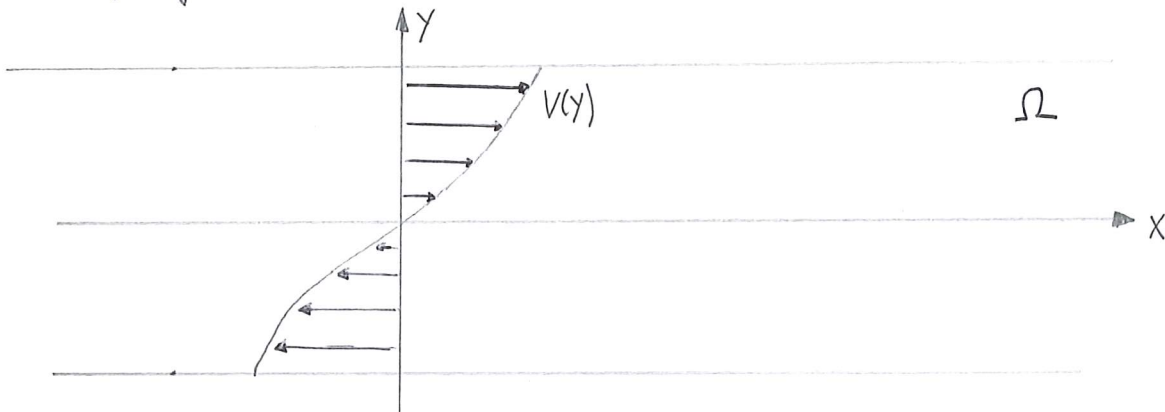


Stabilité non linéaire : un petit panorama

A) Écoulements monotones (Couette et ses généralisations)

On considère un écoulement parallèle plan dans $\mathbb{R} \times (-L, L) = \Omega$ avec profil de vitesse $v(y)e_x$:



Le tourbillon associé est $\bar{\omega}(y) = -v'(y)$. On étudie la stabilité non linéaire de cet écoulement. Les perturbations de la vitesse et du tourbillon vérifient les équations :

$$\begin{cases} \partial_t u + v(y)\partial_x u + v'(y)u_2 e_x + (u \cdot \nabla)u = \nu \Delta u - \nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases} \quad (NS)$$

$$\begin{cases} \partial_t \omega + v(y)\partial_x \omega - v''(y)u_2 + u \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega \\ \omega = \partial_x u_2 - \partial_y u_1 \end{cases} \quad (T)$$

La vitesse vérifie
$$\begin{cases} u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } \nu = 0 \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega & \text{si } \nu > 0 \end{cases}$$

Beaucoup de résultats cités dans la suite supposent une périodicité en x ($\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{T}$) ou une extension infinie en y ($L = +\infty$),

Le cas le plus étudié est celui de l'écoulement de Couette plan ($v(y) = y$) où les éq. ci-dessus se simplifient un peu. 2)

A1) Couette non visqueux (et ses variantes)

L'éq. du tourbillon est particulièrement simple:

$$\| \partial_t \omega + y \partial_x \omega + u \cdot \nabla \omega = 0. \quad (\text{TC})$$

Toutes les normes L^p du tourbillon sont préservées \Rightarrow on a stabilité (au sens de Lyapunov) dans $L^p \forall p \in [1, +\infty]$.

Peut-on montrer un résultat de stabilité asymptotique?

Les solutions de l'équation linéarisée $\partial_t \tilde{\omega} + y \partial_x \tilde{\omega} = 0$ se calculent explicitement:

$$\| \tilde{\omega}(x, y, t) = \omega_0(x - yt, y), \quad \forall t \geq 0.$$

Supposons pour simplifier que $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}$ et que

$$\int_{\mathbb{T}} \omega_0(x, y) dy = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Alors la formule de Biot-Savart: (cf. cours 1)

$$\hat{u}(k, \eta, t) = \begin{pmatrix} i\eta \\ -ik \end{pmatrix} \frac{\hat{\omega}_0(k, \eta + kt)}{k^2 + \eta^2}$$

Suggère que la vitesse u pourrait décroître vers 0 lorsque $t \rightarrow +\infty$, ce qui laisse un espoir de contrôler la non-linéarité dans (TC) en utilisant cet effet d'amortissement non visqueux, dû au mélange par le flot de Couette.

⚠ Problème: même en supposant ω très régulier, on a au mieux

$$u_1(\cdot, \cdot, t) \sim \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad u_2(\cdot, \cdot, t) \sim \frac{1}{t^2}, \quad t \rightarrow +\infty.$$

\Rightarrow la non-linéarité n'est sûrement pas intégrable en temps!

Idee: changement de variables $(x, y, t) \mapsto (z, v, t)$ où

$$\begin{cases} z(x, y, t) = x - t v(y, t) \\ v(y, t) = y + \frac{1}{t} \int_0^t \langle u_x \rangle(y, \tau) d\tau \end{cases} \quad \langle \cdot \rangle = \text{moyenne en } x!$$

et $\omega(x, y, t) = f(z(x, y, t), v(y, t), t)$. || $\begin{pmatrix} z \approx x - yt \\ v \approx y \end{pmatrix}$ (*)

L'équation pour f et la loi de Biot-Savart deviennent compliquées, mais la non-linéarité décroît (formellement) plus rapidement en temps.

Problème 2: Le mécanisme de Orr (amortissement non risqué) produit une décroissance très faible, et donne même lieu à des croissances temporaires (phénomène des échos). Pour contrôler ces amplifications temporaires, il est nécessaire de supposer que les données initiales sont très régulières (régularité Gevrey).

Déf: Espace $G_{\lambda, s}$ (Gevrey $1/s$) $\lambda > 0, 0 < s \leq 1$

$$\| \omega \|_{G_{\lambda, s}}^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} |\hat{\omega}(k, \eta)|^2 e^{2\lambda(k^2 + \eta^2)^{s/2}} d\eta$$

$s = 1$: fonctions analytiques

Théorème Bedrossian-Masmoudi (2015)

Stabilité asymptotique de Couette pour Euler dans $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$

Soit $\lambda > \lambda' > 0$, $\frac{1}{2} < s \leq 1$. Il existe $\varepsilon > 0$ t.q. si

$$\| \omega_0 \|_{G_{\lambda, s}} \leq \varepsilon, \quad \int |y \omega_0| dx dy \leq \varepsilon, \quad \int \omega_0 dx dy = 0$$

alors il existe f_∞ t.q. $\| f_\infty \|_{G_{\lambda', s}} \lesssim \varepsilon$, $\int f_\infty dx dy = 0$ t.q.

$$\| f(\cdot, \cdot, t) - f_\infty \|_{G_{\lambda, s}} \lesssim \frac{\varepsilon^2}{1+t^2}, \quad \left(\begin{array}{l} f \text{ associé à } \omega \text{ par } (*) \\ \omega \text{ sol. d'Euler, } \omega|_{t=0} = \omega_0 \end{array} \right)$$

En outre le champ de vitesse vérifie:

$$\| \langle u_1 \rangle - u_\infty \|_{G_{\lambda', s}} \lesssim \frac{\varepsilon^2}{1+t^2}, \quad \| u_1 - \langle u_1 \rangle \|_{L^2} \lesssim \frac{\varepsilon}{1+|t|}, \quad \| u_2 \| \leq \frac{\varepsilon}{1+t^2}$$

où $u_\infty(y)$ est donné par $u_\infty = \partial_y^{-1} \langle f_\infty \rangle$.

Le champ de vitesse complet $V(y) + u(x, y, t)$ converge donc vers un écoulement parallèle $y + u_\infty(x)$, proche de Couette, lorsque $t \rightarrow +\infty$ (et vers un autre lorsque $t \rightarrow -\infty$).

- La régularité Gevrey est nécessaire: le résultat reste vrai pour $s=1/2$ (Ionescu-Jia, 2020), mais l'éq. pour ω devient instable si $\omega_0 \in G_{\lambda, s}$ avec $s = 1/2 - \varepsilon$ (Deng-Masmoudi, à paraître CPAM).
- Pour tout $s < 3/2$, il existe des solutions stationnaires ω qui ne sont pas des écoulements parallèles et qui vérifient $\| \omega \|_{H^s} \ll 1$ (Lim-Zeng, 2011).

Cas d'un canal de largeur finie $\Omega = \mathbb{T} \times (-L, L)$

5)

Dans ce cas, les termes de bord limitent la régularité Sobolev que l'on peut utiliser pour montrer l'amortissement non risqué linéaire.

P.ex. si $\omega \in H^s(\Omega)$ on doit imposer

$$\begin{cases} s \leq 3/2 & \text{en général} \\ s \leq 5/2 & \text{si } \omega|_{\partial\Omega} = 0 \text{ etc...} \end{cases} \quad (\text{Zillinger, 2016})$$

Comme il faut la régularité Gevrey pour traiter le cas non linéaire, on doit supposer que ω_0 est à support compact dans Ω (i.e. s'annule sur un voisinage du bord). Comme la vitesse verticale est intégrable en temps, cette propriété est préservée $\forall t \geq 0$ si les perturbations sont petites (Ionescu-Jia, 2020).

Écoulements monotones plus généraux $\Omega = \mathbb{T} \times (-L, L)$

Pour un profil de vitesse plus général, l'équation linéarisée

$$\| \partial_t \omega + v(y) \partial_x \omega - V''(y) \omega = 0$$

est déjà intéressante à étudier, en raison du terme non local $V''(y) \partial_x \Delta^{-1} \omega$ (notez que $V'' = 0$ pour Couette!). Il n'est pas clair que la solution $\omega = 0$ soit stable.

- Rayleigh (1880), Fjørtoft (1950): conditions suffisantes de stabilité linéaire V'' est de signe constant, ou $|V'|$ n'a pas de maximum local
- Arnold (1965): conditions suffisantes pour la stabilité non linéaire, p.ex. $0 < C \leq \frac{u''}{u} \leq C < \infty$.

- Wei, Zhang, Zhao (2018), Jia (2020): amortissement non risqué linéaire en supposant

6)

$$\begin{cases} V \in C^4([-L, L]), V \text{ monotone} \\ L'opérateur linéarisé n'a pas de valeurs propres instables ou plongées \end{cases}$$

- Ionescu - Jia (preprint, 2020)

$$\begin{cases} V'' \in G_{\lambda, \nu_2}([-L, L]), V'' \text{ à support compact dans } (-L, L) \\ 0 < C_1 \leq V'(y) \leq C_2 < \infty \quad \forall y \in [-L, L] \\ L'opérateur linéarisé n'a pas de valeurs propres (spectre purement continu) \end{cases}$$

\Rightarrow Stabilité non linéaire comme dans Bedrossian - Masmoudi, pour des perturbations w_0 à support compact dans $\mathbb{T} \times (-L, L)$ et t.q.

$$\|w_0\|_{G_{\lambda, \nu_2}} \leq \varepsilon.$$

L'hypothèse que $V'' = 0$ près des bords est nécessaire pour propager en temps la condition essentielle que $w = 0$ sur un voisinage du bord.

La démonstration de tous les résultats non linéaires repose sur des estimations d'énergie dont les poids sont des multiplicateurs de Fourier (dépendant du temps) très soigneusement choisis pour exploiter la faible décroissance de l'évolution linéaire. Comme dans la théorie analytique, la régularité Gevrey se dégrade en temps de façon à compenser les instabilités linéaires.

A2) Écoulements monotones visqueux

7)

Lorsque $\nu > 0$, des écoulements parallèles de la forme $u = V(y, t) e_x$ sont solutions de NS si V vérifie l'éq. de la chaleur:

$$\| \partial_t V(y, t) = \nu \partial_y^2 V(y, t).$$

\Rightarrow seul Couette est stationnaire! Les autres écoulements évoluent lentement si $\nu \ll 1$.

Si $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{T}$: la stabilité linéaire de Couette se montre par calcul direct (formules explicites en Fourier, cf. cours 1)

Si $\Omega = \mathbb{R} \times [-L, L]$ + conditions de Dirichlet: Couette est linéairement stable $\forall \nu > 0$ (Romanov, 1973).

• Bedrossian, Masmoudi, Vicol (2016): étend à $\nu > 0$ le résultat de stabilité non linéaire dans $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$, en régularité Gevrey.

- $0 < t < \nu^{-1/3}$: la dissipation visqueuse est négligeable, on a amortissement non visqueux comme pour $\nu = 0$.

- $\nu^{-1/3} < t < \nu^{-1}$: on a dissipation accélérée, comme pour un scalaire passif. Les modes de Fourier avec $k \neq 0$ décroissent comme $\left(\frac{1}{\nu t^3}\right)^\alpha$ pour un $\alpha \geq 1$ arbitraire (mais fixé).

Pas de croissance en $e^{-c\nu t^3}$ comme dans le cas linéaire!

- $t > \nu^{-1}$: la moyenne $\langle \omega \rangle$ tend vers zéro comme $\frac{1}{(\nu t)^{1/4}}$

\Rightarrow on converge à nouveau vers Couette (diffusion).

Pour des perturbations moins régulières, on s'attend à un effet de seuil (Kelvin, 1887): il existe un exposant $\gamma \geq 0$ t.q.

- si $\|w_0\|_X \lesssim \nu^\gamma$: on a stabilité
- si $\|w_0\|_X \gg \nu^\gamma$: on peut avoir instabilité

On sait que pour Couette dans $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$:

- $\gamma = 0$ si $X = G_{\alpha, s}$, $s \geq 1/2$ (Bedrossian, Masmoudi, Vicol)
- $\gamma \leq 1/2$ si $X = H^N$ (N grand) (Bedrossian, Vicol, Wang, 2018)
Vrai aussi pour des profils v proche de Couette.
- $\gamma \leq 1/3$ si $X = H^N$ (N grand) (Masmoudi, Zhao, preprint 2019)
- $\gamma \leq 1/2$ si $X = H^1$ pour w (Chen, Wei, Zhang, 2020)

⚠ Vrai dans $\mathbb{T} \times [-L, L]$ avec conditions de Navier ou de Dirichlet!
Contrôle les contributions de la couche limite!

Rem: Le seuil de stabilité pour l'écoulement de Couette peut s'établir par les méthodes présentées dans les cours 1-3, car dans cet exemple l'équation pour la perturbation s'écrit:

$$\partial_t w + \underbrace{\gamma \partial_x w}_{\text{transport}} + \underbrace{u \cdot \nabla w}_{\text{non-linéarité}} = \underbrace{\nu \Delta w}_{\text{diffusion}}.$$

Bedrossian, Vicol et Wang (2018) proposent une preuve directe assez simple, basée sur des estimations d'énergie utilisant des multiplieurs de Fourier exploitant l'amortissement non visqueux.

B) Écoulement monotones, sans point d'inflexion

On suppose ici que $V'(\bar{y}) = 0$ pour un $\bar{y} \in \mathbb{R}$, mais que $V''(x)$ a un signe constant. De tels écoulements sont stables pour $\nu=0$ par le critère de Rayleigh.

B1) Cas non risqué : déplétion de la vorticité

On s'intéresse au phénomène d'amortissement non risqué près de la ligne de courant stationnaire. L' q. linéarisée s'écrit :

$$\| \partial_t \hat{\omega} + ik (V(x) + V''(x)(k^2 - \partial_y^2)^{-1}) \hat{\omega} = 0, \quad (*)$$

où $K \in \mathbb{R}$ (resp. $k \in \mathbb{Z}$) est le nombre d'onde horizontal.

Dans la limite $t \rightarrow +\infty$, on s'attend à ce que la solution de (*) vérifie

$$\hat{\omega}(k, y, t) \sim \omega_\infty(k, y) e^{-ikV(x)t} . \quad \|$$

(En effet, on peut penser que le terme local ikV domine le terme non local $V''(k^2 - \partial_y^2)^{-1}$ dans ce régime.) Lorsque $V'(x)$ ne s'annule pas, on obtient un effet d'amortissement non risqué pour la vitesse, comme dans l'écoulement de Couette.

⚠ Au voisinage du point \bar{y} où $V'(\bar{y}) = 0$, la phase devient stationnaire et on s'attend à un amortissement non risqué atténué, avec des taux de décroissance plus faibles. Il n'en est rien si $V''(\bar{y}) \neq 0$!

Bouchet et Morita (2010) on en effet montré que $\omega_\infty(k, \bar{y}) = 0$

10)
en raison du terme non local dans (*). Ce phénomène de déplétion de vorticité au point critique de V permet de montrer l'amortissement non risqué avec les mêmes taux de décroissance que dans Couette!

Un résultat rigoureux en ce sens a été obtenu par Wei, Zhang, et Zhao (2019). Dans le domaine $\mathbb{T} \times [-1, 1]$, les auteurs considèrent un écoulement e.g.

- $V \in C^4([-1, 1])$, $V(y) = V(-y)$, $V'(y) > 0$ pour $y > 0$;
- $V'(0) = 0$, $V''(0) > 0$;
- l'opérateur linéarisé n'a pas de valeurs propres instables ou plongées.

$$\begin{cases} \text{Ex:} \\ V(y) = y^2! \end{cases}$$

Ils obtiennent alors pour la vitesse les mêmes estimations d'amortissement non risqué que pour Couette: si $\int \omega_0 dx dy = 0$, alors

$$\langle t \rangle \|u_1(t)\|_{L^2} + \langle t \rangle^2 \|u_2(t)\|_{L^2} \leq C \|\omega_0\|_{H^2}, \quad \forall t \geq 0.$$

$$\|\omega(x + tV(y), y, t) - \omega_\infty\|_{L^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0.$$

B2) Cas risqué

Le seul écoulement stationnaire dans cette catégorie est celui de Poiseuille, e.g. $V(y) = y^2$. Cet écoulement étant instable en présence de bords, il a seulement été étudié dans le domaine artificiel $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$, cf. Coti-Zelati, Elgindi, Widmayer (2020). Ces auteurs montrent :

- pour l'opérateur linéarisé $\mathcal{L} = \nu \Delta - v(y) \partial_x + v''(y) \Delta^{-1}$,
une estimation de dissipation accélérée de la forme:

$$\| e^{t\mathcal{L}_{\nu,k}} \|_{X \rightarrow X} \leq C e^{-c \lambda_{\nu,k} t}, \quad t \geq 0$$

$$\text{où } \lambda_{\nu,k} = \frac{\nu^{1/2} |k|^{1/2}}{1 + |\log \nu| + |\log |k||} \quad (**)$$

L'espace X est muni de la norme $\|f\|_X^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|y f\|_{L^2}^2$.

Aux pertes logarithmiques près, les exposants de ν et $|k|$ dans l'expression de $\lambda_{\nu,k}$ sont exactement ceux donnés par les méthodes des Cours 2 et 3 pour le scalaire passif avec $m = 2$.

L'estimation est établie par la méthode d'hypo-coercivité.

- pour l'équation non linéaire, un seuil de stabilité de la forme

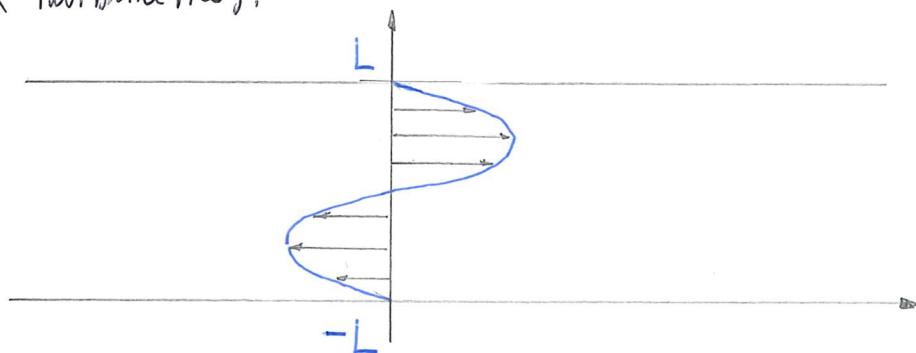
$$\|\omega_0\|_X \leq C \nu^\gamma \quad \text{avec } \underline{\gamma = 3/4 + \varepsilon}. \quad (\varepsilon > 0 \text{ arbitrairement petit})$$

Il n'est pas clair si cet exposant est optimal, ou s'il dépend du choix de l'espace X . Au vu de (**), on ne peut espérer mieux que $\gamma = 1/2 + \varepsilon$, cf. proposition p.11 du cours 1. (qui ne tient pas compte du fait que la non-linéarité contient une dérivée).

Conjecture: $\gamma = 2/3 + \varepsilon$ si on utilise l'amortissement non visqueux, comme dans l'écoulement de Kolmogorov (Wei, Zhang & Zhao, 2020).

c) Écoulement de Kolmogorov

On considère ici le cas particulier où $V(y) = \sin y$, exemple proposé par Tollmien, puis Kolmogorov (en lien avec la modélisation de la turbulence).



On se place dans le domaine $\mathbb{R} \times [-L, L]$, avec conditions au bord séparées ou périodiques (si L est un multiple de π).

⚠ Cet écoulement est non monotone (si $L > \pi/2$) et possède en $y=0$ un point d'inflexion où $|V'(y)|$ a un maximum local \Rightarrow les critères de stabilité de Rayleigh et Fjørtoft ne s'appliquent pas.

c1) Cas non visqueux

Prop: L'écoulement non visqueux est instable vis-à-vis de perturbations avec mode de Fourier horizontal k ssi

$$0 < |k|^2 < 1 - \frac{\pi^2}{4L^2} \quad (\text{Z. Lim, 2003})$$

En particulier, on a stabilité spectrale $\forall k \in \mathbb{R}$ ssi $L \leq \pi/2$.

Cet exemple montre que les critères de Rayleigh et Fjørtoft ne sont pas optimaux.

Cas périodique: $\gamma \in \mathbb{T}_{2\pi} = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$.

Le critère de stabilité devient

$$0 < |k|^2 < 1 \quad (\text{Z. Lim \& C. Zeng, 2013})$$

\Rightarrow il faut (pour avoir stabilité) supposer $x \in \mathbb{T}_{2\pi\delta}$ avec $\delta \leq 1$.

Dans $\mathbb{T}_{2\pi\delta} \times \mathbb{T}_{2\pi}$ avec $\delta < 1$, Wei, Zhang & Zhao (2020) montrent l'accroissement non risqué et la déplétion de vorticité comme dans le cas de Poiseuille.

C2) Cas risqué

⚠ Le flot de Kolmogorov n'est pas une solution stationnaire de NS!

Deux approches possibles:

i) Étudier la stabilité de la solution non stationnaire

$$\bar{u}(x, y, t) = e^{-\nu t} \begin{pmatrix} \sin y \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui dépend lentement du temps si $\nu \ll 1 \Rightarrow$ ég. linéarisée non autonome

ii) Étudier la solution stationnaire $\begin{pmatrix} \sin y \\ 0 \end{pmatrix}$ de l'équation modifiée

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \nu \Delta u - \nabla p + F \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

où $F = \nu \begin{pmatrix} \sin y \\ 0 \end{pmatrix}$ (terme de forçage artificiel)

\Rightarrow ég. linéarisée autonome.

L'équation linéarisée s'écrit :

$$\| \partial_t \omega + e^{-\nu t} \sin y \partial_x (1 + \Delta^{-1}) \omega = \nu \Delta \omega .$$

↑ facteur absent dans le cas ii)

Elle est donc de la forme $\partial_t \omega + \Lambda \omega = \nu L \omega$, avec

$$L = \Delta, \quad \Lambda = \sin y \partial_x (1 + \Delta^{-1}).$$

⚠ Dans $L^2(\mathbb{T}^2)$, L est bien auto-adjoint et négatif, mais Λ n'est pas antisymétrique !

$\text{Ker } \Lambda$ est engendré par $\left\langle \begin{array}{l} \text{toutes les fonctions indépendantes de } x \\ \{ \sin x, \cos x \} \end{array} \right\rangle$ (absent si on travaille dans $\mathbb{T}_{2\pi\delta}$ avec $\delta < 1$!)

Dans le sous-espace $(\text{Ker } \Lambda)^\perp$ on peut utiliser le produit scalaire non local

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \int_{\mathbb{T}^2} \overline{\omega_1} (1 + \Delta)^{-1} \omega_2 dx$$

pour lequel L est auto-adjoint et Λ antisymétrique

\Rightarrow pas d'instabilité linéaire dans $\mathbb{T}_{2\pi\delta} \times \mathbb{T}_{2\pi}$ si $\delta \leq 1$.

- Beck & Wayne (2013) : dissipation accélérée pour l'éq. simplifiée

$$\partial_t \omega + e^{-\nu t} \sin y \partial_x \omega = \nu \Delta \omega,$$

par la méthode d'hypocoercivité.

- Ibrahim, Maekawa & Masmaoui (Annals PDE, online 2019)

Estimations résolvantes pour l'opérateur linéarisé complet $\nu L - \Lambda$ (cas autonome), Décroissance du semi-groupe en $e^{-c\sqrt{\nu}t}$ (optimal!). Méthode ingénieuse pour traiter le terme non local.

• Z. Lim & M. Xu (ARMA 2019) Problème complet, dépendant du temps. Dissipation accélérée sans taux de décroissance explicite, obtenue par le thm RAGE. Seuil de stabilité en ν^γ avec $\gamma=1$ (non optimal!)

• D. Wei, Z. Zhang, & W. Zhao (Adv. Math 2020)
Problème complet dépendant du temps, dans $\mathbb{T}_{2\pi\delta} \times \mathbb{T}_{2\pi}$ avec $\delta < 1$. Amortissement non risqué, dissipation accélérée, et seuil de stabilité. (comme Poiseuille) $e^{-c\sqrt{\nu}t}$ ν^γ avec $\gamma = 2/3 + \varepsilon$

Méthode de l'opérateur d'onde pour éliminer la partie non locale de l'opérateur linéarisé (par chgt de variables!).

• D. Wei & Z. Zhang (2019) Démonstration simplifiée des estimations linéaires par la méthode d'hypo-coercivité.

D) Tourbillons plans

Pour terminer, on mentionne que les tourbillons plans donnés en coordonnées polaires par :

|| $u = V(r) e_{\theta}$, $p = p(r)$ où $p'(r) = \frac{V(r)^2}{r}$

forment une famille de solutions stationnaires de l'éq. d'Euler dans \mathbb{R}^2 , similaire à celle des écoulements parallèles 1D.

Dans cette analogie:

- r (rayon) $\approx y$: variable transverse à l'écoulement
- ϑ (angle) $\approx x$: variable le long de l'écoulement
- $\Delta \vartheta \in \mathbb{T}$: l'écoulement est naturellement périodique ici!

Une partie des résultats obtenus pour les écoulements parallèles ont été étendus au cas des tourbillons.

D1) Cas non visqueux

Estimations d'amortissement non visqueux linéaire + scattering:

- Ch. Zillinger (2017)
- Bedrossian, Coti Zelati & Vicol (2019)
- Coti Zelati & Zillinger (2019)

Résultat de stabilité non linéaire pour un tourbillon ponctuel (perturbations à régularité Gevrey):

- Ionescu - Jia (preprint 2019, à paraître dans C.I.A.M.)

D2) Cas visqueux

Aucun tourbillon localisé n'est solution stationnaire de NS! (même problème que pour Kolmogorov). Toutefois, le tourbillon de Lamb-Oseen est stationnaire dans des variables auto-similaires, et peut être étudié avec les méthodes présentées dans ce cours.

Cf. Exposé Bourbaki 1167, novembre 2019.