

## Stabilité des écoulements parallèles:

- amortissement non visqueux
- dissipation accélérée
- seuil de stabilité

Thierry Gallay  
(Université Grenoble Alpes)

Obernai, 7 - 11 juin 2021

Développements mathématiques récents sur la stabilité des écoulements parallèles et des tourbillons plans, dans le sillage des travaux de J. Bedrossian et N. Masmoudi (2012-2015) sur l'écoulement de Couette.

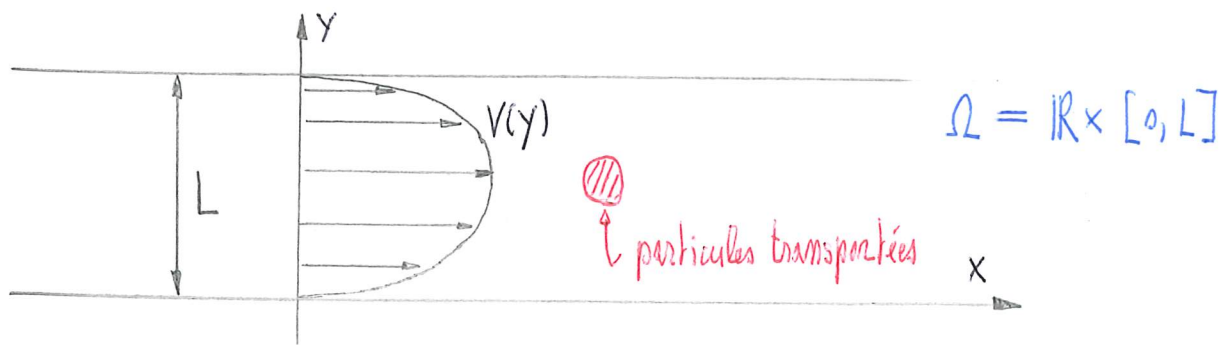
- fluides incompressibles et homogènes
- pas de couches limites ni d'interfaces
- Eq. d'Euler et Navier-Stokes uniquement
- Accent mis sur les estimations linéaires

# Introduction:

1)

## Exemple 1: Scalaire passif

On considère un écoulement parallèle (ou flot de cisaillement) dans le canal  $\Omega = \mathbb{R} \times [0, L]$ :



Vitesse du fluide:  $V(x, y) = \begin{pmatrix} v(y) \\ 0 \end{pmatrix}$ .

- solution stationnaire d'Euler ( $p=0$ )  $\forall$  profil  $v$
- solution stationnaire de NS ( $\nabla p = \text{const.}$ ) si  $v(y) = y(L-y)$ .

Écoulement parallèle: les lignes de courant (= les trajectoires des particules fluides) sont parallèles.

On suppose que le fluide transporte des particules très légères qui ne perturbent pas l'écoulement.

Densité des particules transportées:  $f(x, y, t) \geq 0$ .

Eq. de transport-diffusion:

$$\partial_t f(x, y, t) + v(y) \partial_x f(x, y, t) = \varepsilon \Delta f(x, y, t) \quad (\text{TD})$$

$\varepsilon > 0$ : constante de diffusion  $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$

Equation d'évolution linéaire pour  $f$ , engendrée par :

- opérateurs de transport  $V(y)\partial_x$  : advection par le mouvement moyen du fluide
- opérateurs de diffusion  $\varepsilon \Delta$  : collision avec les molécules du fluide (mvt microscopique désordonné  $\Rightarrow$  mvt Brownien)
- Conditions au bord : p.ex. Neumann homogènes.

L'effet individuel des deux opérateurs est bien compris, mais  $V(y)\partial_x$  et  $\varepsilon \Delta$  ne commutent pas si  $V' \neq 0$ .

En dérivant (TD) on trouve :

$$\begin{cases} \partial_t f_x + V(y)\partial_x f_x = \varepsilon \Delta f_x & \text{(TD)} \\ \partial_t f_y + V(y)\partial_x f_y = \varepsilon \Delta f_y - \underbrace{V'(y) f_x}_{\text{terme de source}} & \text{(TD) + source} \end{cases}$$

Le terme de source permet (a priori) une croissance linéaire en temps de la dérivée "verticale"  $\partial_y f$  pour autant que  $V'(y)\partial_x f \neq 0$ .

$\Rightarrow$  création de petites échelles (= hautes fréquences) dans la direction transverse à l'écoulement

$\Rightarrow$  dissipation accélérée due à la diffusion.

Echelles de temps : (si  $\varepsilon > 0$  petit)

- $V = \text{const}$  : la diffusion agit au temps  $T_\varepsilon \approx \frac{L^2}{\varepsilon} \gg 1$
- $V' \neq 0$  : transport et diffusion agissent au temps  $\tilde{T}_\varepsilon \ll T_\varepsilon$ .

Voilà nous allons dans les cours 2 et 3 comment calculer  $\tilde{T}_\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$  et  $V$ , dans le régime où  $\varepsilon \ll 1$ .

Exemple 2 : Perturbation fluide

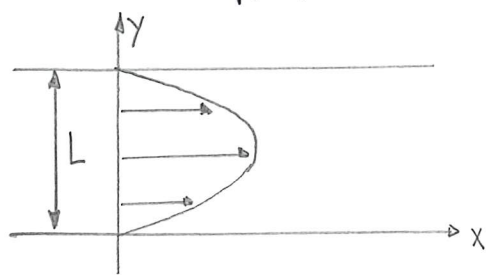
On considère le même écoulement parallèle que précédemment, perturbé cette fois par une goutte de colorant constituée du même fluide.

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla) u = \nu \Delta u - \nabla p \\ \text{div } u = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \nu = 0 : \text{Euler} \\ \nu > 0 : \text{Navier-Stokes} \end{array}$$

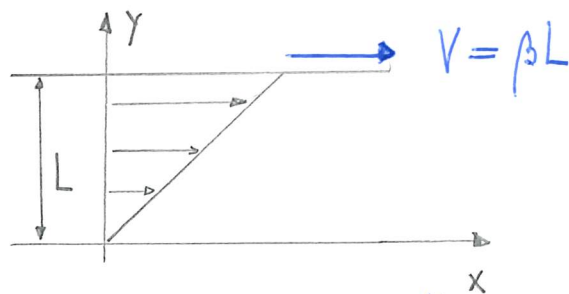
Écoulement stationnaire :  $u = V(y) e_x$

⚠ Si  $\nu > 0$ , il faut que l'écoulement stationnaire vérifie la condition de non-glissement en  $y = 0$  et  $y = L$ .

Deux cas typiques :



$V(y) = y(L-y) : \text{Poiseuille}$



$V(y) = \beta y : \text{Couette}$

Écoulement perturbé :  $u(x,y,t) = V(y) e_x + \tilde{u}(x,y,t)$

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} + V(y) \partial_x \tilde{u} + V'(y) \tilde{u}_2 e_x = \nu \Delta \tilde{u} - \nabla \tilde{p} - \underbrace{(\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{u}}_{\text{non linéaire}} \\ \text{div } \tilde{u} = 0. \end{cases}$$

NS linéarisé  $\neq$  scalaire passif !

Tourbillon (ou vorticité):  $\omega = \partial_x u_y - \partial_y u_x \in \mathbb{R}$

$$\omega(x, y, t) = -V'(y) + \tilde{\omega}(x, y, t)$$

$$\partial_t \tilde{\omega} + V(y) \partial_x \tilde{\omega} - \underbrace{V''(y) \tilde{u}_2}_{\text{non local}} = \nu \Delta \tilde{\omega} - \underbrace{(\tilde{u} \cdot \nabla) \tilde{\omega}}_{\text{non linéaire}}$$

Surtout utile lorsque  $\nu = 0$ , car les conditions au bord s'expriment difficilement en termes de  $\tilde{\omega}$ .

Rem:  $\tilde{\omega}$  est un scalaire passif si  $V'' \equiv 0$  (Couette)  
(bons conditions au bord).

### Considérations historiques

Contrairement au cas du scalaire passif, la stabilité linéaire ou spectrale n'est nullement évidente pour l'équation fluide linéarisée

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{u} + V(y) \partial_x \tilde{u} + V'(y) \tilde{u}_2 e_x = \nu \Delta \tilde{u} - \nabla \tilde{p} \\ \text{div } \tilde{u} = 0 \end{cases} \quad (\text{NSL})$$

\* Rayleigh (1879/1880) Cas  $\nu = 0$ , condition suffisante de stabilité spectrale:  $V''(y)$  ne change pas de signe sur  $[0, L]$ .

Amélioration (Fjørtoft, 1950): stabilité spectrale si  $|V(y)| = |V'(y)|$  ne possède pas de maximum local.

⚠ Il s'agit seulement de conditions suffisantes!

- des exemples montrent qu'elles ne sont pas toujours nécessaires
- on ne connaît pas de condition nécessaire et suffisante!

5)  
\* O. Reynolds (1883) : évidence expérimentale d'instabilité pour des écoulements vérifiant le critère de stabilité de Rayleigh lorsque

$$\Re := \frac{\|v\|_{\infty} L}{\nu} > Re_c \quad (\text{nb. de Reynolds critique, dép. de l'écoulement})$$

⇒ difficulté à comprendre le double rôle (stabilisant et déstabilisant) de la viscosité. ("paradox de Sommerfeld")

\* Kelvin (1887), W. Orr (1907), A. Sommerfeld (1908), G.I. Taylor (1923), W. Heisenberg (1924), W. Tollmien (1929), H. Schlichting (1933), C.C. Lim (1945)... cf. Drazin & Reid (1981).

Etude de l'éq. aux valeurs propres dans le cas visqueux, en particulier lorsque  $\nu \rightarrow 0$ . Controverses et résultats parfois contradictoires.

Résultats: Instabilité à faible viscosité et grande longueur d'onde de "la plupart" des profils de cisaillement vérifiant le critère de stabilité de Rayleigh, dont Poiseuille plan (cf. Annexe)

⚠ Exceptions: Couette plan (Romanov, 1973) est stable spectralement dans tous les régimes, et il semble en être de Poiseuille cylindrique.

\* E. Grenier & T. Nguyen (2016-2021, livre en préparation)

Instabilité des couches limites pour (presque) tous les écoulements parallèles.

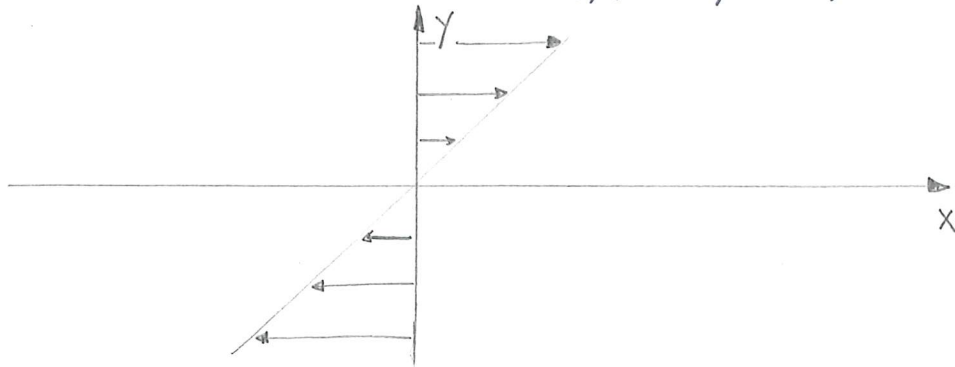
\* Observations expérimentales d'instabilités vis-à-vis de perturbations de taille finie bien en-dessous du seuil de l'instabilité linéaire.  
Amplification transitoire des perturbations due à des phénomènes pseudo-spectraux.

Dans la suite, on ne considère que des écoulements stables où le transport renforce l'effet dissipatif de la diffusion. Pour (NSL), on se place donc dans des domaines sans bord.

6)

Exemple 3: Écoulement de Couette dans  $\mathbb{R}^2$

Écoulement stationnaire:  $u(x,y) = y e_x$ ,  $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ .



Eq. pour la perturbation (tourbillon):

$$\| \partial_t \tilde{\omega}(x,y,t) + y \partial_x \tilde{\omega}(x,y,t) = \nu \Delta \tilde{\omega}(x,y,t).$$

⚠  $\tilde{\omega}$  est un scalaire passif!

Cette équation se résout explicitement  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Kelvin 1887} : \nu = 0 \\ \text{Orn 1907} : \nu > 0 \end{array} \right.$

Transf. de Fourier:

$$\tilde{\omega}(x,y,t) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(kx+my)} \hat{\omega}(k,m,t) dk dm$$

$$\| \partial_t \hat{\omega}(k,m,t) - k \partial_m \hat{\omega}(k,m,t) = -\nu(k^2+m^2) \hat{\omega}(k,m,t).$$

Rem: On peut toujours prendre une transf. de Fourier partielle en  $x$   
 Dans le cas de Couette, on peut aussi prendre une transf. de Fourier en  $y \Rightarrow$  EDP d'ordre 1 pour  $\hat{\omega}$ .

Solution par la méthode des caractéristiques :

7)

$$\hat{\omega}(k, \eta, t) = \hat{\omega}(k, \eta + kt, 0) \exp\left(-\nu \int_0^t (k^2 + (\eta + k\tau)^2) d\tau\right)$$
$$\hat{u}(k, \eta, t) = \frac{\hat{\omega}(k, \eta, t)}{k^2 + \eta^2} \begin{pmatrix} i\eta \\ -ik \end{pmatrix}$$

Observations essentielles: (si  $k \neq 0$ )

i) Cas non visqueux  $\nu = 0$  (Ok aussi si  $y \in [0, L]$ )

Transfert de l'énergie vers les hautes fréquences en la variable  $y$

$$\hat{\omega}(k, \eta, t) = \hat{\omega}(k, \eta + kt, 0).$$

{ Croissance des normes Sobolev  $H_y^s$  si  $s > 0$   
{ Décroissance des normes Sobolev  $H_y^s$  si  $s < 0$

En particulier: amortissement de la vitesse

Ex: on suppose que  $|\hat{\omega}(k, \eta, 0)| \leq \frac{C}{1+k^2+\eta^2}$  (régularité)

Alors:

$$|\hat{u}_x(k, \eta, t)| \leq \frac{C|\eta|}{(k^2 + \eta^2)(1 + k^2 + (\eta + kt)^2)} = O\left(\frac{1}{t}\right) \quad t \rightarrow +\infty$$

$$|\hat{u}_y(k, \eta, t)| \leq \frac{C|k|}{(k^2 + \eta^2)(1 + k^2 + (\eta + kt)^2)} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

En utilisant cet amortissement non visqueux, J. Bedrossian et N. Masmoudi ont pu montrer la stabilité non linéaire de l'écoulement de Couette dans  $\mathbb{R}^2$ , pour des perturbations dans des espaces de Gevrey.



ii) Cas visqueux  $\nu > 0$

On remarque que

$$\frac{1}{t} \int_0^t (k^2 + (\eta + k\tau)^2) d\tau = k^2 + \eta^2 + k\eta t + \frac{1}{3} k^2 t^2$$

$$\geq \frac{1}{8} \left( (k^2 + \eta^2) + \frac{1}{3} k^2 t^2 \right),$$

donc:

$$|\hat{\omega}(k, \eta, t)| \leq |\hat{\omega}(k, \eta + kt, 0)| \exp\left(-\underbrace{\frac{\nu t}{8} (k^2 + \eta^2)}_{\text{diffusion}} - \underbrace{\frac{\nu t}{3} k^2 t^2}_{\text{dissipation accélérée}}\right).$$

Les modes de Fourier correspondant à  $k \neq 0$  sont amortis rapidement:

- la diffusion ordinaire agit quand  $\nu t (k^2 + \eta^2) \gg 1$ ,  $t \approx \frac{1}{\nu(k^2 + \eta^2)}$
- la dissipation accélérée agit quand  $\nu k^2 t^3 \gg 1$ ,  $t \approx \frac{1}{(\nu k^2)^{1/3}}$ .

L'exemple de l'écoulement de Couette dans  $\mathbb{R}^2$  est instructif, mais particulier à bien des égards:

- La vorticité est un scalaire passif. Pour tout autre écoulement, l'opérateur linéarisé  $V(y) \partial_x \tilde{\omega} - V''(y) \tilde{u}_2$  contient un terme non local qui complique sérieusement l'analyse, et peut occasionner des phénomènes nouveaux même lorsque  $\nu = 0$  (déplétion de la vorticité, Bouchet et Morita 2010).
- Dans le cas visqueux, la décroissance du semi-groupe en  $O(e^{-\nu k^2 t^3})$  est tout-à-fait exceptionnelle! Pour un autre profil monotone, on s'attend à trouver  $O(e^{-c \nu^{1/3} k^{2/3} t})$ .

- 9)
- L'écoulement de Couette est monotone:  $V'(y) > 0$ .
- Pour des écoulements non monotones, l'effet de dissipation accélérée est amoindri, cf. cours 2.

## Cadre général pour l'étude des problèmes non linéaires

Soit  $H$  un espace de Hilbert,

- $L: D(L) \rightarrow H$  un opérateur linéaire auto-adjoint négatif
- $\Lambda: D(\Lambda) \rightarrow H$  un opérateur linéaire antisymétrique, et relativement borné par rapport à  $L$ :

$$D(\Lambda) \supset D(L) \text{ et } \|\Lambda f\| \leq C(\|f\| + \|L f\|) \quad \forall f \in D(L).$$

- $N: H \rightarrow H$  une application "quadratique au voisinage de l'origine".

On considère l'équation d'évolution

$$\| \partial_t f + \Lambda f = \varepsilon L f + N(f) \quad (E)$$

avec donnée initiale  $f_0 \in H$ , où  $\varepsilon > 0$  est un petit paramètre.

$$\left. \begin{array}{l} \Lambda: \text{opérateurs de transport} \\ L: \text{opérateurs de diffusion} \\ N: \text{termes non linéaires} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Lambda = V(y) \partial_x \\ L = \Delta \\ N = 0 \end{array} \Rightarrow \text{scalaire passif}$$

Ce cadre général inclut:

- l'exemple 1 (scalaire passif)
- l'équation de Navier-Stokes linéarisée, dans un domaine sans bord.

mais n'inclut pas

- les écoulements parallèles dans les domaines à bord.  
( $\Lambda$  non antisymétrique!)

Hypothèses linéaires:

L'opérateur  $\varepsilon L - \Lambda : \mathcal{D}(L) \rightarrow H$  est dissipatif:

$$\operatorname{Re} \langle (\varepsilon L - \Lambda)f, f \rangle = \varepsilon \operatorname{Re} \langle Lf, f \rangle \leq 0 \quad \forall f \in \mathcal{D}(L).$$

On suppose de plus que  $\varepsilon L - \Lambda$  est maximal dissipatif:

$$\lambda I - \varepsilon L + \Lambda \text{ inversible } \forall \lambda > 0$$

(automatique dans bien des cas, p.ex. si  $\Lambda$  rel. compact par rapport à  $L$ ).

$\implies$  (Lumer-Phillips):  $\varepsilon L - \Lambda$  engendre un semi-groupe  $C_0$  de contractions dans  $H$ . (H0)

$$S_\varepsilon(t) = e^{t(\varepsilon L - \Lambda)}, \quad \|S_\varepsilon(t)f\| \leq \|f\| \quad \forall t \geq 0 \quad \forall f \in H.$$

Dissipation accélérée: on suppose que

$$\| \| S_\varepsilon(t)f \| \leq C_\varepsilon e^{-\gamma_\varepsilon t} \| f \| \quad \forall t \geq 0 \quad (H1)$$

où  $C_\varepsilon \geq 1$  et  $\gamma_\varepsilon > 0$  sont des constantes. Typiquement:

- $\gamma_\varepsilon \approx \varepsilon^\alpha \quad (0 < \alpha < 1)$        $\alpha = 1$ : diffusion normale
- $C_\varepsilon \approx \varepsilon^{-\beta} \quad (\beta > 0)$

Hypothèses non linéaires: pour simplifier, on suppose que

$N: H \rightarrow H$  est localement lipschitzienne et vérifie

$$\|N(f)\| \leq C_N \|f\|^2 \quad \forall f \in H \quad (H2)$$

⚠ Pas réaliste en mécanique des fluides (la non-linéarité contient des dérivées!)

Proposition: On suppose  $H_0, H_1, H_2$ . Alors il existe  $k > 0$  t.q.

$\forall \varepsilon \in (0, 1]$   $\forall$  donnée initiale  $f_0 \in H$  t.q.

$$\|f_0\| \leq \frac{K \chi_\varepsilon}{1 + \log C_\varepsilon} \quad (\text{seuil de stabilité}) \quad (*)$$

l'éq. (E) possède une solution globale unique, qui vérifie:

$$\|f(t)\| \leq G \|f_0\| \exp\left(-\frac{\chi_\varepsilon t}{1 + \log C_\varepsilon}\right) \quad \forall t \geq 0. \quad (**)$$

La quantité  $\frac{\chi_\varepsilon}{1 + \log C_\varepsilon}$  minimise donc à la fois:

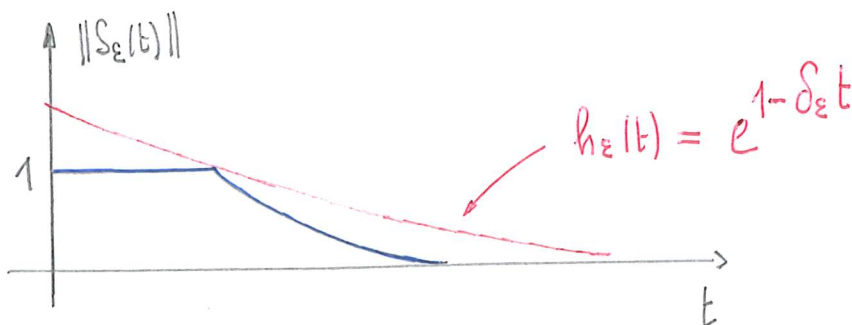
- la taille du bassin d'attraction local, cf. (\*)
- le taux de décroissance exponentielle des solutions, cf. (\*\*)

Si  $\chi_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) et  $C_\varepsilon = \varepsilon^{-\beta}$  ( $\beta > 0$ ), le bassin d'attraction local est (au moins) de taille  $\varepsilon^\alpha (\log \varepsilon)^{-1}$ , ce qui est bien supérieur à ce que l'on pourrait montrer avec la diffusion seule ( $\alpha = 1$ ).

Dém. de (\*\*): On part de l'équation intégrale

$$f(t) = S_\varepsilon(t) f_0 + \int_0^t S_\varepsilon(t-s) N(f(s)) ds, \quad t \geq 0.$$

Par  $H_0, H_1$ :  $\|S_\varepsilon(t)\| \leq \min(1, C_\varepsilon e^{-\chi_\varepsilon t})$ .



On note  $\delta_\varepsilon = \frac{\gamma_\varepsilon}{1 + \log C_\varepsilon}$  et on observe que

$$\|S_\varepsilon(t)\| \leq \min(1, C_\varepsilon e^{-\gamma_\varepsilon t}) \leq e^{-\delta_\varepsilon t} =: h_\varepsilon(t).$$

Ainsi, par H2:

$$\left[ \|f(t)\| \leq h_\varepsilon(t) \|f_0\| + \int_0^t h_\varepsilon(t-s) C_N \|f(s)\|^2 ds. \right.$$

Soit

$$T = \sup \left\{ t > 0; \|f(s)\| \leq 2 h_\varepsilon(s) \|f_0\| \quad \forall s \in [0, t] \right\}.$$

Si  $t < T$ , on a:

$$\|f(t)\| \leq h_\varepsilon(t) \|f_0\| + 4C_N \|f_0\|^2 \underbrace{\int_0^t h_\varepsilon(t-s) h_\varepsilon(s)^2 ds}_{< \frac{e^2}{\delta_\varepsilon} h_\varepsilon(t)}$$

$$< h_\varepsilon(t) \|f_0\| \left( 1 + \frac{\|f_0\|}{k \delta_\varepsilon} \right), \quad \frac{1}{k} = 4C_N e^2.$$

Ainsi, si  $\|f_0\| \leq k \delta_\varepsilon$  (\*), on a  $T = +\infty$  et  $\forall t \geq 0$ :

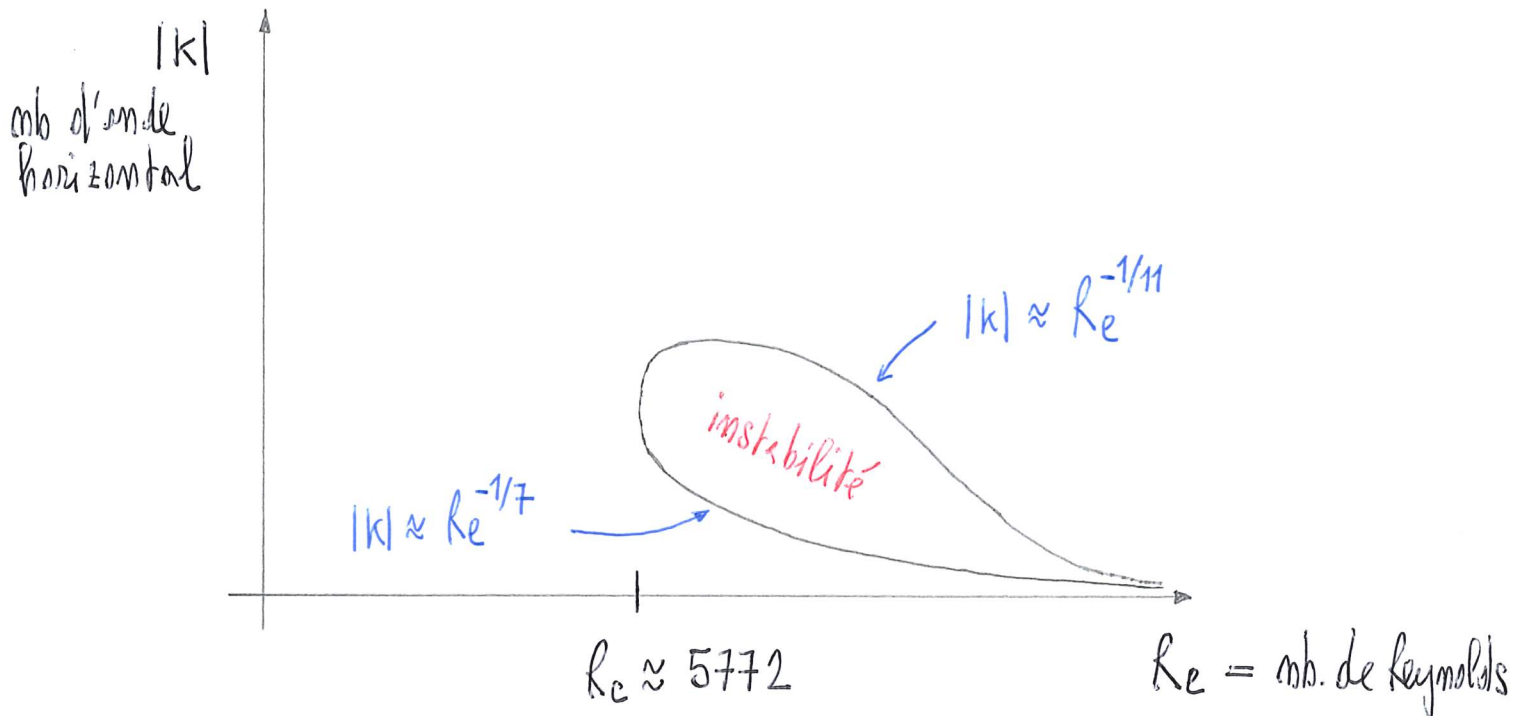
$$\|f(t)\| \leq 2 h_\varepsilon(t) \|f_0\| \leq \underbrace{2e}_{\leq 6} e^{-\delta_\varepsilon t} \|f_0\|. \quad \square$$

Rem: La proposition ci-dessus n'est intéressante que si

$$\gamma_\varepsilon \gg \varepsilon \quad \text{et} \quad \log C_\varepsilon \ll \frac{\gamma_\varepsilon}{\varepsilon} !$$

(Sinon on n'améliore pas ce que l'on aurait obtenu en n'utilisant pas la dissipation accélérée due au transport.)

Annexe : domaine d'instabilité pour l'écoulement  
de Poiseuille plan ( $v(y) = y(L-y)$ )



Rem:  $\forall |k| > 0$  on a stabilité (spectrale) si  $Re$  est  
suff. grand.