Corps des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte

Loïs Faisant

Mars 2019

Résumé

Étant donnée X une surface de Riemann compacte connexe, il existe des fonctions méromorphes non constantes sur X et celles-ci forment un corps. Mieux, elles forment un corps de fonctions algébriques à une variable, ce que nous montrons dans la première partie. Nous montrons dans une seconde partie qu'à l'inverse toute corps de fonctions algébriques d'une variable est identifiable au corps des fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte connexe, dont les points sont les anneaux des valuations discrètes du corps de départ. Cela prouve ainsi le caractère intrinsèquement algébrique des surfaces de Riemann compactes.

Table des matières

1 Corps $\mathcal{M}(X)$ des fonctions méromorphes

Considérons X une surface de Riemann compacte connexe, et notons $\mathcal{M}(X)$ le corps des fonctions méromorphes sur X : il s'agit d'une extension sur $\mathbb{C}$, et notre but est de montrer qu'elle est algébrique de degré de transcendance 1. Plus précisément, nous allons montrer qu'étant donné $f \in \mathcal{M}(X)$ non constante, $\mathcal{M}(X)$ est une extension finie de $\mathbb{C}(f)$. Pour cela, nous introduisons les notions de valuation discrète et d'anneau associé. On suit la présentation donnée dans [2] qui s'appuie notamment sur [1].

1.1 Préliminaires : valuations discrètes

Étant donnée une fonction méromorphe f sur X, z une coordonnée locale associée à $p \in X$, on sait qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ telle que $z^k f(z)$ est bornée au voisinage de 0. Prenant k minimal, on définit naturellement l'ordre de f en p. Cette définition est un cas particulier de valuation discrète sur une extension de $\mathbb{C}$.

Deux points de vue équivalents sont possibles pour aborder les valuations discrètes. Le premier est celui de la définition d'une application (Définition 1.1), le second considère des anneaux vérifiant des axiomes particuliers (Proposition 1.5, prise comme point de départ dans [1]). Nous présentons ces deux définitions en parallèle en suivant [2].

Définition 1.1. Soit K une extension de $\mathbb{C}$. On appelle valuation discrète sur K toute fonction $v : K \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}$ telle que pour tout éléments $f, g \in K$ on ait
— $v(fg) = v(f) + v(g)$
— $v(f+g) \geq \min(v(f), v(g))$
On étend de plus v à K tout entier en posant $v(0) = \infty$.

Remarque 1.2. Soit v une valaution et $c \in \mathbb{C}^*$. Supposons par l'absurde que $v(c) = n \neq 0$. Soit $d \in \mathbb{C}$ tel que $d^{n+1} = c$. Alors $v(d^{n+1}) = (n+1)v(d) = n$, absurde car $v(d) \in \mathbb{Z}$. Donc $v(c) = 0$. Ainsi $v(\mathbb{C}^*) = 0$.

Proposition 1.3 (Anneau de valuation discrète)**.** *Soit $K/\mathbb{C}$ et v une valuation discrète sur K. L'ensemble*

$$R = \{f \in K \mid v(f) \geq 0\}$$

est un sous-anneau intègre de K, appelé anneau de valuation discrète associé à v. Il possède un unique idéal maximal

$$I = \{f \in K \mid v(f) > 0\}$$

De plus, I est principal et tout élément de R de valuation égale à 1 l'engendre.

Démonstration. $0 \in R$ par définition de $v(0)$. $v(1) = v(1) + v(1)$ donc $v(1) = 0$ et $1 \in R$.

Soient $f, g \in R$. On remarque que $0 = v(1) = v(-1) + v(-1)$ donc $v(-1) = 0$.

$$v(fg) = v(f) + v(g) \geq 0$$
$$v(f+g) = \min(v(f), v(g)) \geq 0$$
$$v(-f) = v(-1) + v(f) \geq 0$$

donc $fg \in R$ et $f + g \in R$. De plus, K est un corps donc R est intègre.

I est également stable par addition d'après ce qui précède, et contient 0. Soient $f \in I$ et $g \in R$.

$$v(fg) = v(f) + v(g) > 0$$

donc I est un idéal de R.

Montrons que I est principal. Soit $t \in I$ tel que $v(t) = 1$. Pour $g \in I$, $g = \frac{g}{t}t$ et $v\left(\frac{g}{t}\right) = v(g) - v(t) \geq 0$ donc $g/t \in R$ et $g \in (t)$. Par conséquent $I = (t)$.

Montrons enfin que I est maximal. Soit $g \in R \setminus I$. Alors $v(g) = 0 = -v\left(\frac{1}{g}\right)$ donc $\frac{1}{g} \in R$. Par conséquent $g \in R^\times$ et R/I est un corps. Si J est un autre idéal maximal de R, supposons que $I \neq J$ et donnons nous $g \in J \setminus I$ (non vide par hypothèse). Alors $g \in R \setminus I$ est un inversible de R et donc J contient un inversible de R donc $J = R$. Donc I est bien le seul idéal maximal de R. □

Proposition 1.4. *Pour tout $f, g \in K$, $v(f) < v(g) \Rightarrow v(f+g) = v(f)$*

Démonstration. $v(g/f) = v(g) - v(f) > 0$ donc $g/f \in I$. Supposons par l'absurde que $v(f+g) > v(f)$. Alors $v(1+g/f) = v(f+g) - v(f) > 0$ et donc $1 + g/f \in I$. Mais $g/f \in I$ donc $1 \in I$, absurde. □

Proposition 1.5 (Caractérisation des anneaux de valuation discrète)**.** *Soit K un corps de fonctions algébriques d'une variable sur $\mathbb{C}$. Soit R un sous-anneau strict de K contenant $\mathbb{C}$ et tel que*

$$\forall\, f \in K\ f \notin R \Rightarrow 1/f \in R.$$

Alors R est un anneau de valuation discrète : il possède un unique idéal maximal I, qui est de plus principal.

Démonstration. On peut déjà montrer que R contient un unique idéal maximal en considérant $I = R \setminus R^\times$. Montrons qu'il s'agit d'un idéal de R. Soient $x, y \in I$. Si x ou y est nul, on a bien $x - y \notin R^\times$. Sinon, x/y ou y/x est dans R, par exemple x/y. Dans ce cas,

$$x - y = y\left(\frac{x}{y} - 1\right) \notin R^\times$$

donc I forme un sous-groupe de $(R, +)$. C'est de plus un idéal : si $x \in I$ et $z \in R$ alors zx n'est pas inversible, car sinon x le serait également.

Si J est un autre idéal de R contenant strictement I, J contient inévitablement un inversible de R et donc égale R. Ainsi I est un idéal maximal de R, et ce dernier argument assure que c'est le seul. La preuve du caractère principal de I est à retrouver dans [1]. □

Remarque 1.6. Dans la partie traitée de la preuve ci-dessus, on n'a pas utilisé que $K/\mathbb{C}$ était un corps de fonctions algébriques d'une variable sur $\mathbb{C}$, spécificité qui fournit I principal. Dès lors, à un anneau de valuation R définit comme ci-dessus, d'idéal maximal I principal, correspond une valuation discrète de la façon suivante :

— si $f \in R$, alors $f = gt^k$ avec $t \in I$ et $g \notin I$ alors $v(f) := k$;

— si $f \notin R$ alors $v(f) := -v(1/f)$.

On vérifie aisément que cette définition vérifie les axiomes de la définition 1.1.

Proposition 1.7. *Soit $K/\mathbb{C}$ et R un anneau de valuation discrète et I son idéal maximal associé. Alors $\mathbb{C} \subset R$.*

Démonstration. C'est une reformulation de la remarque 1.2. □

Proposition 1.8. *Soit $K/\mathbb{C}$ et v une valuation discrète sur K. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t, a_1, ..., a_{n-1} \in K$ tels que*

$$t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0 = 0.$$

Supposons que $v(t) < 0$. Alors $v(a_i) < 0$ pour un certain $i \in \{0, ..., n-1\}$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $v(a_i) \geq 0$ pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$. On a alors $v(a_i t^i) = v(a_i) + v(t^i) > v(t^n)$ pour tout i et donc

$$v(t^n + a_{n-1}t^{n-1} + ... + a_1 t + a_0) = v(t^n) \neq 0$$

□

Nous allons à présent voir que les éléments de valuation égale à 1, en plus de générer l'idéal maximal de l'anneau de valuation discrète, donnent la valuation sur toutes les fractions rationnelles correctement factorisées.

Proposition 1.9. *Soit $K/\mathbb{C}$ et v une valuation discrète sur K. Soit $z \in K$ tel que $v(z) = 1$. Supposons que $z^k \frac{r(z)}{s(z)}$ est une fraction rationnelle en z, avec k un entier et $z \nmid r(z)$ et $z \nmid s(z)$. Alors $k = v\left(z^k \frac{r(z)}{s(z)}\right)$.*

Démonstration. $v(z) = 1$ donc $z \in I$ mais $z \notin \mathbb{C}$ puisque l'on a vu que $\mathbb{C} \subset v^{-1}(\{0\})$. Soient $a_0, a_1, ..., a_n$, $b_0, b_1, ..., b_m$ des complexes tels que $r(z) = a_0 \prod_i (z - a_i)$ et $s(z) = b_0 \prod_j (z - b_j)$. On a $v(z - a_i) = v(a_i) = 0$ et $v(z - b_j) = v(b_j) = 0$ pour tout i, j. Donc $v(\frac{r(z)}{s(z)}) = 0$ et $v(z^k \frac{r(z)}{s(z)}) = v(z^k) = kv(z) = k$. $\square$

Proposition 1.10. *Soit K un corps de fonctions algébriques à une variable sur $\mathbb{C}$. Soit R un anneau de valuation discrète et I son idéal maximal associé. Alors $\mathbb{C} \subset R$ et la composée $\mathbb{C} \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/I$ de l'inclusion et de la surjection canonique est un isomorphisme.*

Démonstration. Montrons que R/I est une extension algébrique de $\mathbb{C}$, ce qui fournira $R/I \cong \mathbb{C}$. Soit f transcendant tel que$I = (f)$ et $g \in R \setminus \mathbb{C}$; $g$est algébrique sur $\mathbb{C}(t)$ et il existe un entier naturel n et $r_0(f), ..., r_{n-1}(f)$ des fractions rationnelles telles que

$$g^n + r_{n-1}(t)g^{n-1} + ... + r_1(t)g + r_0(t) = 0$$

ce qui se réécrit en factorisant par t les fractions r_i

$$g^n + ... + t^{k_i} \frac{p_i(t)}{q_i(t)} q_i + ... + t^{k_0} \frac{p_0(t)}{q_0(t)} = 0$$

où t ne divise pas les polynômes p_i, q_i. Posons $k = \min\{k_0, ..., k_n\}$ et considérons deux cas.

- si $k > 0$ alors $r_i \in I$ pour tout i et g algébrique sur I, par conséquent $g + I$ est algébrique sur $\mathbb{C}$;
- si $k \leq 0$ alors

  $$t^{-k+1}(g^n + r_{n-1}(t)g^{n-1} + ... + r_0(t)) = 0$$

  et $t^{-k+1} r_i(t) \in I$ pour tout i et par conséquent $g + I$ est algébrique sur $\mathbb{C}$.

Par conséquent, $R/I \cong \mathbb{C}$.

En corollaire, étant donné $r \in R$, il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $r + I = c + I$ et donc $r - c \in I$.

Nous montrerons plus loin (proposition 1.12) qu'il n'y a pas d'autres valuations discrètes que l'exemple de départ de ce paragraphe : toute valuation discrète sur son corps de fonctions méromorphes sur une surface de Riemann compacte est donnée par un point de celle-ci. $\square$

1.2 Corps de fonction à une variable

L'objectif de cette section est de prouver le théorème suivant, premier résultat important de ce rapport.

Théorème 1.11. *Soit X une surface de Riemann compacte connexe. Soit $z \in \mathcal{M}(X)$ une fonction méromorphe non-constante sur X, de degré n en zéro. Alors $\mathcal{M}(X)$ est une extension algébrique de $\mathbb{C}(z)$, de degré fini égal à n.*

Démonstration. Soit z une fonction méromorphe sur X. Posons $n = \deg((z)_0) = \sum_{p \in z^{-1}(\{0\})} \deg_p(z)$, la dernière égalité étant prise comme définition. Soit h une fonction méromorphe non constante. Notre but est de montrer que h satisfait une équation polynomiale dans $\mathbb{C}(z)$. Notons X_0 l'ensemble X privé de l'ensemble (fini) des pôles et zéros de dz, et $\mathbb{C}_0$ son image par z. Observons l'application

$$q \in \hat{\mathbb{C}} \longmapsto \sum_{p \in z^{-1}(q)} \deg_p(z).$$

Elle est continue, à valeurs entières, et localement constante, or $\hat{\mathbb{C}}$ est connexe, donc elle se doit d'être constante, égale à $\sum_{p\in z^{-1}(0)} \deg_p(z) = n$. Considérons sa restriction à $\mathbb{C}_0$: si $z(p) = q \in \mathbb{C}_0$, alors $\deg_p z < 2$ car sinon p est un zéro de dz. De là on en déduit que le cardinal de $z^{-1}(q)$ est n pour tout $q \in \mathbb{C}_0$.

Soit p_0 un point de X_0 et $\zeta_0 = z(p_0)$. D'après ce qui précède, soient $p_0 = p_1, p_2, ..., p_n$ distincts dans X_0 tels que $z(p_i) = \zeta_0$. Étant donné que les p_i ne sont ni des zéros de dz, ni des pôles de z (sinon ils seraient aussi des pôles de dz), on dispose de $U_1, ..., U_n$ des voisinages de ces points tels que $U_i \xrightarrow{z} z(U_i)$ est un biholomorphisme, dont on note f_i la réciproque. On souhaite que h soit annulée par un certain polynôme de $\mathbb{C}(z)[X]$ dont les coefficients vont donc être naturellement choisis comme des fonctions symétriques en h. Ainsi, on définit localement des fonctions $g_1, ..., g_n$ en posant pour $\zeta \in \cap z(U_i)$

$$\begin{aligned}
g_1(\zeta) = &\quad -(h(f_1(\zeta)) + ... + h(f_n(\zeta)) \\
g_2(\zeta) = &\quad (-1)^2 \sum_{i<j} h(f_i(\zeta))h(f_j(\zeta)) \\
... & \\
g_n(\zeta) = &\quad (-1)^n h(f_1(\zeta))...h(f_n(\zeta))
\end{aligned}$$

Ces fonctions sont localement méromorphes, comme sommes et produits des f_i, fonctions holomorphes, composées à gauche par h, méromorphe sur X. L'ordre des f_i n'importe pas, et on a en fait définit les g_i sur tout $\mathbb{C}_0$ et à valeurs dans $\hat{\mathbb{C}}$. Il reste à régler le sort des points de $X \setminus X_0$ afin d'étendre les g_i sur X tout entier.

Soit $p \in X \setminus X_0$. Supposons que dz est d'ordre $k - 1 > 0$ en p pour un certain entier k. Alors z est k vers 1 sur un voisinage U de p. Posons $\zeta_0 = z(p_0)$; quel que soit $\zeta \neq \zeta_0$ dans $z(U)$ il existe exactement k points $q_1, ..., q_k$ distincts dans U tels que $z(q_i) = \zeta$. h étant méromorphe, pour q_i proche de p_0, $h(q_i)$ sera dans un voisinage proche de $h(p_0)$.

$$h(z^{-1}(\zeta)) = h(f_j(\zeta)) \qquad \text{(pour un certain } j\text{)}$$

Par conséquent

$$g_i(\zeta) \xrightarrow[\zeta\to\zeta_0\in\hat{\mathbb{C}}\setminus\mathbb{C}_0]{} \mathrm{sym}(h(p_0)) = g_i(\zeta_0)$$

et $g_i(\zeta)$ est continue en ζ_0. De façon similaire, on règle le cas des points d'ordre $\mathrm{ord}_p dz$ strictement négatif.

On a ainsi définit g_i des fonctions méromorphes sur la sphère de Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. Or on connaît bien leur forme : ce sont des fonctions rationnelles. On a donc

$$g_i(\zeta) = \frac{r_i(\zeta)}{s_i(\zeta)}$$

et $g_i(z)$ est une fraction rationnelle en z, méromorphe de X vers $\hat{\mathbb{C}}$.

Tout a été fait pour que h vérifie

$$h^n + g_1(z)h^{n-1} + ... + g_{n-1}h + g_n = 0$$

puisqu'en tout point de X_0, la fonction

$$(h - h(f_1(z)))(h - h(f_2(z)))...(h - h(f_n(z)))$$

est nulle, égale $h^n + g_1(z)h^{n-1} + ... + g_{n-1}h + g_n$ laquelle est méromorphe sur X. Elle est donc identiquement nulle sur X. En multipliant

$$Y^n + Y^{n-1}\frac{r_1(X)}{s_1(X)} + ... + Y\frac{r_{n-1}(X)}{s_{n-1}(X)} + \frac{r_n(X)}{s_n(X)}$$

par le ppcm de $s_1, ..., s_n$, on obtient un polynôme $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ de degré n en Y tel que $F(z, h) = 0$.

On a ainsi prouvé que $[\mathbb{C}(z, h) : \mathbb{C}(z)] \leq n$ quel que soit h. Supposons que néanmoins $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(z)] > n$. Si $\mathcal{M}(X)$ est une extension de $\mathbb{C}(z)$ de degré fini, alors le théorème de l'élément primitif fournit $h \in \mathcal{M}(X)$ tel que $\mathcal{M}(X) = \mathbb{C}(z, h)$, absurde! Sinon, si $\mathcal{M}(X)$ est une extension de degré infini, cela signifie que l'on peut trouver des sous-extensions de $\mathbb{C}(z)$ contenues par $\mathcal{M}(X)$, de degré fini arbitrairement grand, en particulier strictement plus grand que n, ce qui fournit une nouvelle contradiction en appliquant le théorème de l'élément primitif. On a donc $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(z)] \leq n$, et nous allons prouver l'égalité.

Supposons que $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(z)] < n$. Soit $p \in X_0$, et $p = p_1, ..., p_n$ les antécédents de $z(p)$ par z. Soit $h \in \mathcal{M}(X)$ prenant des valeurs distinctes en ces points, notées $a_1, ...a_n$. h satisfait une équation polynomiale de degré strictement plus petit que n, qui fournit comme ci-avant un polynôme F de $\mathbb{C}[X, Y]$, non nul, de degré en Y strictement positif et strictement plus petit que n. Mais $F(z(p), Y)$ possède n racines distinctes, ce qui est contradictoire avec son degré. On a donc bien $[\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(z)] = n$. ☐

Dans la continuité de la preuve précédente, on en déduit un résultat annoncé plus haut.

Proposition 1.12. *Soit X une surface de Riemann compacte connexe. Alors toute valuation discrète sur $\mathcal{M}(X)$ est de la forme*

$$f \in \mathcal{M}(X) \mapsto \mathrm{ord}_p f$$

où $p \in X$.

Démonstration. Donnons-nous v une valuation sur $\mathcal{M}(X)$ et f une fonction de valuation 1. Notons $p_1, ..., p_j$ les zéros deux-à-deux distincts de f. Soit $g \in \mathcal{M}(X)$ non constante et $r_1, ..., r_n \in \mathbb{C}(X)$ telles que

$$F(X, Y) = Y^n + r_1(X)Y^{n-1} + ... + r_{n-1}(X)Y + r_n(X) \in (\mathbb{C}(X))[Y]$$

soit un polynôme minimal annulant g. Ainsi

$$g^n + r_1(f)g^{n-1} + ... + r_{n-1}(f)g + r_n(f) = 0$$

et nous allons prouver que g possède un pôle parmi l'un des $p_1, ..., p_j$.

— Si $v(g) < 0$ alors d'après la proposition 1.8 il existe i tel que $v(r_i(f)) < 0$ c'est-à-dire, écrivant $r_i(f) = f^k \frac{a}{b}$ avec f ne divisant pas a et b, d'après 1.9 $k = v(r_i(f)) < 0$ et donc p_i est un pôle de r_i. Mais quitte à prendre les $r_1, ..., r_n$ construites comme dans la preuve précédente, ce sont des fonctions symétriques des $g(p_1), ...g(p_j)$. Si g n'a pas de pôle en les $p_1, ..., p_j$ alors r_i est bien définie en p_i ! Donc g a un pôle en l'un de ces points.
— Si $v(g) > 0$ alors $v(1/g) < 0$ et donc l'argument précédent s'applique à $1/g$.

On a donc montré que si g n'est pas constante, alors g admet un pôle ou un zéros en l'un des $p_1, ..., p_j$.

On admet à présent (corollaire du théorème de Riemann Roch) que l'on peut trouver des fonctions méromorphes $g_1, ..., g_j$ sur X telles que chaque g_i est défini et non nul en les $p_1, ..., p_j$ sauf en p_i, d'ordre de plus 1. Posons

$$h = \frac{f}{g_1^{\mathrm{ord}_{p_1} f} ... g_j^{\mathrm{ord}_{p_i} f}}$$

qui n'a ni zéros ni pôles en les $p_1, ..., p_j$ ce qui implique donc $v(h) = 0$. Par conséquent

$$1 = v(f) = v\left(g_1^{\mathrm{ord}_{p_1} f} ... g_j^{\mathrm{ord}_{p_i} f}\right) = \sum_{i=1}^{j} \underbrace{\mathrm{ord}_{p_i} f}_{\geq 1} \times v(g_i)$$

et donc (quitte à renuméroter) $v(g_1) = 1$ et $v(g_i) = 0$ pour tout $2 \leq i \leq j$. Reprenons en la modifiant légèrement l'idée précédente avec g quelconque et

$$w = \frac{g}{g_1^{\mathrm{ord}_{p_1} g} ... g_j^{\mathrm{ord}_{p_i} g}}$$

qui n'a ni zéros ni pôles en les $p_1, ..., p_j$ donc $0 = v(w)$ et $v(g) = \sum_{i=1}^{j} \mathrm{ord}_{p_i} g \times v(g_i) = \mathrm{ord}_{p_1} g$. Conclusion :

$$v : g \in \mathcal{M}(X) \mapsto \mathrm{ord}_{p_1} g$$

est bien de la forme voulue. □

2 Surface de Riemann compacte associée à un corps de fonctions

À présent, l'objectif est d'établir une certaine réciproque en construisant à partir d'un corps de fonctions algébriques d'une variable, une surface de Riemann associée à celui-ci et dont le corps des fonctions méromorphes s'identifie canoniquement au corps de fonctions de départ.

2.1 Places d'un corps de fonctions algébriques à une variable

Étant donné R un anneau de valuation sur K, on appelle place son unique idéal maximal. On note $\mathcal{S}(K)$ l'ensemble des places de K. Le but est de munir cet ensemble d'une structure de surface de Riemann dont les applications méromorphes sont exactement K . Pour tout $f \in K$, on définit l'application

$$\pi_f : \rho \in \mathcal{S}(K) \longmapsto \begin{cases} f + \rho \in R/\rho \cong \mathbb{C} & f \in R_\rho \\ \infty & f \notin R_\rho \end{cases}$$

et notre premier objectif est de munir $\mathcal{S}(K)$ d'une topologie rendant les π_f continues.

Posons $\mathcal{P} = \prod_{f \in K} \hat{\mathbb{C}}_f$ produit de copies de la sphère de Riemann, et considérons l'application

$$\psi : \rho \in \mathcal{S}(K) \longmapsto (\pi_f(\rho))_{f \in K} \in \mathcal{P}$$

qui est injective : étant donnés $\rho_1 \neq \rho_2 \in \mathcal{S}(K)$, prendre $f \in R_{\rho_1} \setminus R_{\rho_2}$ fournit $f + \rho_1 = \pi_f(\rho_1) \neq \infty = \pi_f(\rho_2)$ et donc $\psi(\rho_1) \neq \psi(\rho_2)$. Notons $\mathcal{S}'$ l'image de $\mathcal{S}(K)$ par ψ. $\mathcal{P}$ étant un produit de compacts, il est compact d'après le théorème de Tychonov, et il suffit de prouver que $\mathcal{S}'$ est fermé dans P. Pour cela, montrons tout d'abord un certain nombre de propriétés de calcul utiles sur l'image d'une place dans $\mathcal{P}$, résumées par la proposition suivante.

Proposition 2.1 (Image de la structure de corps de K)**.** *Soit ρ une place de K. Notons $\psi(\rho) = \{z_f\}_{f \in K}$. Soient $f, g \in K$ tels que $z_f, z_g \neq \infty$.*

$$z_{f-g} = z_f - z_g$$
$$z_{fg} = z_f z_g$$

Si z_f est quelconque,

$$z_{1/f} = \begin{cases} 1/z_f & z_f \neq 0, \infty \\ \infty & z_f = 0 \\ 0 & z_f = \infty \end{cases}$$

Démonstration. $z_f = f + \rho$ et $z_g = g + \rho$ avec $f, g \in R_\rho$ donc $f - g$ et fg sont dans R_ρ avec $z_{f-g} =$

$f-g+\rho = z_f - z_g$ et $z_{fg} = fg+\rho = (f+\rho)(g+\rho) = z_f z_g$. Ensuite, si $z_f \neq 0$ alors

$$\frac{1}{z_f} - \frac{1}{f} = \frac{z_f - f}{f z_f} = \frac{1}{f z_f}\rho \subset \rho$$

donc $1/z_f = 1/f + \rho = z_{1/f}$. Enfin, si $z_f = 0$ alors $f \in \rho$ et $1/f \notin R_\rho$ ce qui donne $z_{1/f} = \infty$; à l'inverse $z_f = \infty$ signifie $f \notin R_\rho$ et implique $1/f \in \rho$ c'est-à-dire $z_{1/f} = 0$. □

À présent nous pouvons montrer facilement que $\mathcal{S}'$ est fermé dans $\mathcal{P}$. Donnons-nous donc $z = \{z_f\}_{f\in K} \in \mathcal{P}$ un point limite de $\mathcal{S}'$. Nous allons montrer qu'il existe une place ρ telle que $\pi_f(\rho) = z_f$ pour tout $f \in K$. Soit $(z^k)_{k\geq 0}$ une suite de $\mathcal{S}'$ tendant vers $z$et $(\rho^k)_{k\geq 0}$ une suite de places telle que $\psi(\rho^k) = z^k$ pour tout $k \geq 0$. Posons

$$R = \{f \in K \mid z_f \neq \infty\}$$

et nous allons montrer que R est un anneau de valuation discrète. Pour cela, montrons que R est un anneau contenant $\mathbb{C}$ vérifiant la proposition 1.5. Soit $c \in \mathbb{C}$, on a bien $\pi_c(\rho^k) = c$ quel que soit k, donc $z_c = \lim z_c^k = c \neq \infty$, ainsi $\mathbb{C} \subset R$. Soient $f, g \in R$.

$$z_f^k - z_g^k = z_{f-g}^k \xrightarrow[k\to\infty]{} z_{f-g}$$

mais $z_f, z_g \neq \infty$ donc $z_f^k, z_g^k \neq \infty$ à partir d'un certain rang, et $z_{f-g} \neq \infty$. La preuve est exactement la même pour fg. Enfin, donnons-nous $f \notin R$, c'est-à-dire $f \in K$ tel que $z_f = \infty$ et à partir d'un certain rang $z_f^k \neq 0$. Ainsi $z_{1/f} = \lim z_{1/f}^k = 0$. Finalement $1/f \in R$.

2.2 Théorèmes généraux

Pour poursuivre la construction, nous aurons besoin de trois théorèmes admis dont les preuves complètes font l'objet d'un développement dans [1].

Théorème 2.2. *Soit K un corps de fonctions algébriques à une variable. Soit $f \in K\backslash\mathbb{C}$ et $n = [K : \mathbb{C}(f)]$. Alors il existe un nombre fini de places $\rho_1, ..., \rho_k$ de K telles que $f \in \rho_i$. De plus,*

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{ord}_{\rho_i} f = n.$$

Théorème 2.3. *Soit K un corps de fonctions algébriques à une variable, soient $\rho_1, ..., \rho_n$ des places distinctes et $\alpha_1, ..., \alpha_n$ des complexes distincts. Alors il existe $f \in K$ tel que*

$$\mathrm{ord}_{\rho_i}(f - \alpha_i) = 1$$

pour tout $i \in \{1, ..., n\}$.

Théorème 2.4. *Soit K un corps de fonctions algébriques à une variable et soient $f, g \in K \setminus \mathbb{C}$. Soit $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ de degré minimal en Y tel que $F(f, g) = 0$. Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $F(\alpha, \beta) = 0$, il existe une place $\rho \in \mathcal{S}(K)$ contenant $f - \alpha$ et $g - \beta$.*

2.3 Structure de Surface de Riemann sur $\mathcal{S}(K)$

Construction de cartes

Montrons à présent que chaque place $\rho \in \mathcal{S}(K)$ possède un voisinage homéomorphe à un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. Plus précisément, si $f \in K$ vérifie $\mathrm{ord}_\rho f = 1$, nous allons montrer qu'il existe un voisinage U de ρ tel que f induit un homéomorphisme de U sur son image dans $\mathbb{C}$. Comment voit-on f comme une telle application ?

L'application π_f définie plus haut est continue sur $\mathcal{S}(K)$ et à valeurs dans $\hat{\mathbb{C}}$. Étant donné que f est d'ordre 1 pour ρ, on se dit donc que π_f est à valeurs dans $R/\rho \cong \mathbb{C}$ sur un voisinage de ρ. On identifiera ainsi f à π_f.

Soit donc $\rho \in \mathcal{S}$ fixé et f d'ordre 1 en ρ, qui existe bien car une valuation discrète est par définition surjective. D'après le théorème 2.2 il existe des places $\rho = \rho_1, ..., \rho_k$ telles que $f \in \rho_i$ pour $i = 1, ..., k$, et notant $e_i = \mathrm{ord}_{\rho_i} f$, telles que

$$n := [K : \mathbb{C}(f)] = e_1 + ... + e_k.$$

Donnons-nous $\beta_1, ..., \beta_k$ des nombres complexes distincts. D'après le théorème 2.3, il existe $g \in K$ telle que $\mathrm{ord}_{\rho_i}(g - \beta_i) = 1$ pour $i = 1, ..., k$. Soit alors $F \in \mathbb{C}[X, Y]$ de degré n en Y tel que $F(f, g) = 0$. Fixons un $i \in \{1, ..., k\}$. De là, comme $f \in \rho_i$ et $g = \underbrace{g - \beta_i}_{\in \rho_i} + \beta_i$ on a l'identité

$$0 + \rho_i = F(f, g) + \rho_i = F(0, \beta_i) + \rho_i$$

dans $R/\rho_i \cong \mathbb{C}$, et donc β_i est racine de $F(0, Y)$. On note m_i sa multiplicité. Montrons que $m_i = e_i$. Remarquons d'abord que

$$\mathrm{ord}_{\rho_i} F(0, g) = \mathrm{ord}_{\rho_i} F(0, \beta_i) = m_i$$

en effet, $F(0, Y)$ s'écrit aussi $(Y - \beta_i)^{m_i} G(Y)$ où $G \in \mathbb{C}[Y]$ et $G(\beta_i) \neq 0$ ce qui donne pour ε petit

$$F(0, \beta_i + \varepsilon) = \varepsilon^{m_i} \underbrace{G(\beta_i + \varepsilon)}_{\text{borné}}$$

et donc $\mathrm{ord}_{\rho_i} F(0, \beta_i) = m_i$. Par conséquent,

$$\mathrm{ord}_{\rho_i}(F(f, g) - F(0, g)) = \mathrm{ord}_{\rho_i} F(0, g) = m_i.$$

Par ailleurs, X divise $F(X, Y) - F(0, Y)$ donc par valuation

$$\mathrm{ord}_{\rho_i}(F(f, g) - F(0, g)) \geq \mathrm{ord}_{\rho_i}(f) = e_i$$

donc $m_i \geq e_i$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$. Or

$$m_1 + ... + m_k \leq n = e_1 + ... + e_k$$

donc finalement $e_i = m_i$ pour tout $i \in \{1, ..., k\}$.

À présent, soient $U_1, ..., U_k$ des voisinages respectivement de $\beta_1, ..., \beta_k$ et deux-à-deux disjoints. L'application qui à $\alpha \in \mathbb{C}$ associe les racines de $F(\alpha, Y)$ étant continue, on dispose d'un $r > 0$ tel que pour tout α de module $|\alpha| \leq r$, $F(\alpha, Y)$ possède exactement e_i racines dans U_i que l'on note $\beta_{1i}, ..., \beta_{e_i i}$. Par ailleurs, le théorème 2.4 nous assure l'existence de places $\rho_{i,j}$ correspondant aux paires $(\alpha, \beta_{i,j})$, et celles contenant $f - \alpha$, en nombre fini, sont exactement celles-ci (car $n = [K : \mathbb{C}(f)]$) . En particulier, $e_1 = 1$ donc il existe un unique $\beta \in U_1$ associé à un α tel que $|\alpha| \leq r$, et chaque telle paire (α, β) correspond à un unique $\rho' \in \mathcal{S}(K)$. On appelle U cet ensemble de places : on a montré qu'il est en bijection avec la boule fermée de rayon r centrée en 0 de $\mathbb{C}$. Cette application est continue, U est fermé dans $\mathcal{S}(K)$ donc compact, donc c'est un homéomorphisme.

Fonction méromorphes sur $\mathcal{S}(K)$

Avant de prouver que l'atlas exhibé ci-avant est holomorphe, tentons de mieux voir comment considérer les éléments de K comme des fonctions méromorphes sur $\mathcal{S}(K)$. Donnons-nous donc ρ_0 une place et $f \in K$ telle que $\mathrm{ord}_{\rho_0} f = 1$ (c'est-à-dire de la forme $f = ht$ où t génère ρ_0 et $h \in R_{\rho_0} \setminus \rho_0$). D'après ce qui précède, f induit une application $U \to V \subset \mathbb{C}$, que l'on note $\rho \mapsto f(\rho)$, qui envoie un voisinage de ρ

sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$. Soit $g \in K$. Cet élément induit une application de U dans $\hat{\mathbb{C}}$ de la façon suivante :

$$g : \rho \mapsto \begin{cases} g + \rho \in R/\rho \cong \mathbb{C} & \text{si } g \in R_\rho \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

et on a donc par composition une fonction de $V \to \hat{\mathbb{C}}$ qui à γ associe $g \circ f^{-1}(\gamma)$. On la note $\hat{g}$ et on souhaite d'abord montrer qu'elle est méromorphe. Soit $F(X, Y)$ un polynôme irréductible tel que $F(f, g) = 0$ sur K. Alors $\frac{dF}{dY}(f, g)$ a un nombre fini de zéros. En effet, F étant irréductible, il définit une courbe plane irréductible C dont les parties algébriques strictes sont finies. Les zéros de $\frac{dF}{dY}(X, Y)$ dans C sont donc en nombre fini, et leurs antécédents par (f, g) le sont aussi. De façon similaire, g possède un nombre fini de pôles, donc il existe un nombre fini de $\gamma \in V$ tels que $\hat{g}(\gamma) = \infty$. Excluant ces points, le théorème des fonctions implicites holomorphe nous assure que $\hat{g}$ est une fonction holomorphe sur V privé des pôles. Étant continue sur tout V, $\hat{g}$ est méromorphe.

Structure de surface de Riemann

Pour terminer, il faut munir $\mathcal{S}(K)$ d'une structure de Riemann. Le rôle de carte est assuré par les éléments d'ordre 1 en ρ. Reprenons f et g comme ci-dessus : comme f génère ρ, on peut écrire $g = f^k h$ où $h \in R_\rho \backslash \rho$ et k est l'ordre de g en ρ. Alors $\hat{g}(\gamma) = g \circ f^{-1}(\gamma) = \gamma^k h(f^{-1}(\gamma))$, où γ est dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, et $h((f^{-1}(0)) = h(\rho) \neq 0$. Donc $\hat{g}$ est une fonction méromorphe d'ordre k en zéro. Ceci prouve que l'ordre de g en ρ égale l'ordre de $\hat{g}$ en 0. En particulier, si g est pris d'ordre 1, $\hat{g}$ est une fonction holomorphe qui induit un biholomorphisme sur un voisinage ouvert de $f(\rho)$ dans $\mathbb{C}$ vers un ouvert de $\mathbb{C}$. En échangeant les rôles de f et g, on conclut que le changement de cartes est bien holomorphe. $\mathcal{S}(K)$ est une surface de Riemann.

3 Comparaison de catégories

Nous avons montré dans la section précédente que $K \subset \mathcal{M}(\mathcal{S}(K))$, montrons à présent qu'il y a égalité. Étant donné $f \in K$ non constante, notons $p_1, ..., p_k$ ses zéros distincts en voyant f comme fonction méromorphe sur $\mathcal{S}(K)$, de multiplicités $e_1, ..., e_k$ et posons $n = e_1 + ... + e_k$. On sait d'après la première section que $[\mathcal{M}(\mathcal{S}(K)) : \mathbb{C}(f)] = n$. Les points p_i correspondent à des places ρ_i telles que $f \in \rho_i$ et $\mathrm{ord}_{\rho_i} f = e_i$. D'après le théorème 2.2 $[K : \mathbb{C}(f)] = e_1 + ... + e_k = n$ et donc par égalité des dimensions comme extensions finies de $\mathbb{C}(f)$,

$$\mathcal{M}(\mathcal{S}(K)) = K.$$

En sens inverse, montrons que $\mathcal{S}(\mathcal{M}(X))$ est canoniquement biholomorphe à X. On sait (théorème 1.12) que les places (c'est-à-dire les valuations discrètes) de $\mathcal{M}(X)$ sont en bijection avec les points de X, ce qui fournit une application

$$\varphi : \rho \in \mathcal{S}(\mathcal{M}(X)) \mapsto p \in X$$

dont il reste à montrer qu'elle est holomorphe. Mais une carte locale centrée en un point $p \in X$ fixé est donnée par une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(X)$ d'ordre 1en p, donc d'ordre 1 pour la valuation de ρ. Autrement dit, exprimée dans le système de coordonnées locales donné par f, l'application φ est l'identité. C'est donc un biholomorphisme et on peut donc identifier

$$\mathcal{S}(\mathcal{M}(X)) = X.$$

À présent, intéressons nous à ce que deviennent les holomorphismes entre surfaces de Riemann compactes lors du passage au corps des fonctions méromorphes par tiré en arrière.

Théorème 3.1. *Soient X et Y des surfaces de Riemann compactes et $\sigma : X \to Y$ une application holomorphe non constante. Alors σ induit un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres*

$$\sigma^* : \begin{cases} \mathcal{M}(Y) & \to & \mathcal{M}(X) \\ g & \mapsto & g \circ \sigma \end{cases}$$

et deux applications holomorphes différentes induisent deux morphismes différents. Réciproquement, si $\tau : \mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$ *un morphisme de* $\mathbb{C}$*-algèbres, il existe* $\sigma : X \to Y$ *holomorphe telle que* $\sigma^* = \tau$.

Démonstration. Si $\sigma \neq \sigma'$ il existe $p \in X$ et $g \in \mathcal{M}(Y)$ tels que $\sigma(p) \neq \sigma'(p)$ et $g(\sigma(p)) \neq g(\sigma'(p))$. On vérifie facilement que σ^* est un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres.

Soit $\tau : \mathcal{M}(Y) \to \mathcal{M}(X)$ un morphisme de $\mathbb{C}$-algèbres. C'est en particulier un morphisme de corps, donc injectif. Voyons X et Y comme les places de $\mathcal{M}(X)$ et $\mathcal{M}(Y)$.

Lemme 3.2. *Étant donné* $\rho \in Y$*, il existe un nombre fini de places* $\rho_1, ..., \rho_k \in X$ *telles que* $\rho \subset \rho_i$*. De plus, si* $\rho' \in X$*, il existe une unique place* $\rho \in Y$ *telle que* $\rho \subset \rho'$*.*

Preuve du lemme. Soit $f \in \mathcal{M}(Y) \overset{\tau}{\hookrightarrow} \mathcal{M}(X)$ non constante telle que $f \in R_\rho$. On déduit du théorème 2.2 que

$$\deg((\tau f)_0) = [\mathcal{M}(X) : \mathbb{C}(f)] = [\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)][\mathcal{M}(Y) : \mathbb{C}(f)] = [\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)] \deg((f)_0)$$

et qu'en particulier, si $f \in \rho$ il existe exactement $[\mathcal{M}(X) : \mathcal{M}(Y)]$ places telles que $\tau f \in \rho_i$ et si $\tau f \in \rho'$, il existe une et une seule place telle que $f \in \rho$. □

On peut donc définir une application

$$\sigma : \begin{cases} X & \to & Y \\ \rho' & \mapsto & \rho \text{ tel que } \rho \subset \rho' \end{cases}$$

et on doit vérifier que $\tau = \sigma^*$. Étant donné $\rho' \in X$, notons $\rho = \sigma(\rho')$ et donnons-nous $g \in \mathcal{M}(Y)$: il faut montrer $\tau g(\rho') = g \circ \sigma(\rho')$. Supposons d'abord que $\tau g \in R_{\rho'}$. Alors $\tau g(\rho') = g + \rho' \neq \infty$ et

$$(g \circ \sigma)(\rho') = g(\rho) = \begin{cases} g + \rho & \text{si } g \in R_\rho \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

— si $g \in R_\rho$ alors $g(\rho) = z + \rho$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $g - z \in \rho \subset \rho'$ donc $\tau g(\rho') = g \circ \sigma(\rho')$

— si $g \notin R_\rho$ alors $1/g \in R_\rho$ et $1/g \in R_{\rho'}$ ce qui est impossible puisque $g \in R_{\rho'}$ par hypothèse.

Dans le cas où $\tau g \notin R_{\rho'}$ c'est-à-dire $\tau g(\rho') = \infty$, supposons $g(\rho) \neq \infty$, mais alors $g(\rho) = z + \rho$ et $g - z \in \rho \overset{\tau}{\hookrightarrow} \rho'$ donc $\tau g \in R_{\rho'}$, absurde. Donc $g(\rho) = \infty$. Finalement $\tau g = g \circ \sigma$.

Reste à vérifier que σ est holomorphe. Mais autour de $\rho = \sigma(\rho') \in Y$, une carte est donnée par un $g \in \mathcal{M}(Y)$ et $g \circ \sigma = \tau g$ méromorphe et définie en ρ' donc holomorphe autour de cette place, ce qui prouve que σ est holomorphe. □

En termes catégoriels, on peut résumer l'ensemble de ce que l'on a démontré jusqu'ici par le théorème suivant.

Théorème 3.3. *La catégorie des surfaces de Riemann compactes connexes, dont les flèches sont les applications holomorphes, est anti-équivalente à la catégorie des extensions finies sur* $\mathbb{C}(t)$*, dont les flèches sont les morphismes de* $\mathbb{C}$*-algèbre.*

Références

[1] C. Chevalley. *Introduction to the Theory of Algebraic Functions of One Variable*. American Mathematical Society. Mathematical surveys. American Mathematical Society, 1951.

[2] P. Turbek. *Topics on Riemann Surfaces and Fuchsian Groups : Compact Riemann surfaces and algebraic function fields*, volume 287 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University, 2001.