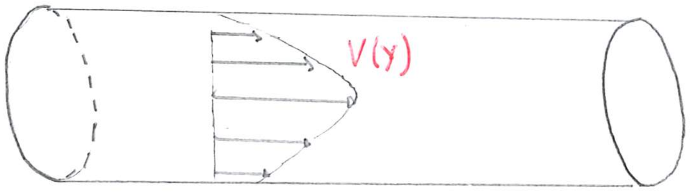
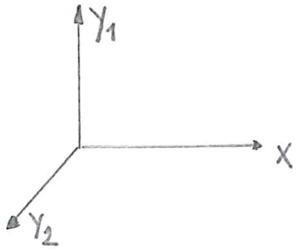
Estimations résolvantes

On montre ici comment obtenir les estimations linéaires pour un scalaire passif en dimension quelconque.





$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ouvert borné régulier, $d \in \mathbb{N}^*$

$V : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ fonction lisse

On considère dans le cylindre $\Sigma = \mathbb{R} \times \Omega \subset \mathbb{R}^{d+1}$ l'éq. de transport-diffusion :

$$\partial_t f(x,y,t) + V(y)\,\partial_x f(x,y,t) = \nu \Delta f(x,y,t) \qquad \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y \in \Omega \\ t > 0 \end{array} \qquad (TD)$$

avec condition de Neumann homogènes sur $\partial\Sigma = \mathbb{R} \times \partial\Omega$.

- Invariance par translation en $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ transf. de Fourier partielle :

$$\hat{f}(k,y,t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y,t)\, e^{-ikx}\, dx \qquad k \in \mathbb{R},\ y \in \Omega,\ t > 0$$

$$\Rightarrow \quad \partial_t \hat{f}(k,y,t) + ikV(y)\,\hat{f}(k,y,t) = \nu(-k^2 + \Delta_y)\,\hat{f}(k,y,t).$$

- Factorisation de la diffusion horizontale :

$$\hat{f}(k,y,t) = e^{-\nu k^2 t}\, g(k,y,t) \qquad (\text{définition de } g)$$

Equation d'évolution pour g :

$$\partial_t g(k,y,t) + ikV(y)\, g(k,y,t) = \nu \Delta_y g(k,y,t) . \qquad (1)$$

Rem : Le générateur de l'évolution $\nu \Delta_y - V(y)\partial_x$ est hypoelliptique.

Déf : $X = L^2(\Omega)$ espace de Hilbert. Pour $\nu > 0$, $k \in \mathbb{R}$, on définit :

$H_{\nu,k} : D(H) \longrightarrow X$ opérateur linéaire

$D(H) = \{ g \in H^2(\Omega) ; \ \partial_n g = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$

$H_{\nu,k}\, g = -\nu \Delta g + ikV(y)\, g \quad \forall g \in D(H).$

Si $k = 0$: $H_{\nu,0} = -\nu\Delta$ est auto-adjoint, positif, à résolvante compacte $\Rightarrow \sigma(H_{\nu,0}) = \{\nu \lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\lambda_n \geq 0$, $\lambda_n \xrightarrow[n \to \infty]{} +\infty$.

On suppose désormais que $k \neq 0$. Alors (par perturbation) $H_{\nu,k}$ est un opérateur sectoriel, à résolvante compacte, et

$$\sigma(H_{\nu,k}) = \{\mu_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} \mathrm{Re}\, \mu_n \geq 0 \\ \mathrm{Re}\, \mu_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty \end{array}$$

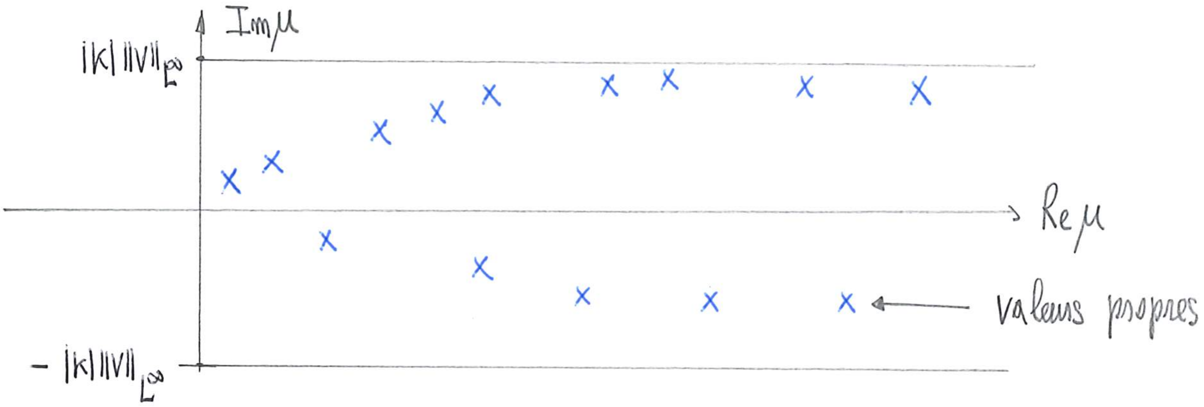
(Les valeurs propres μ_n dépendent évidemment de ν et k.)

En effet ; $\forall g \in D(H)$:

$$\mathrm{Re} \langle H_{\nu,k} g, g \rangle = \langle -\nu \Delta g, g \rangle = \nu \|\nabla g\|^2 \geq 0.$$

Rem : Si $V(y)$ n'est pas constante, alors $g \equiv 1$ n'est pas fonction propre, donc $\nu \|\nabla g\|^2 > 0$ $\forall$ fonction propre $\neq 0$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}(\mu_n) > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Spectre de $H_{\nu,k}$ si $k \neq 0$ et $\nabla V \not\equiv 0$:



Déf :
$$\Psi(\nu,k) = \frac{1}{\sup\limits_{z \in i\mathbb{R}} \|(H_{\nu,k} - z)^{-1}\|} \,.$$
"abscisse pseudo-spectrale"

Pour tout $z \in i\mathbb{R}$, on a :

$$\|(H_{\nu,k} - z)^{-1}\| \geqslant \frac{1}{\mathrm{dist}(z, \sigma(H_{\nu,k}))} \geqslant \frac{1}{|z - \mu_n|} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\Psi(\nu,k)} \geqslant \sup_{z \in i\mathbb{R}} \frac{1}{|z - \mu_n|} = \frac{1}{\mathrm{Re}(\mu_n)} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Re}(\mu_n) \geqslant \Psi(\nu,k) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

L'abscisse pseudo-spectrale $\Psi(\nu,k)$ minore donc la borne inférieure de la partie réelle du spectre. On verra dans le cours 3 que $\Psi(\nu,k)$ permet aussi d'estimer la décroissance du semi-groupe engendré par $-H_{\nu,k}$.

Rem : Sans transport ($V = 0$ ou $V = \text{const.}$) on a :

$$\Psi(\nu,k) = \begin{cases} 0 & \text{(Neumann)} \\ \lambda_1 \nu & \text{(Dirichlet)} \end{cases}.$$

$\uparrow$ 1ère v.p. de $-\Delta$ dans Ω

On souhaite une meilleure borne lorsque $\nu \to 0$ en utilisant le transport, lorsque $\nabla V \not\equiv 0$.

Dans toute la suite, on fixe $\nu > 0$, $k \neq 0$, et on pose

$$\Big\| \; z = ik\lambda \, , \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Ainsi $$H_{\nu,k} - z = -\nu\Delta + ik(V(y) - \lambda) =: H_{\nu,k,\lambda} \, . \quad \Big\|$$

On souhaite étudier la norme de $H_{\nu,k,\lambda}^{-1}$, uniformément en $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarques préliminaires :

- Si $\lambda \notin \overline{\text{Image}(V)}$, alors $|V(y) - \lambda|$ est borné inférieurement, de sorte que $\| H_{\nu,k,\lambda}^{-1} \|$ est majoré uniformément en ν !
  $\Rightarrow$ le cas intéressant est celui où $\lambda \in \overline{\text{Image}(V)}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ on définit l'ensemble de niveau

$$\Big\| \; E_\lambda = \{ y \in \Omega \, ; \; V(y) = \lambda \} \subset \Omega .$$

Si, pour un $\lambda \in \mathbb{R}$, E_λ est d'intérieur non vide, alors en prenant des fonctions g à support dans E_λ on a

$$H_{\nu,k,\lambda} \, g = -\nu \Delta g \, ,$$

de sorte que $\Psi(\nu, k) = O(\nu)$ comme en l'absence de transport.

Ainsi, pour quantifier la présence du transport au niveau de l'abscisse pseudo-spectrale, il faut supposer (a minima) que tous les ensembles de niveau E_λ sont d'intérieur vide. En fait, on supposera que ces ensembles sont minces en un sens que l'on va préciser.

Digression : ensembles H^1-minces

Si $E \subset \mathbb{R}^d$, on note $E_\delta = \{x \in \mathbb{R}^d ; \operatorname{dist}(x,E) < \delta\}$ ($\delta > 0$).

Déf : On dit que $E \subset \mathbb{R}^d$ est **H^1-mince** s'il existe des constantes $C > 0$, $\delta_0 > 0$ t.q. $\forall \delta \in (0, \delta_0)$ $\forall g \in H^1(\mathbb{R}^d)$ on ait :

$$\int_{E_\delta} |g(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 dx + C\delta^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g(x)|^2 dx . \qquad (*)$$

⚠ Je n'ai pas trouvé cette définition dans la littérature, et je n'ai pas su non plus la relier à des notions existantes. A prendre avec précaution !

Remarques : (propriétés laissées en exercice)

1) Quitte à modifier les constantes C et δ_0, on peut remplacer le facteur $1/2$ dans $(*)$ par n'importe quel réel $k \in (0,1)$.

2) Si E est H^1-mince, alors E est d'intérieur vide.
En effet, si $V \subset E$ est un ouvert non vide et $g \in H^1_0(V)$, alors $(*)$ implique
$$\int_E |g(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 dx \leq 2C\delta^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g(x)|^2 dx ,$$
et en prenant la limite $\delta \to 0$ on trouve $g = 0$.

3) Si E est H^1-mince, alors E est de mesure nulle.
En effet, si $0 < |E| < \infty$, on prend $g = g_\varepsilon$ où
$$g_\varepsilon = \mathbb{1}_E * \chi_\varepsilon , \quad \text{où } \chi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$$
(χ_ε est une approximation de l'unité standard).

On a $g_\varepsilon = \mathbb{1}_E * \chi_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{L^2(\mathbb{R}^d)} \mathbb{1}_E$, et par Young:

$$\|\nabla g_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|\mathbb{1}_E * \nabla \chi_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|\mathbb{1}_E\|_{L^1} \|\nabla \chi_\varepsilon\|_{L^2} \leq C|E| \frac{1}{\varepsilon^{d/2+1}}.$$

Ainsi en choisissant par exemple $\delta = \varepsilon^{d+2}$, on trouve en prenant la limite $\varepsilon \to 0$ dans $(*)$:

$$\underset{\substack{\downarrow \\ |E|}}{\int_E |g_\varepsilon|^2 dx} \leq \int_{E_\delta} |g_\varepsilon|^2 dx \leq \underset{\substack{\downarrow \\ \frac{1}{2}|E|}}{\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |g_\varepsilon|^2 dx} + \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{C\delta^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g_\varepsilon|^2 dx}$$

$\Longrightarrow$ $|E| \leq \frac{1}{2}|E|$: contradiction.

4) En prenant $g \in H^1_0(E_\delta)$ dans $(*)$ on trouve que $\|g\|_{L^2} \leq \sqrt{2C}\,\delta\, \|\nabla g\|_{L^2}$: si E est H^1-mince, alors $\forall \delta > 0$ petit on a l'inégalité de Poincaré dans E_δ avec constante $O(\delta)$.

Pour montrer qu'un ensemble donné $E \subset \mathbb{R}^d$ est H^1-mince, on peut utiliser les observations suivantes:

i) Si $E_1 \subset E_2$ et E_2 est H^1-mince, alors E_1 est H^1-mince (évident)

ii) Si E_1, E_2 sont H^1-minces, alors $E_1 \cup E_2$ est H^1-mince (observer que $(E_1 \cup E_2)_\delta = (E_1)_\delta \cup (E_2)_\delta$ et utiliser la remarque 1 ci-dessus).

iii) Les ensembles H^1-minces sont stables par translation et homothétie

iv) $E = \{0\}$ est H^1-mince dans $\mathbb{R}$.

En effet, si $g \in H^1(\mathbb{R})$, on a $\|g\|^2_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^2} \|g'\|_{L^2}$, donc pour tout $\delta > 0$:

$$\int_{E_\delta} |g|^2 dx = \int_{-\delta}^{\delta} |g|^2 dx \leqslant 2\delta \, \|g\|_{L^2} \|g'\|_{L^2}$$
$$\leqslant \frac{1}{2} \|g\|_{L^2}^2 + 2\delta^2 \|g'\|_{L^2}^2 .$$

v) Si $h : \mathbb{R}^{d-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne, alors son graphe $\Gamma = \{ x = (y, h(y)) \; ; \; y \in \mathbb{R}^{d-1} \}$ est H^1-mince.

En effet, notons $M = \mathrm{Lip}(h)$. $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^{d-1}$ $\forall \delta \in \mathbb{R}$ on a

$$|(y_1, h(y_1)+\delta) - (y_2, h(y_2))| = |y_1 - y_2|^2 + |\delta + h(y_1) - h(y_2)|^2$$
$$\geqslant |y_1 - y_2|^2 + (|\delta| - M|y_1 - y_2|)_+^2 \geqslant \frac{\delta^2}{1+M^2}$$

(distinguer les cas selon que $M|y_1-y_2| \leqslant |\delta|$ ou $M|y_1-y_2| \geqslant |\delta|$).

Ainsi $\quad \mathrm{dist}\big((y, h(y)+\delta), \Gamma\big) \geqslant \dfrac{|\delta|}{\sqrt{1+M^2}} \quad \forall y \in \mathbb{R}^{d-1} \; \forall \delta \in \mathbb{R},$

de sorte que $\forall \delta > 0$:

‖ $\Gamma_\delta \subset \tilde{\Gamma}_\delta = \{ x = (y, z) \; ; \; y \in \mathbb{R}^{d-1}, |z - h(y)| < N\delta \}, \quad N = \sqrt{1+M^2}.$

Soit $g \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$. Par le résultat iv), on a $\forall y \in \mathbb{R}^{d-1}$, $\forall \delta > 0$:

$$\int_{h(y)-N\delta}^{h(y)+N\delta} |g(y,z)|^2 dz \leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |g(y,z)|^2 dx + 2N^2\delta^2 \int_{\mathbb{R}} |\partial_z g(y,z)|^2 dz .$$

En intégrant sur $y \in \mathbb{R}^{d-1}$, on obtient

$$\int_{\Gamma_\delta} |g|^2 dy dz \leqslant \int_{\tilde{\Gamma}_\delta} |g|^2 dy dz \leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |g|^2 dy dz + 2N^2\delta^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla g|^2 dy dz$$

$\forall g \in C^1_c(\mathbb{R}^d)$, donc $\forall g \in H^1(\mathbb{R}^d)$ par densité.

Conséquence : toute sous-variété de $\mathbb{R}^d$ de codimension ≥ 1 est H^1-mince. Plus généralement, les ensembles m-rectifiables de $\mathbb{R}^d$ (avec $m \leq d-1$) sont H^1-minces. (A vérifier !)

Exercice : les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont-ils H^1-minces ?

- $E_1 = \mathbb{Z}$
- $E_2 = \left\{ \frac{1}{n} \,;\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$
- $E_3 = \left\{ 2^{-n} \,;\ n \in \mathbb{N} \right\}$

Retour sur les estimations résolvantes

Si $V : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction régulière, on définit :

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble de niveau

$$E_\lambda = \{ y \in \Omega \,;\ V(y) = \lambda \}$$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \delta > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$: l'ensemble de niveau épaissi

$$E^m_{\lambda,\delta} = \{ y \in \Omega \,;\ |V(y) - \lambda| < \delta^m \}$$

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall \delta > 0$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$: le δ-voisinage de l'ensemble de niveau épaissi

$$\mathcal{E}^m_{\lambda,\delta} = \{ y \in \Omega \,;\ \operatorname{dist}(y, E^m_{\lambda,\delta}) < \delta \}$$

dist = distance géodésique dans Ω (= distance euclidienne si Ω convexe)

m = "degré de dégénérescence des points critiques de V" choisi assez grand pour que $E^m_{\lambda,\delta}$ soit "d'épaisseur" $O(\delta)$.

Ex : Si $V(y) = |y|^m$ près de l'origine, alors $\forall \delta > 0$ petit :

$$E^m_{0,\delta} = \{ y \,;\, |y|^m < \delta^m \} = B(0,\delta), \quad \text{alors que}$$

$$E^1_{0,\delta} = \{ y \,;\, |y|^m < \delta \} = B(0,\delta^{1/m}) \quad : \text{trop grand si } m \geq 2 \,!$$

Hypothèse principale sur V : $\exists\, m \in \mathbb{N}^* \ \exists\, C_0 > 0 \ \exists\, \delta_0 > 0$ t.q. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \forall \delta \in (0,\delta_0] \ \forall g \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{E^m_{\lambda,\delta}} |g(y)|^2 dy \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |g(y)|^2 dy + C_0 \delta^2 \int_\Omega |\nabla g(y)|^2 dy. \qquad (H)$$

En particulier, toutes les lignes de niveau E_λ sont H^1-minces dans Ω (mais l'hypothèse est un peu plus forte, puisqu'on considère des lignes de niveau épaissies).

Proposition : On suppose que $V : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ vérifie (H), pour un $m \in \mathbb{N}^*$. Alors $\exists\, C > 0$ t.q. $\forall \nu > 0 \ \forall k \neq 0$:

$$\Psi(\nu,k) = \frac{1}{\sup\limits_{\lambda \in \mathbb{R}} \| H^{-1}_{\nu,k,\lambda} \|} \geq \begin{cases} C\, \nu^{\frac{m}{m+2}} |k|^{\frac{2}{m+2}} & \text{si } \nu \leq |k| \\ C\, \dfrac{k^2}{\nu} & \text{si } |k| \leq \nu \end{cases}$$

- $\nu \leq |k|$: dissipation accélérée (Bedrossian, Coti Zelati, Vicol...)

  À k fixé, $\Psi(\nu,k) \approx \nu^{\frac{m}{m+2}} \gg \nu$ lorsque $\nu \to 0$.

  Couette : $m = 1$; Poiseuille : $m = 2$; etc.

- $|k| \leq \nu$: dispersion de Taylor (Beck, Wayne)

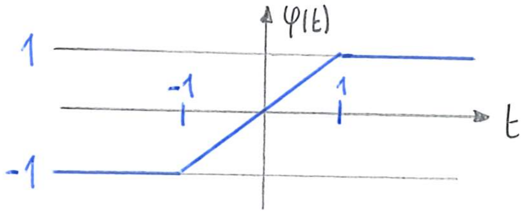
  Constante de diffusion effective : $\nu + \dfrac{C}{\nu}$ pour ν petit.

Dém : On fixe $\nu > 0$, $k \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, et on note

$$H = H_{\nu,k,\lambda} = -\nu\Delta + ik(V(y)-\lambda).$$

Pour $0 < \delta < \delta_0$ (où δ_0 est défini dans l'hypothèse sur V), on définit le multiplicateur $\chi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\chi(y) = \varphi\left(\frac{1}{\delta}\,\mathrm{sign}(V(y)-\lambda)\,\mathrm{dist}(y, E^m_{\lambda,\delta})\right).$$



$$\varphi(t) = \begin{cases} -1 & t \leq -1 \\ t & |t| \leq 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}.$$

Alors :

i) χ est lipschitzienne, $\|\nabla\chi\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{\delta}$

(Noter que $\mathrm{dist}(y, E^m_{\lambda,\delta}) = 0$ au voisinage de tout point où $V(y) = \lambda$.)

ii) $\chi(y)(V(y)-\lambda) \geq 0 \quad \forall y \in \Omega$

iii) $\mathcal{E}^m_{\lambda,\delta} = \{y \in \Omega \,;\, |\chi(y)| < 1\}$.

Intuitivement, χ est une régularisation de "$\mathrm{sign}(V(y)-\lambda)$".

Pour tout $g \in H^1(\Omega)$, on a les estimations fondamentales :

a) $\mathrm{Re}\langle Hg, g\rangle = \nu\|\nabla g\|^2 \Rightarrow \underline{\nu\|\nabla g\|^2 \leq \|Hg\|\,\|g\|}.$

b) $\mathrm{Im}\langle Hg, \chi g\rangle = \nu\,\mathrm{Im}\langle \nabla g, g\nabla\chi\rangle + k\langle (V-\lambda)g, \chi g\rangle$

$$\Rightarrow \underline{|k|\,|\langle \chi(V-\lambda)g, g\rangle|} \leq \|Hg\|\,\|g\| + \frac{\nu}{\delta}\|\nabla g\|\,\|g\|$$

$$\leq \underline{\|Hg\|\,\|g\| + \frac{\nu^{1/2}}{\delta}\|Hg\|^{1/2}\|g\|^{3/2}}$$

En notant $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{m}_{\lambda,\delta}$, on a évidemment :

$$\|g\|^2 = \int_{\Omega\setminus\mathcal{E}} |g(y)|^2 dy + \int_{\mathcal{E}} |g(y)|^2 dy.$$

Estimons ces deux termes :

- Si $y \in \Omega\setminus\mathcal{E}$, alors $y \notin E^{m}_{\lambda,\delta}$ a fortiori, donc $|V(y)-\lambda| \geq \delta^m$.

  Ainsi

$$\int_{\Omega\setminus\mathcal{E}} |g(y)|^2 dy \overset{i)}{\leq} \frac{1}{|k|\,\delta^m} |k| \, |\langle \chi(V-\lambda) g, g\rangle|$$

$$\overset{b)}{\leq} \frac{1}{|k|\,\delta^m}\left(\|Hg\|\,\|g\| + \frac{\nu^{1/2}}{\delta}\|Hg\|^{1/2}\|g\|^{3/2}\right)$$

$$\leq \left(\frac{1}{|k|\,\delta^m} + \frac{\nu}{k^2\delta^{2m+2}}\right)\|Hg\|\,\|g\| + \frac{1}{4}\|g\|^2.$$

  On a utilisé Young :

$$\frac{\nu^{1/2}}{|k|\,\delta^{m+1}}\|Hg\|^{1/2}\|g\|^{1/2} \leq \frac{1}{4}\|g\| + \frac{\nu}{|k|^2\delta^{2m+2}}\|Hg\|.$$

- Si $y \in \mathcal{E} = \mathcal{E}^{m}_{\lambda,\delta}$, on utilise (H) :

$$\int_{\mathcal{E}} |g(y)|^2 dy \leq \frac{1}{2}\|g\|^2 + C_0\delta^2\|\nabla g\|^2 \leq \frac{1}{2}\|g\|^2 + \frac{C_0\delta^2}{\nu}\|Hg\|\,\|g\|.$$

En rassemblant les termes :

$$\frac{1}{4}\|g\|^2 \leq \left(\frac{1}{|k|\,\delta^m} + \frac{\nu}{k^2\delta^{2m+2}} + \frac{C_0\delta^2}{\nu}\right)\|Hg\|\,\|g\|.$$

On choisit à présent :

$$\begin{cases} \delta = \delta_0\left(\dfrac{\nu}{|k|}\right)^{\frac{1}{m+2}} & \text{si } \nu \leq |k| \quad \text{(Dissipation accélérée)} \\ \delta = \delta_0 & \text{si } \nu \geq |k| \quad \text{(Dispersion de Taylor)} \end{cases}$$

On trouve alors :

$$\|Hg\| \geqslant \begin{cases} C\,\nu^{\frac{m}{m+2}}\,|k|^{\frac{2}{m+2}}\,\|g\| & \text{si } \nu \leqslant |k| \\ C\,\dfrac{k^2}{\nu}\,\|g\| & \text{si } |k| \leqslant \nu \end{cases}$$

où $C = C(m, C_0, \delta_0)$. En prenant l'infimum sur $\lambda \in \mathbb{R}$, on trouve le résultat annoncé. □

Il n'est pas évident de caractériser les fonctions V vérifiant l'hypothèse principale ci-dessus, mais on peut aisément formuler des conditions suffisantes. Voici deux exemples.

Cas 1D : $d = 1$, $\Omega = (0, L)$.

On suppose que $V : [0, L] \to \mathbb{R}$ est de classe C^m $(m \in \mathbb{N}^*)$ et que

$$\sum_{j=1}^{m} |V^{(j)}(x)| > 0 \qquad \forall x \in [0, L]$$

(les dérivées jusqu'à l'ordre m ne s'annulent pas simultanément).

Alors V vérifie (H).

Indication : il suffit de montrer que $|\mathcal{E}^m_{\lambda,\delta}| \leqslant C\delta$ pour δ petit.

Fonctions de Morse : on suppose que $V : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ a un nombre fini de points critiques, tous non dégénérés et situés dans Ω.

Alors V vérifie (H) avec $m = 2$ (ou $m=1$ s'il n'y a pas de pts critiques)

Indication : par un argument de localisation + lemme de Morse, il suffit de considérer dans $\mathbb{R}^d$ les modèles suivants :

- $V(y) = y_1$
- $V(y) = |y|^2$
- $V(y) = |y_1|^2 - |y_2|^2$, $\quad y_1 \in \mathbb{R}^{d_1}$, $y_2 \in \mathbb{R}^{d_2}$, $d_1 + d_2 = d$

Hypothèse affaiblie pour la dispersion de Taylor

Lorsque $\nu \geq |k|$, on n'utilise l'hypothèse (H) que pour un $\delta_0 > 0$ *fixé* (et non pour tout $\delta < \delta_0$). Une telle condition est très facile à réaliser.

Lemme : On suppose que v est *lipschitzienne* et *non constante*. Alors il existe $C>0$, $\delta>0$, $k \in (0,1)$ t.q. $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall g \in H^1(\Omega)$:

$$\int_{\mathcal{E}^1_{\lambda,\delta}} |g(y)|^2 dy \leq k \int_\Omega |g(y)|^2 dy + C \int_\Omega |\nabla g(y)|^2 dy. \qquad (H')$$

Dém : Soit $M = \mathrm{Lip}(V)$ et $y_1, y_2 \in \Omega$ t.q. $V(y_2) > V(y_1)$. On note

$$\lambda_0 = \frac{V(y_1)+V(y_2)}{2}, \quad \gamma = \frac{V(y_2)-V(y_1)}{2}.$$

On choisit $\delta > 0$ assez petit pour que $(2M+1)\delta \leq \gamma$ et $B(y_j,\delta) \subset \Omega$, $j=1,2$.

- si $\lambda \leq \lambda_0$, alors $B(y_2,\delta) \subset \Omega \setminus \mathcal{E}^1_{\lambda,\delta}$ $\quad (**)$
- si $\lambda \geq \lambda_0$, alors $B(y_1,\delta) \subset \Omega \setminus \mathcal{E}^1_{\lambda,\delta}$

En effet, si $y \in B(y_2,\delta)$ et $\lambda \leq \lambda_0$,

$$V(y) - \lambda = V(y_2) - \lambda + V(y) - V(y_2) \geq \gamma - M|y-y_2| > \gamma - M\delta \geq (M+1)\delta,$$

alors que si $y \in \mathcal{E}^1_{\lambda,\delta}$ on a bien sûr $V(y) < \lambda + \delta + M\delta < \lambda + (M+1)\delta$.
La seconde affirmation se montre de même.

Si $g \in H^1(\Omega)$, on décompose $g = \langle g \rangle + \tilde{g}$ où $\langle g \rangle = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g \, dy$.

On choisit $\rho > 0$ assez petit pour que

$$(1+\rho)\left(1 - \frac{|B(y,\delta)|}{|\Omega|}\right) =: k < 1.$$

En appliquant les inégalités de Young, puis de Wirtinger, on trouve donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$:

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathcal{E}^1_{\lambda,\delta}} g^2 dy &\leq (1+\rho) \int_{\mathcal{E}^1_{\lambda,\delta}} \langle g \rangle^2 dy + (1+1/\rho) \int_{\mathcal{E}^1_{\lambda,\delta}} \tilde{g}^2 dy \\
&\leq (1+\rho) \frac{|\mathcal{E}^1_{\lambda,\delta}|}{|\Omega|} \int_\Omega \langle g \rangle^2 dy + C_W (1+1/\rho) \int_\Omega |\nabla g|^2 dy \\
&\leq k \int_\Omega g^2 dy + C_W (1+1/\rho) \int_\Omega |\nabla g|^2 dy ,
\end{aligned}
$$

Car $|\mathcal{E}^1_{\lambda,\delta}| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par } (**)}}{\leq} |\Omega| - |B(y,\delta)| = |\Omega| \frac{k}{1+\rho}$ et $\int_\Omega \langle g \rangle^2 dy \leq \int_\Omega g^2 dy$. $\square$