \qquad (27)$$

Lemme 2.2 *Si* $0 \le K \le 1/2$ *et* $\gamma > 0$, *on a*

$$\int_0^\tau e^{-(\tau-s)}\frac{1}{(1+\gamma Ks)^{1/\gamma}}\,\mathrm{d}s \le \frac{1+2^{1/\gamma}}{(1+\gamma K\tau)^{1/\gamma}}\ , \quad \textit{pour tout } \tau \ge 0\ .$$

Démonstration : On a d'une part

$$\int_0^{\tau/2} e^{-(\tau-s)}\frac{1}{(1+\gamma Ks)^{1/\gamma}}\,\mathrm{d}s \le \int_0^{\tau/2} e^{-(\tau-s)}\,\mathrm{d}s \le e^{-\tau/2} \le \frac{1}{(1+\gamma K\tau)^{1/\gamma}}\ ,$$

car $(1+\gamma K\tau)^{-1/\gamma} \ge e^{-K\tau} \ge e^{-\tau/2}$. D'autre part,

$$\int_{\tau/2}^\tau e^{-(\tau-s)}\frac{1}{(1+\gamma Ks)^{1/\gamma}}\,\mathrm{d}s \le \frac{1}{(1+\gamma K\tau/2)^{1/\gamma}} \le \frac{2^{1/\gamma}}{(1+\gamma K\tau)^{1/\gamma}}\ ,$$

ce qui conclut la preuve. □

Il est maintenant facile de terminer la démonstration du théorème 1.2. Etant donné que $w(\xi,\tau) = w_1(\xi,\tau) + w_2(\xi,\tau)$, on a

$$\begin{aligned}\|w(\cdot,\tau)-\alpha G\|_{L^1} &\le \|w_1(\cdot,\tau)\|_{L^1} + \|w_2(\cdot,\tau)-\alpha G\|_{L^1}\\ &\le \|w_1(\cdot,\tau)\|_{L^1} + \sqrt{2\alpha}\,H(w_2(\cdot,\tau))^{1/2}\ ,\end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de (22). En utilisant (20), (27) et en procédant à quelques simplifications, on trouve pour tout $\tau \ge 1$:

$$\|w(\cdot,\tau)-\alpha G\|_{L^1} \le \frac{D_1}{(\gamma K(R)\tau)^{1/\gamma}} + C\alpha\frac{(1+R)^{1/2}D_1^{1/2}}{(\gamma K(R)\tau)^{1/2\gamma}} \le \frac{C_5 D(1+R)}{K(R)^{1/\gamma}\tau^{1/2\gamma}}\ .$$

On peut supposer bien sûr que $C_5 \ge 2$, auquel cas cette inégalité reste vraie pour tout $\tau > 0$ car on sait par ailleurs que $\|w(\cdot,\tau)-\alpha G\|_{L^1} \le R+\alpha \le 2R$. En retournant alors aux variables originales et en se souvenant que $K(R) = C_3\,e^{-C_4R^2}$, on obtient (9) avec $\rho = 1/(2\gamma)$. Ceci conclut la preuve du théorème 1.2. □

3 Relaxation des tourbillons positifs

L'estimation générale donnée par le théorème 1.2 peut être considérablement améliorée si l'on se restreint aux solutions dont le tourbillon $\omega(x,t)$ est positif. Dans ce cas, en introduisant les variables autosimilaires (10) comme dans le chapitre précédent, on trouve que l'entropie relative $H(w(\cdot,\tau))$ qui mesure la "distance" entre la solution $w(\cdot,\tau)$ et le point d'équilibre αG obéit à l'inégalité différentielle

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} H(w(\cdot,\tau)) \;=\; -I(w(\cdot,\tau)) \;\le\; -H(w(\cdot,\tau))\;, \quad \tau \ge 0\;.$$

Ainsi $H(w(\cdot,\tau)) \le e^{-\tau} H(w_0)$ pour tout $\tau \ge 0$. En revenant aux variables originales, on obtient l'inégalité suivante, valable pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et tout $t_0 > 0$:

$$\mathcal{H}(\omega(\cdot,t)\,|\,\alpha\mathcal{G}_{x_0,t_0}(\cdot,t)) \;\le\; \frac{t_0}{t_0+t}\,\mathcal{H}(\omega_0\,|\,\alpha\mathcal{G}_{x_0,t_0}(\cdot,0))\;, \quad t \ge 0\;, \tag{28}$$

où $\mathcal{H}(f_1\,|\,f_2)$ désigne l'entropie de la distribution f_1 par rapport à f_2 :

$$\mathcal{H}(f_1\,|\,f_2) \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} f_1(x)\log\Bigl(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\Bigr)\,\mathrm{d}x\;,$$

et $\mathcal{G}_{x_0,t_0}$ est le tourbillon d'Oseen centré au point $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et issu du temps $-t_0$:

$$\mathcal{G}_{x_0,t_0}(x,t) \;=\; \frac{1}{t+t_0}\,G\Bigl(\frac{x-x_0}{\sqrt{\nu(t+t_0)}}\Bigr)\;.$$

Rappelons que le membre de gauche de (28) contrôle la distance de la solution $\omega(\cdot,t)$ au tourbillon $\alpha\mathcal{G}_{x_0,t_0}(\cdot,t)$ en vertu de l'inégalité de Csiszár-Kullback

$$\frac{1}{2\nu\alpha}\|\omega(\cdot,t)-\alpha\mathcal{G}_{x_0,t_0}(\cdot,t)\|_{L^1}^2 \;\le\; \mathcal{H}(\omega(\cdot,t)\,|\,\alpha\mathcal{G}_{x_0,t_0}(\cdot,t))\;.$$

D'autre part, le membre de droite de (28) s'écrit explicitement :

$$\frac{t_0}{t_0+t}\int_{\mathbf{R}^2}\omega_0(x)\Bigl\{\log\Bigl(\frac{4\pi}{\alpha}\Bigr)+\log(t_0\omega_0(x))+\frac{|x-x_0|^2}{4\nu t_0}\Bigr\}\,\mathrm{d}x\;. \tag{29}$$

Cette expression est suffisamment simple pour qu'on puisse chercher à l'optimiser par un choix approprié de x_0 et t_0. Quels que soient t_0 et t, il est évident que la quantité (29) est minimale lorsque $x_0 \in \mathbf{R}^2$ est le *centre de masse* de la distribution de vorticité ω_0. On fera donc toujours ce choix dans la suite. Il est plus délicat, en revanche, de minimiser (29) par rapport à t_0 car le résultat dépend en général du temps d'observation t. Il y a cependant au moins deux choix naturels :

1. On peut minimiser (29) pour $t = 0$, ce qui revient à choisir $t_0 > 0$ de façon à minimiser l'entropie relative de la donnée initiale. Le minimum est atteint pour $t_0 = t_1$, où

$$t_1 \;=\; \int_{\mathbf{R}^2}\frac{\omega_0(x)}{\alpha\nu}\,\frac{|x-x_0|^2}{4\nu}\,\mathrm{d}x \;>\; 0\;.$$

2. Si l'on s'intéresse au comportement à grand temps, on peut remplacer le préfacteur $t_0/(t_0+t)$ dans (29) par t_0/t. Le minimum de l'expression ainsi obtenue est atteint pour $t_0 = t_2$, où $t_2 > 0$ est déterminé par la relation

$$\int_{\mathbf{R}^2} \omega_0(x)\Big\{1 + \log\Big(\frac{4\pi}{\alpha}\Big) + \log(t_2\omega_0(x))\Big\}\,\mathrm{d}x \;=\; 0\;.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que $0 < t_2 \le t_1$, et que $t_2 = t_1$ si et seulement si la fonction ω_0 est une gaussienne centrée en x_0.

Avec ces deux choix du paramètre t_0, l'estimation (28) fournit les inégalités suivantes :

$$\mathcal{H}(\omega(\cdot,t)\,|\,\alpha\mathcal{G}_{x_0,t_1}(\cdot,t)) \;\le\; \alpha\nu\,\frac{t_1}{t_1+t}\,\log\Big(\frac{t_1}{t_2}\Big) \tag{30}$$

$$\mathcal{H}(\omega(\cdot,t)\,|\,\alpha\mathcal{G}_{x_0,t_2}(\cdot,t)) \;\le\; \alpha\nu\,\frac{t_1-t_2}{t_2+t}\;. \tag{31}$$

L'estimation (30) est optimale pour $t = 0$, alors que (31) est optimale dans la limite $t \to \infty$. On notera qu'il existe des données initiales pour lesquelles $t_2 \ll t_1$. Par exemple, si $\nu = 1$ et si ω_0 est la fonction indicatrice de l'union de deux disques de rayon 1 dont les centres sont séparés d'une distance $d > 2$, on trouve que $t_1 = (2+d^2)/16$ alors que $t_2 = 1/(2e)$.

Une troisième possibilité, qui fournit une borne particulièrement simple, consiste à prendre la limite $t_0 \to 0$ dans (28), (29) :

$$\mathcal{H}(\omega(\cdot,t)\,|\,\alpha\mathcal{G}_{x_0,0}(\cdot,t)) \;\le\; \frac{1}{t}\int_{\mathbf{R}^2}\omega_0(x)\,\frac{|x-x_0|^2}{4\nu}\,\mathrm{d}x \;=\; \alpha\nu\,\frac{t_1}{t}\;. \tag{32}$$

En appliquant l'inégalité de Csiszár-Kullback, on obtient donc le résultat suivant :

Proposition 3.1 *Soit $\omega_0 \in L^1(\mathbf{R}^2)$ une fonction positive telle que $\int_{\mathbf{R}^2}\omega_0(x)|x|^2\,\mathrm{d}x < \infty$. Si $\omega(\cdot,t)$ est la solution de (2) pour la donnée initiale ω_0, on a pour tout $x_0 \in \mathbf{R}^2$ et tout $t > 0$:*

$$\frac{1}{\nu}\Big\|\omega(x,t) - \frac{\alpha}{t}G\Big(\frac{x-x_0}{\sqrt{\nu t}}\Big)\Big\|_{L^1_x(\mathbf{R}^2)} \;\le\; \Big(\frac{2\alpha}{\nu}\int_{\mathbf{R}^2}\omega_0(x)\,\frac{|x-x_0|^2}{4\nu t}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}\;, \tag{33}$$

où α est donné par (6).

Pour les données initiales positives à support dans un domaine borné fixé, l'estimation (33) montre que le temps nécessaire pour atteindre un petit voisinage du tourbillon d'Oseen est (au pire) proportionnel au carré du nombre de Reynolds R défini par (8). On a donc dans ce cas un résultat bien meilleur que celui du théorème 1.2, qui fournit une borne en $\exp(\exp(CR^2))$.

4 Etude locale au voisinage d'un tourbillon d'Oseen

Le but principal de cet article est d'estimer le temps nécessaire à une solution de (2) dans $L^1(\mathbf{R}^2)$ pour s'approcher d'un tourbillon d'Oseen à partir d'une donnée initiale "quelconque". On peut aussi se demander – mais c'est une question différente – à quelle vitesse la solution converge vers le tourbillon d'Oseen une fois qu'elle se trouve dans un voisinage de celui-ci. Dans cette optique, l'estimation (9) n'est de loin pas optimale : on sait en effet que les petites perturbations du tourbillon d'Oseen décroissent comme $t^{-1/2}$ lorsque $t \to \infty$, et même comme t^{-1} lorsque le point $x_0 \in \mathbf{R}^2$ est placé au centre de masse de la distribution de vorticité ω_0 [5, 6].

Dans ce chapitre, par souci de complétude, on rappelle brièvement comment sont obtenus ces résultats optimaux. On travaille sur la formulation (13) en variables autosimilaires, et on suppose comme précédemment que le tourbillon $w(\xi,\tau)$ décroît très rapidement lorsque $|\xi| \to \infty$. Cette hypothèse simplifie la démonstration, mais peut être assouplie [6]. On introduit l'espace de Hilbert

$$X \;=\; \{w : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \,|\, G^{-1/2} w \in L^2(\mathbf{R}^2)\} \;,$$

muni du produit scalaire

$$(w_1,w_2)_X \;=\; \int_{\mathbf{R}^2} G^{-1}(\xi) w_1(\xi) w_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi \;,$$

où G est donné par (4). On définit également les sous-espaces fermés

$$\begin{aligned} X_0 \;&=\; \Big\{ w \in X \,\Big|\, \int_{\mathbf{R}^2} w(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0 \Big\} \;, \\ X_1 \;&=\; \Big\{ w \in X_0 \,\Big|\, \int_{\mathbf{R}^2} \xi_i w(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0 \text{ pour } i = 1{,}2 \Big\} \;. \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de vérifier que l'espace X s'injecte dans $L^p(\mathbf{R}^2)$ pour tout $p \in [1{,}2]$. En outre, on peut montrer que l'équation (13) est globalement bien posée dans X [7], et que les sous-espaces X_0, X_1 sont laissés invariants par l'évolution. Il en va de même, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, des sous-espaces affines $\alpha G + X_0$ et $\alpha G + X_1$.

Proposition 4.1 *Il existe une constante strictement positive δ telle que, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$ et pour toute donnée initiale $w_0 \in \alpha G + X_0$ telle que $\|w_0 - \alpha G\|_X \le \delta$, la solution $w(\xi,\tau)$ de (13) vérifie*

$$\|w(\cdot,\tau) - \alpha G\|_X \;\le\; \|w_0 - \alpha G\|_X \,\min(1\,, 2\,e^{-\kappa\tau}) \;, \quad \tau \ge 0 \;, \tag{34}$$

où $\kappa = 1$ si $w_0 - \alpha G \in X_1$ et $\kappa = 1/2$ sinon.

En termes des variables originales, la proposition 4.1 implique le résultat suivant. Si la donnée initiale ω_0 est telle que

$$\frac{t_0}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} \Big|\omega_0(x) - \frac{\alpha}{t_0} G\Big(\frac{x - x_0}{\sqrt{\nu t_0}}\Big)\Big|^2 \,\exp\Big(\frac{|x - x_0|^2}{4\nu t_0}\Big)\,\mathrm{d}x \;\le\; \delta^2 \;,$$

où $x_0 \in \mathbf{R}^2$, $t_0 > 0$, et $\alpha \in \mathbf{R}$ est donné par (6), la solution de l'équation (2) vérifie

$$\frac{1}{\nu} \int_{\mathbf{R}^2} \Big|\omega_0(x) - \frac{\alpha}{t + t_0} G\Big(\frac{x - x_0}{\sqrt{\nu(t + t_0)}}\Big)\Big|\,\mathrm{d}x \;\le\; \frac{C_6 \delta}{(1 + t/t_0)^{\kappa}} \;, \quad t \ge 0 \;,$$

où $\kappa = 1$ si x_0 est le centre de masse de ω_0, et $\kappa = 1/2$ sinon.

Démonstration : L'équation vérifiée par la perturbation $\tilde{w}(\xi,\tau) = w(\xi,\tau) - \alpha G(\xi)$ s'écrit

$$\partial_\tau \tilde{w}(\xi,\tau) + \tilde{v}(\xi,\tau) \cdot \nabla \tilde{w}(\xi,\tau) \;=\; (\mathcal{L} - \alpha\Lambda)\tilde{w}(\xi,\tau) \;, \tag{35}$$

où $\tilde{v}(\xi,\tau)$ est le champ de vitesse obtenu à partir de $\tilde{w}(\xi,\tau)$ par la loi de Biot-Savart, $\mathcal{L}$ est l'opérateur différentiel (14), et Λ est l'opérateur intégro-différentiel défini par

$$\Lambda\tilde{w} \;=\; v^G \cdot \nabla\tilde{w} + \tilde{v} \cdot \nabla G \;.$$

L'intérêt de travailler dans l'espace de Hilbert X est que l'opérateur $\mathcal{L}$ y est auto-adjoint, avec $\mathcal{L} \le -1/2$ sur le sous-espace X_0 et $\mathcal{L} \le -1$ sur X_1 [5]. En outre, l'opérateur Λ est antisymétrique dans le même espace X [6].

Pour contrôler l'évolution de la perturbation $\tilde{w}(\xi,\tau)$, on utilise l'estimation d'énergie

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\tilde{w}(\cdot,\tau)\|_X^2 \;&=\; (\tilde{w}(\cdot,\tau)\,,\mathcal{L}\tilde{w}(\cdot,\tau))_X - \int_{\mathbf{R}^2} G^{-1}(\xi)\tilde{w}(\xi,\tau)\tilde{v}(\xi,\tau)\cdot\nabla\tilde{w}(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi \\ &=\; (\tilde{w}(\cdot,\tau)\,,\mathcal{L}\tilde{w}(\cdot,\tau))_X + \frac{1}{4}\int_{\mathbf{R}^2} G^{-1}(\xi)(\xi\cdot\tilde{v}(\xi,\tau))\tilde{w}(\xi,\tau)^2\,\mathrm{d}\xi \;,\end{aligned} \tag{36}$$

où la seconde ligne s'obtient en intégrant par parties et en utilisant le fait que $\nabla G^{-1} = (\xi/2)G^{-1}$. Fixons $\tau > 0$ et notons $f(\xi) = G^{-1/2}(\xi)\tilde{w}(\xi,\tau)$. Alors $\|f\|_{L^2} = \|\tilde{w}(\cdot,\tau)\|_X$ et

$$E(f) \;:=\; \|\nabla f\|_{L^2}^2 + \frac{1}{16}\,\||\xi|f\|_{L^2}^2 - \frac{1}{2}\|f\|_{L^2}^2 \;=\; -(\tilde{w}(\cdot,\tau)\,,\mathcal{L}\tilde{w}(\cdot,\tau))_X \;.$$

Comme $\tilde{w}(\cdot,\tau) \in X_0$ par hypothèse, on a donc $E(f) \ge \kappa\|f\|_{L^2}^2$ avec $\kappa = 1$ si $\tilde{w}(\cdot,\tau) \in X_1$ et $\kappa = 1/2$ sinon. Il s'ensuit en particulier qu'il existe $C > 0$ tel que

$$E(f) \ge C(\|\nabla f\|_{L^2}^2 + \||\xi|f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2) \;.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\Big|\int_{\mathbf{R}^2} G^{-1}(\xi)(\xi\cdot\tilde{v}(\xi,\tau))\tilde{w}(\xi,\tau)^2\,\mathrm{d}\xi\Big| \;&\le\; \int_{\mathbf{R}^2} |\xi\cdot\tilde{v}(\xi,\tau)|f(\xi)^2\,\mathrm{d}\xi \\ &\le\; \|\tilde{v}(\cdot,\tau)\|_{L^4}\,\|f\|_{L^4}\,\||\xi|f\|_{L^2} \;.\end{aligned} \tag{37}$$

Par la loi de Biot-Savart, on a $\|\tilde{v}\|_{L^4} \le C\|\tilde{w}\|_{L^{4/3}} \le C\|\tilde{w}\|_X$, donc le membre de droite de (37) est borné par $C\|\tilde{w}(\cdot,\tau)\|_X E(f)$. Par conséquent, il existe $C_7 > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\|\tilde{w}(\cdot,\tau)\|_X^2 \;&\le\; -2E(f)(1 - C_7\|\tilde{w}(\cdot,\tau)\|_X) \\ &\le\; -2\kappa\|\tilde{w}(\cdot,\tau)\|_X^2(1 - C_7\|\tilde{w}(\cdot,\tau)\|_X) \;,\end{aligned} \tag{38}$$

où la seconde inégalité est vraie tant que $C_7\|\tilde{w}(\cdot,\tau)\|_X \le 1$. Si l'on suppose maintenant que $\|\tilde{w}(\cdot,0)\|_X \le \delta = (2C_7)^{-1}$, l'inégalité différentielle (38) implique que $\|\tilde{w}(\cdot,\tau)\|_X \le \|\tilde{w}(\cdot,0)\|_X$ pour tout $\tau \ge 0$ et que

$$\frac{\|\tilde{w}(\cdot,\tau)\|_X}{1 - C_7\|\tilde{w}(\cdot,\tau)\|_X} \;\le\; \frac{\|\tilde{w}(\cdot,0)\|_X}{1 - C_7\|\tilde{w}(\cdot,0)\|_X}\,e^{-\kappa\tau} \;, \quad \tau \ge 0 \;,$$

d'où l'on déduit que $\|\tilde{w}(\cdot,\tau)\|_X \le 2\|\tilde{w}(\cdot,0)\|_X\,e^{-\kappa\tau}$. Ceci conclut la démonstration. $\square$

Références

[1] A. Arnold, P. Markowich, G. Toscani, et A. Unterreiter, On convex Sobolev inequalities and the rate of convergence to equilibrium for Fokker-Planck type equations, *Comm. Partial Differential Equations* **26** (2001), 43–100.

[2] M. Ben-Artzi, Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations, *Arch. Rational Mech. Anal.* **128** (1994), 329–358.

[3] H. Brezis, Remarks on the preceding paper by M. Ben-Artzi: "Global solutions of two-dimensional Navier-Stokes and Euler equations", *Arch. Rational Mech. Anal.* **128** (1994), 359–360.

[4] E. A. Carlen et M. Loss, Optimal smoothing and decay estimates for viscously damped conservation laws, with applications to the 2-D Navier-Stokes equation, *Duke Math. J.* **81** (1996), 135–157.

[5] Th. Gallay et C. E. Wayne, Invariant manifolds and the long-time asymptotics of the Navier-Stokes and vorticity equations on $\mathbf{R}^2$, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **163** (2002), 209–258.

[6] Th. Gallay et C.E. Wayne, Global stability of vortex solutions of the two-dimensional Navier-Stokes equation, *Comm. Math. Phys.* **255** (2005), 97–129.

[7] Th. Gallay et C.E. Wayne, Existence and Stability of Asymmetric Burgers Vortices, *J. Math. Fluid Mechanics* **9** (2007), 243–261.