Estimations du semi-groupe

Comme dans le cours précédent, on considère l'équation de transport-diffusion

$$\partial_t f(x,y,t) + V(y)\,\partial_x f(x,y,t) = \nu \Delta f(x,y,t) \qquad \text{(TD)}$$

dans le cylindre $\Sigma = \mathbb{R} \times \Omega$, avec conditions de Neumann homogènes sur le bord. Après transformation de Fourier partielle et factorisation de la diffusion horizontale, on se ramène au problème d'évolution dans $X = L^2(\Omega)$

$$\partial_t g + H_{\nu,k}\, g = 0, \qquad H_{\nu,k} = -\nu\Delta + ikV(y)$$

où $\nu > 0$ et $k \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

L'opérateur $-H_{\nu,k}$ est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe (analytique) de contractions dans X :

$$\| e^{-tH_{\nu,k}} g \| \leq \|g\| \quad \forall t \geq 0. \qquad (1)$$

Lorsque $k \neq 0$, on souhaite améliorer cette estimation en précisant le taux de décroissance lorsque $t \to +\infty$. Deux approches possibles :

- utiliser la représentation du semi-groupe en termes de la résolvante, et les estimations du cours précédent ;
- appliquer la méthode d'hypocoercivité proposée par C. Villani.

Représentation du semi-groupe (formule de Dunford)

La résolvante est la transformée de Laplace du semi-groupe :

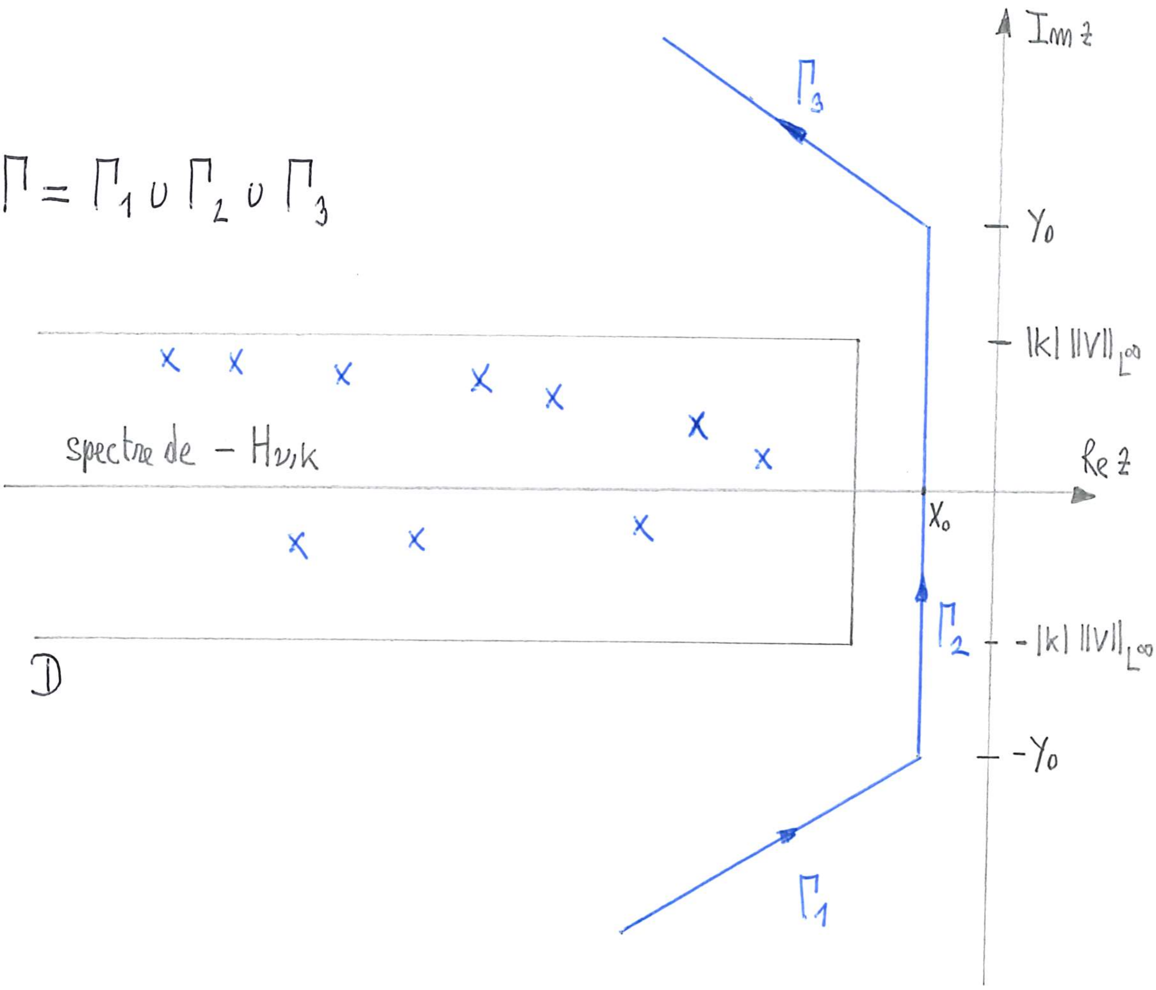
$$(z+H_{\nu,\kappa})^{-1} g = \int_0^\infty e^{-zt} e^{-tH_{\nu,\kappa}} g \, dt \qquad (g \in X, \ \mathrm{Re}\, z > 0).$$

La formule d'inversion s'écrit

$$e^{-tH_{\nu,\kappa}} g = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{zt} (z+H_{\nu,\kappa})^{-1} g \, dz$$

où Γ est un chemin "reliant $-i\infty$ à $+i\infty$" dans le plan complexe en évitant par la droite le spectre de $-H_{\nu,\kappa}$. Pour obtenir de bonnes estimations, ce contour doit être choisi soigneusement.

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$$



Le spectre de l'opérateur $-H_{\nu,K}$ est contenu dans la bande

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \, ; \, \mathrm{Re}\, z \leq - \Psi(\nu,K) \, , \, |\mathrm{Im}\, z| \leq |K| \, \|V\|_\infty \}$$

où

$$\Psi(\nu,K)^{-1} = \sup_{z \in i\mathbb{R}} \|(H_{\nu,K} - z)^{-1}\| = \sup_{z \in i\mathbb{R}} \|(H_{\nu,K}+z)^{-1}\|.$$

Rem : on peut supposer sans perte de généralité que $\langle V \rangle = 0$, de sorte que $\|V\|_{L^\infty} \leq C \|\nabla V\|_{L^\infty}$; sinon, il suffit de translater la figure dans la direction verticale.

On prend un contour d'intégration de la forme $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ où

$$\Gamma_1 = \{ X_0 - iY_0 + (1+i)s \, ; \, -\infty < s \leq 0 \}$$

$$\Gamma_2 = \{ X_0 + iy \, ; \, -Y_0 \leq y \leq Y_0 \}$$

$$\Gamma_3 = \{ X_0 + iY_0 - (1-i)s \, ; \, 0 \leq s < \infty \}$$

avec

$$X_0 = -\frac{1}{2}\Psi(\nu,K) \, , \quad Y_0 = 2|K| \, \|V\|_{L^\infty} .$$

- estimation sur Γ_2 : si $z = X_0 + iy$ avec $y \in \mathbb{R}$, on a

$$z + H_{\nu,K} = X_0 + iy + H_{\nu,K} = (H_{\nu,K}+iy)(1 + X_0(H_{\nu,K}+iy)^{-1})$$

$$\Longrightarrow \|(z+H_{\nu,K})^{-1}\| \leq \frac{\|(H_{\nu,K}+iy)^{-1}\|}{1 - |X_0| \, \|(H_{\nu,K}+iy)^{-1}\|} \underset{\text{choix de } X_0}{\leq} 2\Psi(\nu,K)^{-1}.$$

- estimation sur Γ_1, Γ_3 : $|\mathrm{Im}\, z| \geq Y_0 + |s|$, donc par distance à l'image numérique

$$\|(z+H_{\nu,K})^{-1}\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Im}\, z| - |K| \|V\|_{L^\infty}} \leq \frac{1}{|K| \|V\|_{L^\infty} + |s|} .$$

<u>Régime de dissipation accélérée :</u> $\quad 0 < \nu \leq |k|$

On peut prendre $\Psi(\nu,k) = 2C_1 \nu^\alpha |k|^{1-\alpha}$, $\quad \alpha = \frac{m}{2+m}$.

$\Rightarrow \quad X_0 = - C_1 \nu^\alpha |k|^{1-\alpha}$.

$$\cdot \left\| \int_{\Gamma_2} e^{zt} (z + H_{\nu,k})^{-1} dz \right\| \leq \int_{-Y_0}^{Y_0} e^{X_0 t}\, 2\, \Psi(\nu,k)^{-1} dy$$

$$= 2Y_0 e^{X_0 t}\, 2\,\Psi(\nu,k)^{-1} = C \left(\frac{|k|}{\nu}\right)^\alpha e^{-C_1 \nu^\alpha |k|^{1-\alpha} t}.$$

$$\cdot \left\| \int_{\Gamma_3} e^{zt} (z + H_{\nu,k})^{-1} dz \right\| \leq \int_0^\infty e^{(X_0 - s)t} \frac{1}{|k|\,\|V\|_{L^\infty} + s} \sqrt{2}\, ds$$

$$= \sqrt{2}\, e^{X_0 t} \int_0^\infty \frac{e^{-\tau}}{|k| t \|V\|_{L^\infty} + \tau} d\tau \leq C e^{-C_1 \nu^\alpha |k|^{1-\alpha} t}$$

$\uparrow$ si $|k| t \geq 1$!

La borne sur Γ_1 est identique.

On a donc montré que, si $|k|t \geq 1$:

$$\left\| e^{-tH_{\nu,k}} \right\| \leq C_2 \left(\frac{|k|}{\nu}\right)^\alpha e^{-C_1 \nu^\alpha |k|^{1-\alpha} t}. \qquad \text{(DA)}$$

Mais si $|k| t \leq 1$ on a $\| e^{-tH_{\nu,k}} \| \leq 1 \Rightarrow$ (DA) est vrai dans tous les cas.

<u>Régime de dispersion de Taylor :</u> $\quad 0 < |k| \leq \nu$

On prend $\Psi(\nu,k) = 2 C_3 \frac{|k|^2}{\nu} \Rightarrow X_0 = - C_3 \frac{|k|^2}{\nu}$.

Par les mêmes calculs, on obtient :

$$\left\| e^{-tH_{\nu,k}} \right\| \leq C_4 \left(\frac{\nu}{|k|}\right) e^{-C_3 \frac{|k|^2}{\nu} t}. \qquad \text{(DT)}$$

Hypocoercivité

La méthode proposée par Villani (dans un autre contexte) consiste à contrôler directement les solutions de l'équation

$$\partial_t g(k,y,t) + ikV(y)g(k,y,t) = \nu \Delta g(k,y,t)$$

par des estimations d'énergie.

Lemme 1 : (calculs directs)

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|g\|^2 + \nu\|\nabla g\|^2 = 0 \qquad 1$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla g\|^2 + \nu\|\Delta g\|^2 = -\mathrm{Re}\langle ikg\nabla V, \nabla g\rangle \qquad \alpha$$

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Re}\langle ikg\nabla V, \nabla g\rangle + k^2\|g\nabla V\|^2 = -2\nu\,\mathrm{Re}\langle ik\nabla V\cdot\nabla g, \Delta g\rangle - \nu\,\mathrm{Re}\langle ikg\Delta V, \Delta g\rangle \qquad \beta$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|g\nabla V\|^2 + \nu\||\nabla V|\nabla g\|^2 = -2\nu\,\mathrm{Re}\langle g\,D^2(V)\nabla V, \nabla g\rangle \qquad \gamma k^2$$

On considère à présent la fonctionnelle

$$\Phi = \frac{1}{2}\left\{\|g\|^2 + \alpha\|\nabla g\|^2 + 2\beta\,\mathrm{Re}\langle ikg\nabla V, \nabla g\rangle + \gamma k^2\|g\nabla V\|^2\right\}$$

où $\alpha, \beta, \gamma > 0$ sont des paramètres à choisir.

On impose d'emblée les relations :

$$\alpha^2 = \beta\nu, \qquad \beta^2 = \frac{\alpha\gamma}{16} \qquad (R1)$$

$\Longrightarrow$ tout s'exprime en fonction du seul paramètre β :

$$\alpha = (\beta\nu)^{1/2}, \qquad \gamma = \frac{16\,\beta^{3/2}}{\nu^{1/2}}.$$

En vertu de (R1) on a

$$\left|2\beta \,\mathrm{Re}\langle ik g \nabla v, \nabla g\rangle\right| \leq \frac{\alpha}{4}\|\nabla g\|^2 + \frac{\gamma k^2}{4}\|g\nabla v\|^2$$

donc

$$\Phi \approx \frac{1}{2}\left\{\|g\|^2 + \alpha\|\nabla g\|^2 + \gamma k^2\|g\nabla v\|^2\right\}.$$

Rem: Il est essentiel d'inclure le terme non positif $\mathrm{Re}\langle ikg\nabla v, \nabla g\rangle$ dans la fonctionnelle Φ : c'est le seul qui produise, une fois dérivé par rapport au temps, un terme négatif qui ne soit pas multiplié par ν ; cf. Lemme 1.

Lemme 2 :

$$\frac{d}{dt}\Phi + \frac{\nu}{2}\|\nabla g\|^2 + \frac{\alpha\nu}{2}\|\Delta g\|^2 + \frac{\beta k^2}{2}\|g\nabla v\|^2 + \frac{\gamma k^2\nu}{2}\||\nabla v|\nabla g\|^2 \leq 5\gamma\nu k^2\|D^2 v\, g\|^2.$$

Dém: Il suffit de faire une combinaison linéaire (avec coefficients $1, \alpha, \beta, \gamma k^2$) des égalités du Lemme 1, puis d'estimer les termes au membre de droite en utilisant l'inégalité de Young et les relations (R1). □

Dans la suite on n'utilise que l'inégalité réduite

$$\frac{d}{dt}\Phi + \frac{\nu}{2}\|\nabla g\|^2 + \frac{\beta k^2}{2}\|g\nabla v\|^2 \leq c\gamma\nu k^2\|g\|^2, \qquad (\Phi 1)$$

où on a borné $\|D^2 v\, g\|^2 \leq C(v)\|g\|^2$. Le but est d'arriver à une inégalité différentielle pour Φ.

<u>Etape-clef :</u> Majorer $\|g\|$ en termes de $\|\nabla g\|$ et $\|g\nabla V\|$.

<u>Lemme 3 :</u> Si $\nabla V \not\equiv 0$, il existe $C>0$ t.q. $\forall g \in H^1(\Omega)$

$$\|g\| \leq C\left(\|\nabla g\| + \|g\nabla V\|\right).$$

<u>Dém :</u> (par contradiction) Si ce n'est pas le cas, il existe une suite (g_n) dans $H^1(\Omega)$ t.q. $\|g_n\| = 1$ $\forall n$ et $\|\nabla g_n\| + \|g_n \nabla V\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
Par Wirtinger $\|g_n - \langle g_n\rangle\| \leq C\|\nabla g_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, et quitte à extraire une sous suite on peut supposer que $\langle g_n\rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ avec $|a| = |\Omega|^{-1/2}$.
Ainsi $\|g_n - a\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, donc $\|g_n\nabla V\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{|\Omega|^{1/2}}\|\nabla V\| \neq 0$: contradiction. $\square$

Le lemme 3 est <u>tout à fait insuffisant</u> pour notre usage : il permet au mieux d'obtenir une inégalité de la forme $\frac{d}{dt}\Phi \leq -C\nu\Phi$ où l'on n'utilise pas le terme de transport.
Pour obtenir des majorations plus précises, il faut faire des hypothèses sur (les points critiques de) la fonction V.

<u>Hypothèse principale sur V :</u> Il existe un entier $m \in \mathbb{N}^*$ et une constante $C_0 > 0$ t.q. $\forall \sigma \in (0,1]$ $\forall g \in H^1(\Omega)$:

$$\sigma^{1-1/m}\|g\|^2 \leq C_0\left(\sigma\|\nabla g\|^2 + \|g\nabla V\|^2\right). \qquad (H)$$

<u>Rem :</u> Si $\langle g\rangle = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g\,dy = 0$, on peut demander (H) $\forall \sigma \in \mathbb{R}_+$ de sorte que

$$\|g\| \leq C\|\nabla g\|^{1-1/m}\|g\nabla V\|^{1/m}. \qquad (H')$$

L'hypothèse (H) est d'autant plus forte que m est petit.

Pour $m=1$, elle équivaut à $\|g\| \leq C \|g \nabla V\|$, ce qui est vrai si $\nabla V(x) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$ (pas de points critiques). On verra ci-dessous que (H) est vrai si V a un nombre fini de points critiques dans $\overline{\Omega}$, de dégénérescence $\leq m$.

Montrons à présent comment obtenir la décroissance exponentielle de la fonctionnelle Φ dans le cas où V est une fonction de Morse ($\Rightarrow$ (H) est vrai avec $m=2$). Au vu de ($\Phi 1$) on souhaite que

$$c\gamma\nu k^2 \|g\|^2 \leq \frac{\nu}{4}\|\nabla g\|^2 + \frac{\beta k^2}{4}\|g\nabla V\|^2 \qquad (*)$$

de sorte que

$$\frac{d}{dt}\Phi + \frac{c\gamma\nu k^2}{2}\|g\|^2 + \frac{\nu}{8}\|\nabla g\|^2 + \frac{\beta k^2}{8}\|g\nabla V\|^2 \leq 0. \qquad (\Phi 2)$$

L'inégalité (*) s'obtient de (H) en posant et supposant

$$\sigma = \frac{\nu}{\beta k^2} \leq 1, \qquad c\gamma\nu k^2 C_0\,\sigma^{-1/2} \leq \frac{\nu}{4}. \qquad (R2)$$

Au vu de (R1), la seconde inégalité devient $C_1 \beta |k| \leq 1$ où $C_1 = 64 c C_0$. Par ailleurs ($\Phi 2$) implique

$$\frac{d}{dt}\Phi + C\beta^{3/2}\nu^{1/2}k^2\left(\|g\|^2 + \frac{\alpha}{\beta^2k^2}\|\nabla g\|^2 + \frac{\gamma k^2}{\beta^2k^2}\|g\nabla V\|^2\right) \leq 0. \quad (\Phi 3)$$

Ceci conduit à une inégalité différentielle simple pour Φ si on suppose que $\beta|k|$ est borné inférieurement.

Régime de dissipation accélérée : $\frac{\nu}{|k|} \leq \frac{1}{C_1}$

On choisit

$$\beta = \frac{\beta_0}{|k|}, \quad \text{où } \beta_0 = \frac{1}{C_1},$$

et on définit α, γ par (R1). Alors $\sigma = \frac{\nu}{\beta k^2} \leq 1$ si $\frac{\nu}{|k|} \leq \beta_0$.
En outre $\beta^{3/2}\nu^{1/2}k^2 = \beta_0^{3/2}\nu^{1/2}|k|^{1/2}$, de sorte que ($\Phi$3) implique :

$$\frac{d}{dt}\Phi + C_2\nu^{1/2}|k|^{1/2}\Phi \leq 0,$$

pour une constante $C_2 > 0$. En intégrant cette inégalité, on trouve :

$$\Phi(t) \leq e^{-C_2\nu^{1/2}|k|^{1/2}(t-t_0)}\Phi(t_0), \quad t \geq t_0 \geq 0. \qquad \text{(E1)}$$

Régime de dispersion de Taylor : $\frac{\nu}{|k|} \geq \frac{1}{C_1}$

On choisit

$$\beta = \frac{\beta_1}{\nu}, \quad \text{où } \beta_1 = \frac{1}{C_1^2},$$

et on définit à nouveau α, γ par (R1). Pour obtenir (*), on pose $\sigma = 1$ dans (H) et on demande que

$$4c\gamma\nu k^2 C_0 \equiv C_1\beta_1^{3/2}\frac{k^2}{\nu} \leq \min(\nu, \beta k^2) \equiv \min\left(\nu, \beta_1\frac{k^2}{\nu}\right),$$

ce qui est le cas si $\nu/|k| \geq C_1^{-1}$ et β_1 est comme ci-dessus. En outre $\beta^{3/2}\nu^{1/2}k^2 = \beta_1^{3/2}k^2/\nu$ de sorte que (Φ3) implique

$$\frac{d}{dt}\Phi + C_2\frac{k^2}{\nu}\Phi \leq 0$$

$$\Longrightarrow \Phi(t) \leq e^{-C_2\frac{k^2}{\nu}(t-t_0)}\Phi(t_0), \quad t \geq t_0 \geq 0. \qquad \text{(E2)}$$

- Lorsque V est une fonction de Morse ($m=2$), la méthode d'hypocoercivité permet donc d'obtenir les taux de décroissance optimaux de l'évolution linéaire, dans les deux régimes (dissipation accélérée et dispersion de Taylor).

- Malheureusement, la démonstration simple ci-dessus ne se généralise pas aux valeurs de m différentes de 2 ! (ni $m=1$, ni $m \geq 3$).
Pour obtenir le taux de décroissance optimal il faut, dans le cas général, choisir les paramètres α, β, γ différemment suivant que l'on se trouve près d'un point critique de V ou non. $\Rightarrow$ nécessité d'une partition de l'unité, qui complique sérieusement la démonstration, cf : Gallagher - G. - Nier (2009), Bedrossian - Coti-Zelati (2017).
Sans découpage, l'approche ci-dessus fournit des taux de décroissance non optimaux.

- Les estimations (E1), (E2) ne se comparent pas directement à (DA), (DT) parce que $\Phi^{1/2}$ est équivalent non à la norme L^2, mais à une norme H^1 (avec des constantes dépendant des paramètres ν et k).
Pour obtenir (DA) à partir de (E1), il faut d'abord résoudre l'équation $\partial_t g + H_{\nu,k}\, g = 0$ sur un petit intervalle de temps (p.ex. de l'ordre de $1/\nu$) pour contrôler $\|\nabla g(t_0)\|$ par $C\|g(0)\|$, puis utiliser (E1) pour les temps ultérieurs. Comme $\gamma \approx \nu^{-1/2} k^{-3/2}$, on perd donc des puissances fractionnaires de ν et k dans cette première étape ($\gamma k^2 \approx |k|^{1/2} \nu^{-1/2}$). Cette perte ne se produit pas dans le régime de dispersion de Taylor, car alors $\gamma k^2 \approx k^2/\nu^2 \leq C$.

La méthode d'hypocoercivité, par son caractère élémentaire (estimations d'énergie), possède quelques avantages intéressant par rapport à l'approche "pseudo-spectrale" basée sur la résolvante :

1) Elle peut s'adapter au cas où l'opérateur (i.e. la fonction v) dépend lentement du temps. Ceci se produit lorsqu'on linéarise autour d'un profil non stationnaire (écoulement parallèle différent de Couette ou Poiseuille, tourbillons localisés, ...)

2) Elle peut permettre de traiter directement des problèmes non linéaires, sans avoir à étudier d'abord le semi-groupe linéaire puis la formulation intégrale de l'équation. Cette direction semble encore peu explorée à ce jour.

Terminons par quelques commentaires sur l'hypothèse (H). Les difficultés se produisent au voisinage des points critiques de V. On commence par un résultat auxiliaire :

Lemme : Soit $\ell \in \mathbb{N}$. Si $g \in H^1_0(B(0,R))$, alors

$$\|g\| \leq C \, \|\nabla g\|^{\frac{\ell}{\ell+1}} \, \||y|^\ell g\|^{\frac{1}{\ell+1}} \qquad (*)$$

où la constante $C > 0$ ne dépend que de la dimension d et ℓ.

Rem : Ici et dans la preuve $\|\cdot\|$ désigne la norme L^2 dans $B(0,R) \subset \mathbb{R}^d$, où $R > 0$. Le résultat étant trivial pour $\ell = 0$, on suppose $\ell \geq 1$.

Dém : En utilisant des coordonnées polaires et en décomposant en "série de Fourier" dans les variables angulaires, on se convainc qu'il suffit de montrer (*) pour des fonctions g radiales.
Dans ce cas (en omettant la mesure de la sphère unité) on a :

$$\|g\|^2 = \int_0^R g(r)^2 r^{d-1}\,dr \overset{\text{IPP}}{=} -\frac{2}{d}\int_0^R g(r)\,g'(r)\,r^d\,dr .$$

Par Hölder :

$$\left|\int_0^R g(r)g'(r)r^d\,dr\right| \leq \int_0^R \underbrace{|g'(r)|}_{2}\ \underbrace{\left(r^\ell |g(r)|\right)^{1/\ell}}_{2\ell}\ \underbrace{|g(r)|^{1-1/\ell}}_{2\ell/(\ell-1)}\ r^{d-1}\,dr \quad \longleftarrow \text{exposants Hölder}$$

$$\leq \|g'\|\ \|r^\ell g\|^{1/\ell}\ \|g\|^{1-1/\ell}$$

donc

$$\|g\|^2 \leq \frac{2}{d}\|g'\|\ \|r^\ell g\|^{1/\ell}\ \|g\|^{1-1/\ell} \quad \Longrightarrow \quad (*). \ \square$$

Supposons à présent que :

(H1) : $V \in C^1(\bar{\Omega})$ et $\nabla V \neq 0$ sur $\partial\Omega$

(H2) : V est lisse sur Ω et admet un nombre fini de points critiques $y_1, \dots, y_N$. Pour chaque $j \in \{1, \dots, N\}$ il existe $C_j \geq 1$ et $R_j > 0$ et $m_j \in \mathbb{N}, m_j \geq 2$ t.q.

$$\frac{1}{C_j}|y-y_j|^{m_j-1} \leq |\nabla V(y)| \leq C_j |y-y_j|^{m_j-1}, \quad \forall y \in B(y_j, R_j).$$

On définit $m \in \mathbb{N}^*$ par

$$m = \begin{cases} \max(m_1, \dots, m_N) & \text{si } N \geq 1 \\ 1 & \text{si } N = 0 \end{cases}$$

On suppose bien sûr que les rayons R_j sont assez petits pour que les boules $B(y_j, R_j)$ soient 2 à 2 disjointes et incluses dans Ω. L'entier m est le degré maximal de dégénérescence des points critiques de V dans Ω.

Proposition : $(H1)$ & $(H2) \implies (H)$.

Dém : Commençons par le cas des fonctions à moyenne nulle, pour lesquelles on peut montrer l'inégalité plus forte (H'). Supposons aussi que $m \geq 2$, sans quoi il n'y a rien à démontrer.

Si (H') n'est pas vraie, il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $g_n \in H^1(\Omega)$, $\langle g_n \rangle = 0$ t.q. $\|g_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et

$$\|\nabla g_n\|^{1-1/m} \|g_n \nabla V\|^{1/m} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

{ Propriété d'autant plus forte que m est grand !

Par Poincaré-Wirtinger, on a $\|\nabla g_n\| \geq C\|g_n\| = C > 0$, donc

$$\|g_n \nabla V\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Ainsi g_n se concentre asymptotiquement (au sens de la norme L^2) près des points critiques de V.

Mais près du point critique, on peut (après troncature pour obtenir une fonction dans $H^1_0(B(y_j, R_j))$) utiliser le lemme avec $\ell = m_j - 1$ pour obtenir une estimation de la forme

$$\|g_n\|_{L^2(B(y_j,R_j/2))} \leq C\big(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{dû à la} \\ \text{troncature}}}{1} + \|\nabla g_n\|_{L^2(B(y_j,R_j))}^{\frac{m_j-1}{m_j}}\big) \|\underbrace{|y-y_j|^{m_j-1}}_{\leq C_j|\nabla V|} g_n\|_{L^2(B(y_j,R_j))}^{1/m_j} \xrightarrow[n\to\infty]{(m_j\leq m)} 0.$$

$\leftarrow$ hypothèse sur V

On en déduit que la norme L^2 de g_n ne peut pas se concentrer près du point critique Y_j, et ce pour $j = 1, \dots, N$.

On obtient donc pour n grand une contradiction avec l'hypothèse que $\|g_n\| = 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

L'inégalité (H) pour les fonctions $g \in H^1(\Omega)$ à moyenne non nulle se démontre à partir du lemme par un argument similaire, incluant une partition de l'unité pour se ramener au voisinage des points critiques.

<u>Question:</u> Peut-on déduire (H) de (H') par un argument simple ?