De la cohomologie des faisceaux au théorème de De Rham

Loïs Faisant

21 décembre 2018

Résumé

Après une partie d'introduction et de préliminaires sur les faisceaux, ce court mémoire [1] expose des constructions possibles d'une théorie cohomologique des faisceaux en soulignant les similitudes et liens entre elles : faisceaux flasques, de Čech, et théorème de De Rham-Weil. L'étude du théorème de De Rham, lequel fournit un isomorphisme entre la cohomologie de De Rham et la cohomologie singulière, et de deux démonstrations différentes, que la théorie des faisceaux rapproche, fait l'objet de la troisième et dernière partie de ce travail, que conclue une preuve de la dualité de Poincaré.

Table des matières

1. Rédigé dans le cadre de l'Enseignement d'Approfondissement associé au cours de troisième année « Variétés différentielles, fibrés et formes » de S. Boucksom à l'École polytechnique.

1 Préliminaires sur les préfaisceaux et faisceaux

1.1 Définitions et exemples

Dans le début de cette partie, on suit l'approche qu'adopte Demailly dans ses notes [1]. On se donne X un espace topologique, et on donne une première définition « fonctorielle » des préfaisceaux et faisceaux.

Définition 1.1 (préfaisceau d'ensemble)**.** Un *préfaisceau* sur X est la donnée pour chaque ouvert U de X d'un ensemble $\mathscr{F}(U)$ non vide, appelé ensemble des sections du faisceau $\mathscr{F}$ sur U, compatible avec la restriction, c'est-à-dire que si $V \subset U$ est un ouvert alors $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V), s \mapsto s_{|V}$ est bien définie et associative, i.e. si $W \subset V \subset U$ sont des ouverts et $s \in \mathscr{F}(U)$ alors $(s_{|V})_{|W} = s_{|W}$ dans $\mathscr{F}(W)$.

On peut voir cette définition comme celle d'un foncteur de la catégorie des ouverts de X munie des flèches de l'inclusion vers celle des ensembles. Très souvent, le préfaisceau $\mathscr{F}$ possède une structure algébrique additionnelle : on parle alors de préfaisceau de groupes abéliens, d'anneaux, de R-module, d'algèbre... Dans tous les cas, les préfaisceaux encodent des propriétés locales de l'espace en des objets globaux.

Définition 1.2. Soit $U = \cup_{i\in I} U_i$ où les U_i sont des ouverts quelconques de X. Un *faisceau* est un préfaisceau satisfaisant les deux propriétés suivantes :

1. *Détermination locale des sections* : l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(U) & \longrightarrow & \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i) \\ s & \longmapsto & (s_{|U_i}) \end{array}$$
est injective.
2. *Recollement* : si une famille de sections $(s_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i)$ vérifie $s_i = s_j$ sur l'ouvert $U_i \cap U_j$ pour tout i, j alors il existe une section $s \in \mathscr{F}(U)$ telle que $s_{|U_i} = s_i$ pour tout i.

Exemple 1.1. On se donne un groupe abélien A. Voici quelques exemples de faisceaux et préfaisceaux.

1. On peut associer à chaque ouvert U l'ensemble des fonctions $U \to A$, ce qui forme un faisceau.
2. L'ensemble des fonctions continues de U dans $\mathbb{R}$ définit un faisceau.
3. Si X est une variété, l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ définit un faisceau sur les ouverts de X.
4. Si X est un ouvert de $\mathbb{C}$, l'ensemble des fonctions holomorphes sur U définit un faisceau.
5. L'ensemble des fonctions contantes $U \to A$ n'est pas un faisceau, car les recollements ne peuvent pas se faire.
6. L'ensemble des fonctions localement constantes $U \to A$ définit un faisceau noté $\underline{A_X}$.

Définition 1.3. Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont des préfaisceaux de groupes abéliens, un *morphisme de (pré)faisceaux* $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ au-dessus de X est la donnée de morphismes $\alpha_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ compatibles avec la restriction, c'est-à-dire tels que le diagramme
$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathscr{G}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathscr{G}(V) \end{array}$$
est commutatif pour tout $V \subset U$.

Proposition 1.1. *Étant donnés $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ des faisceaux,*

— $U \to \ker \alpha_U$ est un faisceau,
— $U \to \mathrm{Im}\alpha_U$ est un préfaisceau mais n'est pas un faisceau en général.

Exemple 1.2. L'application exponentielle, qui à un germe f de fonction continue de X dans $\mathbb{R}$, associe la fonction $e^{2i\pi f}$ dans l'ensemble des germes de fonctions de X dans S^1, est un morphisme de faisceaux dont le noyau est un faisceau mais l'image n'en est pas un.

Théorème 1.1. *Soit $\mathscr{F}$ un (pré)faisceau. Pour tout $x \in X$ on définit formelement le germe de $\mathscr{F}$ en x par la limite*
$$\varinjlim_{U \ni x} \mathscr{F}(U)$$

et on asssocie à chaque section $s \in \mathscr{F}(U)$ où $U \ni x$ une section $s_x \in \mathscr{F}_x$. Ainsi, on regarde que ce qui se passe localement. On définit ainsi un ensemble $\tilde{\mathscr{F}} = \coprod_{x \in X} \tilde{\mathscr{F}}_x$ tel qu'une section de $\tilde{\mathscr{F}}(U)$ pour un certain ouvert U est la donnée d'une famille de germes $(s_x)_{x \in U}$ où $s_x \in \mathscr{F}_x$ vérifie

$$\forall x \in U\ \exists V \ni x\ \exists t \in \mathscr{F}(V)\ t_{x'} = s_{x'} \forall x' \in V$$

Exemple 1.3. Ce procédé permet de construire le faisceau des fonctions localement constantes à partir des fonctions constantes.

Une autre définition des faisceaux, plus ensembliste, est donc possible :

Définition 1.4. Un *espace-faisceau* sur X est la donnée d'un espace topologique $\mathscr{S}$ et une d'une application $\pi : \mathscr{S} \to X$ satisfaisant les conditions suivantes :

1. π est surjective,
2. πest un homéomorphisme local.

π est appelée projection de $\mathscr{S}$ sur X et si $x \in X$, la préimage $\pi^{-1}(\{x\})$ est appelée fibre, ou tige, de $\mathscr{S}$ en x et est notée $\mathscr{S}_x$.

Étant donné un espace-faisceau $\mathscr{S}$, on peut lui associer le préfaisceau de ses sections $U \mapsto \Gamma(U, \mathscr{S})$, noté $\mathscr{S}'$. L'ensemble des germes de $\mathscr{S}'$ en x est en correspondance bijective avec les fibres de $\mathscr{S}$ en x, grâce au fait que π est un homéomorphisme local. On peut montrer que l'association

$$\mathscr{S} \mapsto \mathscr{S}'$$

est une équivalence de catégories entre celle des espaces-faisceaux et celle des faisceaux. Inversement, étant donné un préfaisceau $\mathscr{F}$ sur X, on peut lui associer un espace-faisceau $\tilde{\mathscr{F}}$ via la construction du théorème 1.1. Le préfaisceau $(\tilde{\mathscr{F}})'$ des sections de $\tilde{\mathscr{F}}$ est alors envoyé sur le préfaisceau $\mathscr{F}$ via le morphisme de préfaisceaux

$$\begin{cases} \mathscr{F}(U) & \longrightarrow & (\tilde{\mathscr{F}})'(U) = \Gamma(U, \tilde{\mathscr{F}}) \\ F & \longmapsto & \tilde{F} = (U \ni x \mapsto F_x) \end{cases}$$

qui est un isomorphisme si et seulement si $\mathscr{F}$ est un faisceau. Dans ce cas, on peut donc dès à présent confondre le faisceau $\mathscr{F}$ et son espace associé $(\tilde{\mathscr{F}})'$, et les noter tout deux $\mathscr{F}$. Pour le cas des préfaisceaux, on pourra parler sans ambiguïté du faisceau associé. Plus généralement, si l'on introduit la notion d'espace étalé a udéssus de X, on a montré que tout faisceau d'ensembles au-dessus de X est un isomorphe au faisceau des sections d'un espace étalé dans X, unique à isomorphisme près. [2, page 111]

Étant donné $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme de faisceaux, on peut à présent définir $\mathrm{Im}\alpha$ comme le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto \mathrm{Im}\alpha_U$: c'est l'ensemble des sections de $\mathscr{G}$ provenant localement de sections de $\mathscr{F}$. Autrement dit, $g \in \mathscr{G}(U)$ est dans $(\mathrm{Im}\alpha)(U)$ si et seulement si il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{i \in I}$ de U et des sections $f_i \in \mathscr{F}(V_i)$ tels que $\alpha(f_i) = g_{|V_i}$ pour tout $i \in I$.

On peut à présent étendre la notion de suite exacte aux suites

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$$

où $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$ et $\mathscr{H}$ sont des faisceaux.

Lemme 1.1 (lemme clef)**.** *Une suite exacte de faisceaux de groupes abéliens*

$$0 \to \mathscr{F} \xrightarrow{j} \mathscr{G} \xrightarrow{p} \mathscr{H} \to 0$$

est exacte si et seulement si elle la suite induite

$$0 \to \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x \to \mathscr{H}_x \to 0$$

est exacte pour tout $x \in X$.

Démonstration. Injectivité de j. Soient $x \in X$, s_x et s'_x des germes de $\mathscr{F}$ en x. Ces germes sont équivalents à deux sections s et s' sur un ouvert U assez petit contenant x. $j(s) = j(s')$ équivaut donc à $j(s_x) = j(s'_x)$ et l'injectivité de j passe de la suite des faisceaux à la suite induite sur les fibres. Réciproquement, une section

s sur un ouvert U est une famille de germes $(s_x)_{x\in U}$, ce qui permet de déduire de l'injectivité de j pour les fibres son injectivité au niveau des faisceaux.

Surjectivité de p. Soit h_x un germe de $\mathscr{F}$ en x. Soit U un ouvert de X contenant x et $h \in \mathscr{H}(U)$ tel que h_x soit un germe de h en x. Par surjectivité de p, on dispose d'un recouvrement ouvert (V_i) de U et de $g_i \in \mathscr{G}(V_i)$ tel que $p(g_i) = h_{|V_i}$. En particulier, pour un certain i, g_i définit un germe g_x de $\mathscr{G}$ en x tel que $p(g_x) = h_x$.

Soit g_x un germe de $\mathscr{G}$ en x tel que $p(g_x) = 0$. Soit U un ouvert de X contenant x et $g \in \mathscr{G}(U)$ tel que g_x soit un germe de g en x, avec g nulle sur U. Par exactitude de la suite sur les faisceaux, on dispose de $f \in \mathscr{F}(U)$ tel que $j(f) = g$. Le germe de f en x fournit un antécédent de g_x par p. L'autre inclusion est claire. $\square$

Corollaire 1.1. *Un morphisme de faisceau $\alpha : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ est injectif si et seulement si $\mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$ est injectif pour tout ouvert $U \subset X$ (le sous-faisceau $\ker\alpha$ est nul). Il est surjectif si et seulement si $\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ est surjectif pour tout $x \in X$.*

Le lemme 1.1 nous fournit en particulier le résultat suivant.

Proposition 1.2. *Le foncteur des sections globales est exact à gauche, c'est-à-dire que si*

$$0 \to \mathscr{F}' \xrightarrow{j} \mathscr{F} \xrightarrow{p} \mathscr{F}'' \to 0$$

est une suite exacte de faisceaux, la suite induite sur les sections globales

$$0 \to \mathscr{F}'(X) \xrightarrow{j_X} \mathscr{F}(X) \xrightarrow{p_X} \mathscr{F}''(X)$$

est également exacte.

Exemple 1.4. La suite exacte de faisceaux de germes

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}}_{S^1} \to \mathcal{C}^0_{S^1,\mathbb{R}} \xrightarrow{\exp} \mathcal{C}^0_{S^1,S^1} \to 0$$

induit une suite sur les sections globales

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to & \mathbb{Z} & \to & \mathcal{C}^0(S^1,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{C}^0(S^1,S^1) \\ & & & f & \longmapsto & e^{2i\pi f} \end{array}$$

qui est clairement exacte. Le théorème de relèvement des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans S^1 fournit, étant donnée $g \in \mathcal{C}^0(S^1,\mathbb{R})$, l'existence de $\tilde{g} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $g(\exp(2i\pi x)) = \exp(2i\pi\tilde{g}(x))$ pour tout $x \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Le degré de $\tilde{g}$ définit une surjection $\mathcal{C}^0(S^1,S^1) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$. La suite exacte ralongée est

$$\begin{array}{ccccccccc} 0\to & \mathbb{Z} & \to & \mathcal{C}^0(S^1,\mathbb{R}) & \xrightarrow{\exp} & \mathcal{C}^0(S^1,S^1) & \to & \mathbb{Z} & \to & 0 \\ & & & f & \longmapsto & e^{2i\pi f} & & & & \\ & & & & & g & \longmapsto & \deg g & & \end{array}$$

1.2 Résolutions

La construction d'une théorie cohomologique des faisceaux nécessite de construire une suite exacte longue de groupes de cohomologie. L'approche suivie ici est de procéder à la manière des foncteurs dérivés, c'est-à-dire en cherchant des résolutions.

Définition 1.5. On dit que $\mathscr{F}^\bullet$ est une résolution d'un faisceau $\mathscr{F}$ si la suite

$$0 \to \mathscr{F} \to \mathscr{F}^0 \to \mathscr{F}^1 \to ...$$

est exacte, ce qui équivaut à l'exactitude de

$$\mathscr{F}^0 \to \mathscr{F}^1 \to ...$$

avec l'injection $\mathscr{F} \hookrightarrow \mathscr{F}^0$.

Exemple 1.5. Le complexe de De Rham fournit un exemple de résolution. Si X est une variété, on note Ω^p_X le faisceau des p-formes sur X (c'est-à-dire le faisceau du fibré vectoriel $\wedge^p T^*_X$), lequel forme avec la différentielle extérieure un complexe

$$\Omega^0_X \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^1_X \xrightarrow{\mathrm{d}} \Omega^2_X \to ...$$

qui est une résolution du faisceau $\underline{\mathbb{R}}_X$ par des $\mathscr{C}^\infty_X$-modules. En effet, $d \circ d = 0$ et toute forme fermée sur un ouvert $U \subset X$ est localement exacte (lemme de Poincaré).

1.3 Faisceaux *flasques*

Dans ce paragraphe, $\mathscr{A}$ désigne un faisceau abélien au-dessus de X et $\pi : \mathscr{A} \to X$ la projection. Le but est de trouver des faisceaux particulièrement sympathiques pour pouvoir construire une théorie cohomologique : on aura besoin une résolution de tout faiceau par ces derniers, et qu'ils soient de groupes de cohomologie particulièrement symples.

Définition 1.6. Un faisceau $\mathscr{F}$ est dit flasque si pour tout ouvert $U \subset X$ la restriction $\mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(U)$ est surjective. Autrement dit, toute section sur U peut être prolongée en une section sur X.

On peut dès lors se rendre compte qu'il s'agit d'une propriété locale, ce qu'assure la

Proposition 1.3. *Soit $\mathscr{A}$ un faisceau tel que pour toute section f sur un ouvert $U \subset X$ et tout point $x \in X$ il existe un voisinage Ω de x et une section $h \in \mathscr{A}(\Omega)$ tels que $h = f$ sur $U \cap \Omega$. Alors $\mathscr{A}$ est flasque.*

Démonstration. Donnons-nous une section $f \in \mathscr{A}(U)$. On cherche à justifier que l'on peut prolonger f sur tout X. Considérons pour cela l'ensemble

$$\{(g, V) \mid V \supset U \text{ ouvert},\ g \in \mathscr{A}(V),\ g_{|U} = f\}$$

qui est ordonné donc possède un plus grand élément (g, V). Soit $x \in X \setminus V$. On dispose d'un voisinage Ω de x et de $h \in \mathscr{A}(\Omega)$ tel que $h = f$ sur $U \cap \Omega$. On peut donc prolonger g sur $V \cup \Omega$ ce qui contredit la maximalité de (g, V). On conclut que $V = X$. □

Par conséquent, un faisceau $\mathscr{A}$ sur X est flasque si et seulement si il est flasque sur un voisinage de tout point de X. On aura également besoin de la proposition suivante sur les suites exactes.

Proposition 1.4. *Soit $0 \to \mathscr{A} \xrightarrow{j} \mathscr{B} \xrightarrow{p} \mathscr{C} \to 0$ une suite exacte de faisceaux sur X. Si $\mathscr{A}$ est flasque, alors la suite de groupes*

$$0 \to \mathscr{A}(U) \xrightarrow{j} \mathscr{B}(U) \xrightarrow{p} \mathscr{C}(U) \to 0$$

est exacte pour tout ouvert $U \subset X$. Si de plus $\mathscr{B}$ est flasque, alors $\mathscr{C}$ l'est également.

Démonstration. On sait que

$$0 \to \mathscr{A}(U) \xrightarrow{j} \mathscr{B}(U) \xrightarrow{p} \mathscr{C}(U)$$

est exacte en générale. Soit $g \in \mathscr{C}(U)$. On suppose que $\mathscr{A}$ est flasque. Il n'y a que la surjectivité de p à prouver. Il s'agit de montrer qu'une section $s'' \in \mathscr{C}(U)$ provient d'une section de $\mathscr{B}$. On peut supposer $U = X$ et considérer l'ensemble E des couples (U, s) où $s \in \mathscr{B}(U)$ représente s'' dans U. E est ordonné par le prolongement de ses éléments, et possède donc un élément (U, s) maximal. Supposons par l'absurde que $U \neq X$: on dispose donc de $x \in X \setminus U$, d'un voisinage V de x et d'une section $t \in \mathscr{B}(V)$ qui représente s'' dans V (c'est-à-dire $p(t_x) = s''_x$). On a donc $p(t - s) = 0$ sur $U \cap V$ et $t - s = j(u)$ pour un certain $u \in \mathscr{A}(U \cap V)$, que l'on peut étendre en une section sur tout X (sur V suffit, en réalité) et on a réussi à prolonger s en dehors de U, ce qui contredit la maximalité de (U, s).

Le corollaire s'ensuit : une section s'' de $\mathscr{C}$ au-dessus de U possède une section-antécédent s dans $\mathscr{B}$ au-dessus de U, qui se prolonge à X, et donc s'' également. □

Tout comme on a montré qu'il était possible de construire des faisceaux à partir de préfaisceaux, l'objet de ce paragraphe est l'existence d'une réalisation de tout faisceau en faisceau flasque. Pour cela, notons $\mathscr{A}^{[0]}$ le faisceau des germes de sections $X \to \mathscr{A}$ (non nécessairement continues) c'est-à-dire défini pour tout ouvert $U \subset X$ par

$$\mathscr{A}(U) = \{f : U \to \mathscr{A} \mid f(x) \in \mathscr{A}_x,\ \forall\, x \in U\} = \prod_{x \in U} \mathscr{A}_x$$

qui est un bon candidat pour être le faisceau flasque *canonique* construit à partir de $\mathscr{A}$. On a une injection naturelle définie sur les sections :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{A} & \hookrightarrow & \mathscr{A}^{[0]} \\ s \in \mathscr{A}_x & \mapsto & \tilde{s} \in \mathscr{A}_x^{[0]} \end{array}$$

où $\tilde{s}$ coïncide avec $y \mapsto s(y)$ dans un voisinage de x.

Affirmation 1.1. $\mathscr{A}^{[0]}$ est un faisceau flasque.

Démonstration. Soit U un ouvert de X et $s \in \mathscr{A}^{[0]}(U)$ une section. Pour tout $x \in X \setminus U$ on choisit $f(x) \in \mathscr{A}_x(X)$. On pose $\tilde{s}(x) = \begin{cases} s(x) & x \in U \\ f(x) & x \in X \setminus U \end{cases}$ ce qui fournit un antécédent de s par $\mathscr{A}^{[0]}(X) \to \mathscr{A}^{[0]}(U)$. □

Il est donc possible de construire un faisceau flasque à partir d'un faisceau (abélien) quelconque. On peut même réitérer le procédé et définir par récurrence pour $q \geq 1$

$$\mathscr{A}^{[q]} = \left(\mathscr{A}^{[q-1]}\right)^{[0]}$$

ce qui fournit la suite d'injections de faisceaux flasques

$$\mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{A}^{[0]} \hookrightarrow \mathscr{A}^{[1]} \hookrightarrow ...$$

Tentons de comprendre $\mathscr{A}_x^{[0]}$. C'est un ensemble de germes de fonctions ensemblistes, qu'on peut donc décrire par

$$\{f : X \to \mathscr{A} \,|\, \forall x_0 \quad f(x_0) \in \mathscr{A}_{x_0}\}/f \sim g$$

où $f \sim g$ si $f = g$ sur un voisinage V de x. De même,

$$\mathscr{A}_x^{[1]} = \{f : X \to \mathscr{A}^{[0]} \,|\, \forall x_1 \quad f(x_1) \in \mathscr{A}_{x_1}^{[0]}\}/f \sim g$$

où $f \sim g$ si $f = g$ sur un voisinage $V(x)$ de x. Alors $\mathscr{A}_{x_1} \ni f(x_0, x_1) = g(x_0, x_1)$ pour tout $x_0 \in V(x_1)$.

Affirmation 1.2. Soient $x \in X$ et $q \geq 1$ un entier. $\mathscr{A}_x^{[q]}$ est l'ensemble des $f : X^{q+1} \to \mathscr{A}$ tels que $f(x_0, ..., x_q) \in \mathscr{A}_{x_q}$, quotienté par la relation $f \sim g \Leftrightarrow f$ et g coïncident sur un voisinage de la forme

$$\underset{\ni x_0}{V} \times \underset{\ni x_1}{V(x_0)} \times ... \times \underset{\ni x_q}{V(x_0, x_1, ..., x_{q-1})}$$

que l'on peut prendre décroissante pour l'inclusion, sans perte de généralité.

Proposition 1.5 (différentielle sur les faisceaux flasques)**.** *L'application* $\mathrm{d}^q : \mathscr{A}^{[q]} \to \mathscr{A}^{[q+1]}$ *définie pour tout* $q \geq 1$ *par*

$$(\mathrm{d}^q f)(x_0, ..., x_{q+1}) = \sum_{j=0}^{q} (-1)^j f(x_0, ..., \hat{x_j}, ..., x_q) + (-1)^{q+1} f(x_0, ..., x_q)(x_{q+1})$$

vérifie $d^{q+1} \circ d^q = 0$.

Il convient de préciser le dernier terme : étant donné que $f(x_0, ..., x_q) \in \mathscr{A}_{x_q}$ est un germe, il définit une section continue $x_{q+1} \mapsto s(x_{q+1})$ sur un voisinage de x_q, voisinage dépendant *a priori* de $x_0, ..., x_q$.

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{A}_x^{[q]}$. Personne n'aurait envie de développer $\mathrm{d}^{q+1} \circ \mathrm{d}^q f$. L'essentiel est de comprendre qu'il suffit en fait de voir que si l'on choisit des voisinages suffisamment petits et contenus les uns dans les autres, les

$$f(..., \hat{x_j}, ..., \hat{x_k}, ...)$$

et

$$f(..., \hat{x_j}, ...)(x_k)$$

coïncident sur ces voisinages, ce qui fournit $\mathrm{d}^{q+1} \circ \mathrm{d}^q f = 0$ grâce à l'alternance des signes. □

Théorème 1.2 (Godement, 1957)**.** *Le complexe de cochaînes* $(\mathscr{A}^{[\bullet]}, \mathrm{d}^\bullet)$ *est une résolution de* $\mathscr{A}$ *en faisceaux flasques.*

Démonstration. Soient $x \in X$ et $s \in \mathscr{A}_x$. Si l'on note j l'injection $\mathscr{A} \hookrightarrow \mathscr{A}^{[0]}$ on a

$$(js)(x_0) = s(x_0)$$

avec, par abus de notation, $s(x_0)$ le germe continu associé à s en x_0, d'où

$$\mathrm{d}^0 \circ js(x_0) = s(x_1) - s(x_0)(x_1)$$

qui vaut zéro pour des voisinages $V \ni x_0$ et $V(x_0) \ni x_1$ assez petits. Reste à montrer que la suite

$$0 \to \mathscr{A} \xrightarrow{j} \mathscr{A}^{[0]} \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \mathscr{A}^{[1]} \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \dots$$

est exacte, ce qui équivaut à l'exactitude de la suite

$$0 \to \mathscr{A}_x \xrightarrow{j} \mathscr{A}_x^{[0]} \xrightarrow{\mathrm{d}^0} \mathscr{A}_x^{[1]} \xrightarrow{\mathrm{d}^1} \dots$$

pour tout point x de X. Pour cela, il suffit de montrer que l'identité est homotope à zéro pour tout point x de X. Pour cela, on pose $h^0(f) = f(x) \in \mathscr{A}_x$ pour tout $f \in \mathscr{A}_x^{[0]}$ et plus généralement

$$h^q : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{A}_x^{[q]} & \longrightarrow & \mathscr{A}_x^{[q-1]} \\ f & \longmapsto & h^q(f) : \left\{ \begin{array}{ccc} X^q & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ (x_0, \dots, x_{q-1}) & \longmapsto & f(x, x_0, \dots, x_{q-1}) \end{array} \right. \end{array} \right.$$

en posant $\mathscr{A}_x^{[-1]} = \mathscr{A}_x$ et $\mathrm{d}^{-1} = j$. On a alors l'identité d'homotopie

$$h^{q+1} \circ \mathrm{d}^q + \mathrm{d}^{q-1} \circ h^q = \mathrm{id}_{\mathscr{A}_x^{[q]}}$$

pour tout $q \in \mathbb{N}$, ce qui conclut : l'identité $\mathrm{id}_{\mathscr{A}_x^{[\bullet]}}$ du complexe de faisceau est homotope à l'application nulle, commute à la différentielle et induit donc par fonctorialité l'homéomorphisme identité sur les groupes $\frac{\ker(\mathrm{d}^q)}{\mathrm{Im}(\mathrm{d}^{q-1})}$ qui est le même, par homotopie, que l'application nulle. Ces groupes quotients sont donc tous nuls. □

2 Construction d'une théorie cohomologique

2.1 Cohomologie par les faisceaux flasques

Définition 2.1. Soit $\pi : \mathscr{A} \to X$ un faisceau abélien. Pour tout $q \in \mathbb{Z}$ on définit le q-ième groupe de cohomologie de X par

$$\boxed{H^q(\mathscr{A}, X) := H^q(\mathscr{A}^{[\bullet]}, X) = Z^q / B^q}$$

où $Z^q = \ker(\mathscr{A}^{[q]} \xrightarrow{\mathrm{d}^q} \mathscr{A}^{[q+1]})$ est l'ensemble des *q-cocycles* et $B^q = \mathrm{Im}(\mathscr{A}^{[q-1]} \xrightarrow{\mathrm{d}^{q-1}} \mathscr{A}^{[q]})$ l'ensemble des *q-cobords*.

Définition 2.2. Un faisceau $\mathscr{A}$ est dit *acyclique* sur un ouvert $U \subset X$ si $H^q(\mathscr{A}, U) = 0$ dès que $q \geq 1$.

Lemme 2.1. *Si la suite de faisceaux abéliens*

$$0 \to \mathscr{A}' \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}'' \to 0$$

est exacte, alors il en va de même pour la suite

$$0 \to (\mathscr{A}')^{[0]}(X) \to \mathscr{A}^{[0]}(X) \to (\mathscr{A}'')^{[0]}(X) \to 0$$

Démonstration. La suite $0 \to \mathscr{A}' \to \mathscr{A} \to \mathscr{A}'' \to 0$ est exacte ssi pour tout $x \in X$ la suite $0 \to \mathscr{A}'_x \to \mathscr{A}_x \to \mathscr{A}''_x \to 0$ l'est (lemme 1.1). En particulier, cela implique que la suite induite sur les sections

$$0 \to (\mathscr{A}')^{[0]}(U) \to \mathscr{A}^{[0]}(U) \to (\mathscr{A}'')^{[0]}(U) \to 0$$

est exacte pour tout ouvert $U \subset X$, car l'on a par définition $(\mathscr{B})^{[0]}(U) = \prod_{x \in U} \mathscr{B}_x$ pour $\mathscr{B} = \mathscr{A}, \mathscr{A}', \mathscr{A}''$. En particulier pour le cas $U = X$. De plus, la suite de faisceaux flasques

$$0 \to (\mathscr{A}')^{[0]} \to \mathscr{A}^{[0]} \to (\mathscr{A}'')^{[0]} \to 0$$

est exacte. □

Théorème 2.1. *Un faisceau flasque $\mathscr{A}$ est acyclique sur tout ouvert $U \subset X$.*

Démonstration. Pour tout $q \geq 0$ posons
$$\mathscr{Z}^q = \ker \mathrm{d}^q$$
et considérons la suite de faisceaux
$$0 \longrightarrow \mathscr{Z}^q \longrightarrow \mathscr{A}^{[q]} \longrightarrow \mathscr{Z}^{q+1} \longrightarrow 0$$
qui est exacte. On a en particulier $\mathscr{Z}^0 = \mathscr{A}$ flasque tout comme $\mathscr{A}^{[0]}$ et on en déduit par récurrence sur q et à l'aide de la proposition 1.4 que tous les $\mathscr{Z}^q$ sont également flasques et induisent des suites exactes
$$0 \longrightarrow \mathscr{Z}^q(U) \longrightarrow \mathscr{A}^{[q]}(U) \longrightarrow \mathscr{Z}^{q+1}(U) \longrightarrow 0$$
pour tout ouvert $U \subset X$, ce qui fournit exactement $H^q(U, \mathscr{A}) = H^q(\mathscr{A}^{[\bullet]}(U)) = 0$. □

2.2 Cohomologie de Čech et faisceaux flasques

2.2.1 Complexe de Čech

Soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts, et $\mathscr{A}$ un faisceau sur X. On définit le q-ième complexe de Čech par
$$\mathscr{C}^q(\mathcal{U}, \mathscr{A}) = \prod_{(\alpha_0, \ldots, \alpha_q) \in I^{q+1}} \mathscr{A}(U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_q})$$
dont on note
$$c = (c_{\alpha_0 \ldots \alpha_w})_{(\alpha_0, \ldots, \alpha_q) \in I^{q+1}}$$
les éléments. On définit une différentielle
$$\delta^q \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{C}^q(\mathcal{U}, \mathscr{A}) & \longrightarrow & \mathscr{C}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathscr{A}) \\ (c_{\alpha_0 \ldots \alpha_w})_{(\alpha_0, \ldots, \alpha_q) \in I^{q+1}} & \longmapsto & \left(\sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \left(c_{\alpha_0 \ldots \hat{\alpha_j} \ldots \alpha_{q+1}} \right)_{|U_{\alpha_0} \cap \ldots \cap U_{\alpha_q}} \right)_{(\alpha_0, \ldots, \alpha_q) \in I^{q+1}} \end{array} \right.$$
dont on vérifie qu'elle est de carré nul, et qui justifie l'appelation de complexe que l'on a donné à $\mathscr{C}^q(\mathcal{U}, \mathscr{A})$. On peut donc définir le q-ième groupe de cohomologie de Čech associé à $\mathscr{A}$ et $\mathcal{U}$ par
$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{A}) = H^q(\mathscr{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{A}), \delta)$$
En particulier, $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{A}) = \mathscr{A}(X)$. Cette définition dépend du choix du recouvrement, et le choix de n'importe quel recouvrement plus fin (les fonctions de raffinement étant deux à deux homotopes) définit des groupes de cohomologie plus fins, c'est-à-dire que l'on va poser
$$\check{H}^q(X, \mathscr{A}) = \lim_{\overrightarrow{\mathcal{U}}} \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{A})$$
en identifiant les classes de raffinements par leur groupes de cohomologie.

On vérifie ensuite que tout morphisme de faisceaux induit un morphisme sur les groupes de cohomologie. Une des conditions pour une théorie cohomologie fonctionnelle étant la possibilité de passer d'une suite exacte courte à une suite exacte longue en cohomologie, on a une résultat suivant.

Théorème 2.2. *Pour tout suite exacte courte*
$$0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C} \longrightarrow 0$$
de faisceaux, on a une suite exacte de faisceaux de Čech
$$0 \longrightarrow \mathscr{C}(\mathcal{U}, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{C}(\mathcal{U}, \mathscr{B}) \longrightarrow \mathscr{C}(\mathcal{U}, \mathscr{C}) \longrightarrow \mathscr{C}_\beta(\mathcal{U}, \mathscr{C}) \longrightarrow 0$$
où $\mathscr{C}_\beta(\mathcal{U}, \mathscr{C})$ désigne le faisceau associé à l'image de $\mathscr{C}(\mathcal{U}, \mathscr{B}) \longrightarrow \mathscr{C}(\mathcal{U}, \mathscr{C})$, et une suite longue en cohomologie
$$\ldots \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{A}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{B}) \longrightarrow \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{C}) \longrightarrow \check{H}^q_\beta(\mathcal{U}, \mathscr{C}) \longrightarrow \check{H}^{q+1}(\mathcal{U}, \mathscr{A}) \longrightarrow \ldots$$

Notre étude des faisceaux flasques nous invite à étudier ce cas. Ainsi, si $\mathscr{A}$ est flasque, on a le

Théorème 2.3. *Si $\mathscr{A}$ est flasque alors $\mathscr{C}^\bullet_\beta(\mathcal{U}, \mathscr{C}) = \mathscr{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{C})$. De plus, $\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{A}) = 0$ dès que $q \geq 1$.*

2.2.2 Lien avec la cohomologie des faisceaux flasques

Pour $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in I}$ un recouvrement de X, on considère $\lambda : X \to I$ telle que

$$\forall x \in X \quad x \in U_{\lambda(x)}$$

Pour chaque cochaîne $c \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathscr{A})$ on associe la section $\lambda_c^q = f \in \mathscr{A}^{[q]}(X)$ telle que

$$f(x_0, ..., x_q) = c_{\lambda(x_0)...\lambda(x_q)}(x_q) \in \mathscr{A}_{x_q}$$

On remarque que

$$(\lambda^{q+1}\delta^q c) = \sum_{j=0}^{q+1}(-1)^j c_{\lambda(x_0)...\hat{\lambda(x_j)}...\lambda(x_{q+1})}(x_{q+1}) = (d^q f)(x_0, ..., x_{q+1})$$

On a donc un morphisme de complexe

$$\lambda^\bullet : \mathcal{C}^\bullet(\mathcal{U}, \mathscr{A}) \to \mathscr{A}^{[q]}(X)$$

qui induit

$$H^q(\lambda^\bullet) : \check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{A}) \to H^q(X, \mathscr{A})$$

Montrons que $H^\bullet(\lambda^\bullet)$ ne dépend pas du choix de λ. Il faut prendre un bon recouvrement. En général, si $\mathcal{V} = (V_p)_{p\in J}$ est un raffinement de $\mathcal{U}$ tel que $V_\beta \subset U_{\rho(\beta)}$ et $x \in V_{\mu(x)}$ avec $\lambda = \rho \circ \mu$ alors le diagramme des groupes de cohomologie est commutatif. En particulier si λ' est un autre choix, alors $H^q(\lambda)$ et $H^q(\lambda')$ peuvent tous deux se factoriser par $\check{H}^q(\mathcal{V}, \mathscr{A})$ avec $\mathcal{V}$ =$(U_{\lambda(x)} \cap U_{\lambda'(x)})$ et $\mu = \mathrm{id}_X$. De plus le diagramme montre aussi que le morphisme

$$\check{H}(\mathcal{U}, \mathscr{A}) \longrightarrow H^q(X, \mathscr{A})$$

est compatible avec le morphisme de raffinement $H^q(\rho^\bullet)$ et donc à la limite on obtient

$$\check{H}^q(X, \mathscr{A}) \longrightarrow H^q(X, \mathscr{A})$$

Théorème 2.4 (Leray). *Si $H^q(U_{\alpha_0...\alpha_t}, \mathscr{A}) = 0$ pour $q \geq 1$ et $\alpha_0, ..., \alpha_t, ...$ alors*

$$\check{H}^q(\mathcal{U}, \mathscr{A}) \cong H^q(X, \mathscr{A})$$

Si X est paracompact, $0 \longrightarrow \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{C} \longrightarrow 0$.

Lemme 2.2 (de relèvement). *Si $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha\in I}$ est un recouvrement de X et $c \in \mathcal{C}^q(\mathcal{U}, \mathcal{C})$ alors il existe un raffinement $\mathcal{V} = (V_\beta)_{\beta\in J}$ et $\rho : J \to I$ tels que $\rho^q c \in \mathcal{C}^q_\beta(\mathcal{V}, \mathscr{C})$.*

De ce lemme on déduit le

Théorème 2.5. *On a une suite exacte*

$$... \longrightarrow \check{H}^q(X, \mathscr{A}) \longrightarrow \check{H}^q(X, \mathscr{B}) \longrightarrow \check{H}^q(X, \mathscr{C}) \longrightarrow \check{H}^{q-1}(X, \mathscr{A}) \longrightarrow ...$$

limite directe de la suite exacte vue précédemment.

2.3 Théorème de De Rham-Weil

Précédemment, nous avons pu définir une théorie cohomologique à l'aide des faisceaux flasques. Le théorème de De Rham-Weil est le premier résultat important en théorie cohomologique des faisceaux : il nous rassure sur la généralité de la construction en assurant que n'importe quelle résolution par des faisceaux acycliques aurait convenu :

Théorème 2.6. *Si $\mathscr{A}$ est un faisceau au-dessus de X et $(\mathscr{L}^\bullet, \mathrm{d})$ une résolution de $\mathscr{A}$ par des faisceaux acycliques, alors il existe un isomorphisme fonctoriel entre les groupes de cohomologie :*

$$H^q(\mathscr{L}^\bullet(X)) \longrightarrow H^q(X, \mathscr{A}).$$

Démonstration. Posons $\mathscr{Z}^\bullet = \ker(\mathscr{L}^\bullet \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathscr{L}^{\bullet+1})$. On a $\mathscr{Z}^0 = \mathscr{A}$ et les suites exactes courtes

$$0 \to \mathscr{Z}^q \to \mathscr{L}^q \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathscr{Z}^{q+1} \to 0$$

pour tout $q \in \mathbb{N}$. On en déduit des suites exactes longue de cohomologie sur les sections globales

$$0 \to \mathscr{Z}^q(X) \to \mathscr{L}^q(X) \to \mathscr{Z}^{q+1}(X) \to H^1(X, \mathscr{Z}^q) \to H^1(X, \mathscr{L}^q) \to H^1(X, \mathscr{Z}^{q+1}) \to H^2(X, \mathscr{Z}^q) \to ...$$

mais $H^n(X, \mathscr{L}^q) = 0$ dès que $n \geq 1$, donc $H^{n+1}(X, \mathscr{Z}^q) \cong H^n(X, \mathscr{Z}^{q+1})$ pour $n \geq 1$. Pour $n = 0$, on remarque que la suite exacte

$$\mathscr{L}^q(X) \to \mathscr{Z}^{q+1}(X) \to H^1(X, \mathscr{Z}^q) \to 0$$

donne l'isomorphisme $H^1(X, \mathscr{Z}^q) \cong \frac{\mathscr{Z}^{q+1}(X)}{\mathrm{Im}(\mathscr{L}^q \xrightarrow{d} \mathscr{L}^{q+1})} = H^q(\mathscr{L}^\bullet(X))$. La composition des morphismes de connexion fournit finalement l'isomorphisme $H^q(\mathscr{L}^\bullet(X)) \cong H^q(X, \mathscr{A})$.

Cette construction est fonctorielle : pour tout morphisme de faisceaux $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ et tout morphisme de résolution $\varphi^\bullet : \mathscr{L}^\bullet \to \mathscr{M}^\bullet$, en notant $\mathscr{W}^\bullet = \ker(\mathscr{M}^\bullet \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathscr{M}^{\bullet+1})$ on a des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathscr{Z}^q & \longrightarrow & \mathscr{L}^q & \longrightarrow & \mathscr{Z}^{q+1} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \varphi^q & & \downarrow \varphi^q & & \downarrow \varphi^{q+1} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathscr{W}^q & \longrightarrow & \mathscr{M}^q & \longrightarrow & \mathscr{W}^{q+1} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc}
H^n(X, \mathscr{Z}^q) & \longrightarrow & H^{n+1}(X, \mathscr{Z}^{q-1}) \\
\downarrow H^n(\varphi^q) & & \downarrow H^{n+1}(\varphi^{q-1}) \\
H^{n+1}(X, \mathscr{W}^q) & \longrightarrow & H^{n+1}(X, \mathscr{W}^{q-1})
\end{array}$$

(d'après le lemme du serpent) qui nous assurent que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
H^n(\mathscr{L}^\bullet(X)) & \longrightarrow & H^{n+1}(X, \mathscr{A}) \\
\downarrow H^n(\varphi^\bullet) & & \downarrow H^n(\varphi) \\
H^n(\mathscr{M}^\bullet(X)) & \longrightarrow & H^n(X, \mathscr{B})
\end{array}$$

est commutatif. □

3 Théorème de De Rham

L'objet de cette partie est de comparer deux approches possibles pour démontrer l'équivalence pour une variété différentielle X de la cohomologie de De Rham et de la cohomologie singulière : via les faisceaux (présentée dans [4]), ou plus frontalement à l'aide d'exhaustions sur les variétés différentielles et de propriétés élémentaires de (co)homologie (Glen E. Bredon, présentée dans [3]). Dans les deux cas, l'isomorphisme exhibé nécessite de considérer des simplexes singuliers lisses, ce que l'on admet comme étant équivalent aux simplexes singuliers (continus) - c'est-à-dire que l'on admet que les groupes d'homologies singulières vérifient $H_p(X) \cong H_p^\infty(X)$ [2], ce qui est loin d'être immédiat et fait l'objet d'un développement dans les deux ouvrages cités.

3.1 Approche par les faisceaux

Soit X une variété différentielle. On note $C^q = C_X^q(X, \mathbb{R})$ les q-cochaînes lisses sur $\mathbb{R}$, c'est à dire les $f : \Sigma^q(X) \to \mathbb{R}$ où $\Sigma^q(X)$ est l'ensemble des q-simplexes lisses dans X. Les groupes d'homolgie singuliers sont notés$H_{sing}^q(X) := H^q(C^\bullet(X))$. On dispose d'une part du complexe de De Rham

$$\Omega_X^0 \longrightarrow \Omega_X^1 \longrightarrow ...$$

et d'autre part du complexe des cochaines singulières sur X

$$C_X^0(X) \longrightarrow C_X^1(X) \longrightarrow ...$$

On dispose d'un morphisme de complexes, donné par l'intégration sur les simplexes :

$$\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega^\bullet(X) & \longrightarrow & C_X^\bullet(X) \\ f & \longmapsto & (\sigma \mapsto \int_\sigma f) \end{array} \right.$$

2. De façon générale, Warner montre dans [4] que $H_p(X, G) \cong H_p^\infty(X, G) \cong H_p(X, \mathscr{G})$ pour G un module sur un anneau principal, et $\mathscr{G}$ sa résolution en faisceau fin.

Théorème 3.1 (De Rham)**.** *τ est un quasi-isomorphisme.*

La démonstration de ce résultat à l'aide de la théorie des faisceaux peut se décomposer en plusieurs étapes.

1. Vérifier que $\Omega^0_X \longrightarrow \Omega^1_X \longrightarrow ...$ est une résolution acyclique de $\underline{\mathbb{R}}_X$ (c'est le lemme de Poincaré) et que $C^\bullet_X$ est un complexe de préfaisceaux, qui admet donc un complexe de faisceaux associé $\mathscr{C}^0_X \to \mathscr{C}^1_X \to ...$ qu'il s'agit de comprendre. Remarque : on a un morphisme de restriction surjectif $C^q(X) \to C^q(U)$ et donc une surjection $C^q(X) \twoheadrightarrow \mathscr{C}^q(X) = \Gamma(X, \mathscr{C}^q)$ (un élément de ce dernier ensemble étant la donnée de fonctions sur des simplexes petits pour un certain recouvrements).
2. Montrer que $\ker(\mathscr{C}^0_X \to \mathscr{C}^1_X) = \underline{\mathbb{R}}_X$ (s'injecte dans $\mathscr{C}^0_X$).
3. Montrer que $\mathscr{C}^0_X \to \mathscr{C}^1_X \to ...$ est exacte, connaissant la cohomologie singulière d'une boule de $\mathbb{R}^n$. C'est un résultat similaire au lemme de Poincaré pour le complexe de De Rham.
4. Vérifier que $\mathscr{C}^q_X$ est flasque (partitions de l'unité gratuites : est fin) pour tout $q \geq 0$. [3].
5. Montrer que le morphisme induit $C^\bullet(X) \to \Gamma(X, \mathscr{C}^\bullet_X)$ est un quasi-isomorphisme [4], et en déduire $H^p(X, \mathbb{R}) \cong H^p(\Omega^\bullet_X)$ grâce au théorème de De Rham-Weil.

Détaillons à présents quelques-un des points évoqués.

Soit $\mathscr{F}^\bullet$ un complexe de préfiasceaux sur X, c'est-à-dire pour tout $U \subset X$, $\mathscr{F}^\bullet(U)$ est un complexe. Deux exemples en tête : $\Omega^\bullet(U)$ (De Rham), $C^\bullet(U)$ (cochaînes singulières). Dans le premier cas c'est déjà un faisceau, pas dans le second. On note $\tilde{\mathscr{F}}$ le faisceau associé : on obtient un complexe de faisceaux.

Lemme 3.1. *Si tout $x \in X$ admet une base de voisinages $U \subset X$ tel que $H^q(\mathscr{F}^\bullet(U)) = 0$ dès que $q \geq 1$. Alors le complexe de faisceaux associé $\tilde{\mathscr{F}}^\bullet$ est exact.*

Démonstration. Soit $q \geq 1$. On se donne $\alpha \in \tilde{\mathscr{F}}^q_x$ tel que $\mathrm{d}\,\alpha = 0$. On cherche $\beta \in \tilde{\mathscr{F}}^{q-1}_x$ tel que $\alpha = \mathrm{d}\,\beta$. Soit V voisinage ouvert de x et $s \in \mathscr{F}^q(V)$ tel que $s_x = \alpha$ et $\mathrm{d}\,s = 0$ sur V. Quitte à restreindre V on peut supposer que $H^q(\mathscr{F}^\bullet(V)) = 0$. On dispose donc de $t \in \mathscr{F}^{q-1}(V)$ tel que $s = \mathrm{d}\,t$. Il reste à poser $\beta = t_x \in \mathscr{F}^{q-1}_x$. □

On peut appliquer ce lemme à des voisinages isomorphes à des boules. Jusqu'au point 4, les cas De Rham et cochaînes singulières sont similaires :

— de Rham : $\Omega^\bullet_X$ est une résolution de $\underline{\mathbb{R}}_X$ par des faisceaux de $\mathscr{C}^\infty$-modules.

— cochaînes : $\mathscr{C}^\bullet_X$ est une résolution de $\underline{\mathbb{R}}_X$ par des faisceaux flasques. [5]

Par De Rham-Weil, $H^q(X, \mathbb{R}) \cong H^q(\mathscr{C}^\bullet(X))$. Il reste à montrer que $H^q(\mathscr{C}^\bullet(X)) \cong H^q(C^\bullet(X))$. Plus précisément, on veut montrer que le morphisme canonique de restriction $C^q(X) \twoheadrightarrow \mathscr{C}^q(X) = \Gamma(X, \mathscr{C}^q)$ est un quasi-isomorphisme (une section du faisceau est une collection de germes du préfaisceau, on peut donc choisir une section globale). La stratégie est de construire j un inverse à droite à homotopie près, c'est-à-dire telle que $p \circ j = \mathrm{id}$ et $j \circ p \sim \mathrm{id}$.

La stratégie suivie par Warner dans [4] est la suivante. Étant donné $\mathscr{F}$ un préfaisceau sur X, $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de X, notant $\tilde{\mathscr{F}}$ le faisceau associé à $\mathscr{F}$, on introduit l'ensemble

$$\mathscr{Z}^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \{(s_i) \in \prod_i \mathscr{F}(U_i) \mid s_i = s_j \textit{ sur } U_i \cap U_j\}$$

et on a par construction de $\tilde{\mathscr{F}}$ que $\mathscr{Z}^0(\mathcal{U}, \tilde{\mathscr{F}}) = \Gamma(X, \tilde{\mathscr{F}})$. Étant donné $\mathcal{U}'$ plus fin que $\mathcal{U}$ on a une suite d'injections

$$\mathscr{Z}^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \longrightarrow \mathscr{Z}^0(\mathcal{U}', \mathscr{F}) \longrightarrow \Gamma(X, \tilde{\mathscr{F}})$$

c'est-à-dire

$$\varinjlim_{\mathcal{U}} \mathscr{Z}^0(\mathcal{U}, \mathscr{F}) \cong \Gamma(X, \tilde{\mathscr{F}})$$

On introduit le noyau $C^\bullet_0(X)$ des sections nulles sur les simplexes $\mathcal{U}$-petits pour un certain recouvrement $\mathcal{U}$ de X par des ouverts, c'est-à-dire à valeurs dans un des ouverts de $\mathcal{U}$. On dispose alors d'une suite exacte courte de complexes

$$0 \longrightarrow C^\bullet_0(X) \longrightarrow C^\bullet(X) \xrightarrow{p} \Gamma(X, \mathscr{C}^\bullet) \longrightarrow 0$$

3. Un faisceau $\mathscr{F}$ est dit fin sur X si pour tout $(U_i)_{i \in I}$ recouvrement ouvert localement fini de X il existe $\ell_i \in \mathrm{End}(\mathscr{F})$ tel que $\mathrm{supp}(\ell_i) \subset U_i$ et $\sum_i \ell_i = 1$.

4. Ce qui peut se prouver dans un cadre plus général que celui de $\mathbb{R}$ (voir [4]).

5. Remarquons que $\mathscr{C}^\bullet_X$ est également un $\mathscr{C}^\infty$-module.

Lemme 3.2. *Étant donnée une suite exacte courte de complexes de cochaines*

$$0 \to C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C'' \to 0$$

la surjection p est un quasi-isomorphisme si et seulement si C' est exacte, c'est-à-dire que ses groupes de cohomologie sont tous nuls.

On se ramène par ce lemme à prouver que $C_0^\bullet(X)$ est exact. Étant donné un certain recouvrement $\mathcal{U}$ fixé, on a aussi une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow C_{0,\mathcal{U}}^\bullet(X) \longrightarrow C^\bullet(X) \xrightarrow{p_\mathcal{U}} \mathscr{Z}^0(\mathcal{U}, C^\bullet) \longrightarrow 0$$

où $C_\mathcal{U}^\bullet(X)$ est le complexe des sections nulles sur les simplexes $\mathcal{U}$-petits, et $\mathscr{Z}^0(\mathcal{U}, C^\bullet)$, noté $C_\mathcal{U}^\bullet(X)$ celui des sections définies sur des simplexes à valeurs dans des ouverts de $\mathcal{U}$. Or $C_{0,\mathcal{U}}^\bullet(X)$ est exacte (et c'est là le point clef dans l'approche de Warner), donc, à nouveau par le lemme 3.2, $p_\mathcal{U}$ est un quasi-isomorphisme, et donc p par passage à la limite.

$C_{0,\mathcal{U}}^\bullet(X)$ est exacte, car le morphisme de restriction $j_\mathcal{U} : C^q(X) \to C_\mathcal{U}^q(X)$ induit un quasi-isomorphisme de complexes $j_\mathcal{U} : C^\bullet(X) \to C_\mathcal{U}^\bullet(X)$. La preuve de ce fait est technique et passe par un découpage barycentrique des simplexes, lequel permet de construire un morphisme $k : C_\mathcal{U}^q(X) \to C^q(X)$ et une homotopie $h_\bullet$ tels que

$$j \circ k = \mathrm{id}$$
$$h_{p+1} \circ d + d \circ h_p = \mathrm{id} - k_p \circ j_p$$

propriétés desquelles on déduit que j est bien un quasi-isomorphisme. On se référera aux pages 197 et suivantes de [4] pour les détails de cette construction.

3.2 Approche directe

L'approche présentée par John M. Lee dans [3] et due à Glen E. Bredon considère directement le morphisme sur les groupes de cohomologie. Pour tout $[\omega] \in H_{deRham}^p(X)$ et $[c] \in H_p(X, \mathbb{R}) \cong H_p^\infty(X, \mathbb{R})$, on définit

$$\mathscr{I}[\omega][c] = \int_{\tilde{c}} \omega$$

où $\tilde{c}$ est un représentant lisse de la classe $[c]$. Le morphisme $\mathscr{I} : H_{dR}^p(X) \to H_\infty^p(X, \mathbb{R})$ est appelé morphisme de De Rham.

Avant toute chose, il est nécessaire de vérifier la naturalité de $\mathscr{I}$, c'est-à-dire sa compatibilité avec les applications lisses entre variétés, et avec le passage des suites courtes exactes au suites longues en cohomologie. Essentiellement, on a besoin de vérifier la

Proposition 3.1. *Soient X et Y des variétés différentielles et p un entier positif.*

1. *Si $f : X \to Y$ est une application lisse, alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^p(Y) & \xrightarrow{f^*} & H_{dR}^p(X) \\ \mathscr{I}\downarrow & & \mathscr{I}\downarrow \\ H_\infty^p(Y, \mathbb{R}) & \xrightarrow{f^*} & H_\infty^p(X, \mathbb{R}) \end{array}$$

2. *Si (U, V) est un recouvrement ouvert de X, alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} H_{dR}^{p-1}(Y) & \xrightarrow{\delta} & H_{dR}^p(X) \\ \mathscr{I}\downarrow & & \mathscr{I}\downarrow \\ H_\infty^{p-1}(Y, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\partial^*} & H_\infty^p(X, \mathbb{R}) \end{array}$$

où δ et ∂^* sont les morphismes de connexion des suites de Mayer-Vietoris associées au recouvrement.

Démonstration.

1. On a

$$\mathscr{I}(f^*[\omega][\sigma]) = \int_\sigma f^*\omega = \int_{\Delta_p} \sigma^* f^* \omega = \int_{\Delta_p} (f \circ \sigma)^* \omega = \int_{f \circ \sigma} \omega = f^*(\mathscr{I}[\omega])[\sigma]$$

2. On est ramené à montrer $\int_e \sigma = \int_c \omega$ pour toute p-forme $\sigma \in \delta[\omega]$ et toute $(p-1)$-chaîne $c \in \partial_*[e]$. Par Mayer-Vietoris, on peut choisir f et f' respectivement dans $H_p(U)$, $H_p(V)$ tels que $c = \partial f$ et $f + f' \in [e]$, et η et η' tels que $\omega = \eta_{|U\cap V} - \eta'_{|U\cap V}$ et soit $\sigma = d\eta$ sur U et $d\eta'$ sur V. On a $\partial f + \partial f' = \partial e$ et $d\omega = d\eta_{|U\cap V} - d\eta'_{|U\cap V} = 0$. Par conséquent la suite d'égalités

$$\int_c \omega = \int_{\partial f} \omega = \int_{\partial f} \eta - \int_{\partial f} \eta' = \int_{\partial f} \eta + \int_{\partial f'} \eta' = \int_f d\eta + \int_{f'} d\eta' = \int_f \sigma + \int_{f'} \sigma = \int_e \sigma$$

□

On peut à présent énoncer le

Théorème 3.2 (De Rham)**.** *Pour toute variété différentielle X et tout entier $p \in \mathbb{N}$ le morphisme de De Rham $\mathscr{I} : H^p_{dR}(X) \to H^p_\infty(X, \mathbb{R})$ est un isomorphisme.*

Pour démontrer ce résultat, introduisons l'idée suivante : une variété différentielle est dite De Rham (DR) si $\mathscr{I}$ est un isomorphisme, et un recouvrement ouvert (U_i) de X est dit De Rham si chaque U_i l'est tout comme chaque intersection finie des U_i. En préliminaire, on a montré que $\mathscr{I}$ commute avec les applications lisses. Par conséquent, toute variété différentielle isomorphe à une variété différentielle De Rham est De Rham. Il suffit donc de prouver le théorème pour des variétés différentielles bien choisies. On montre ainsi que :

1. L'union disjointe de variétés différentielles DR est DR.
2. Tout ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ est DR.
3. Si X possède un recouvrement fini DR, alors X est DR.
4. Si X possède une base d'ouverts DR qui est un recouvrement DR, c'est-à-dire une base DR, alors X est DR.
5. Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est DR.
6. Conclusion : toute variété différentielle est DR.

Les points 4 et 5 forment le cœur de la preuve.

L'avantage de cette preuve est son caractère « bas niveau » : elle se passe de la machinerie technique des faisceaux et de la cohomologie des faisceaux, qui ne permet pas de « voir » qu'il faut utiliser l'intégration. Donnons un détail de chacun de ces points.

L'union disjointe de variétés différentielles De Rham est De Rham. En effet, étant donné (X_i) une famille de variété DR, les injections $\iota_j : X_j \hookrightarrow \coprod_i X$ pour tout i induisent des isomorphismes

$$\oplus_i H^p_{dR}(X_i) \cong H^p_{dR}\left(\coprod_i X_i\right)$$

$$\oplus_i H^p_\infty(X_i, \mathbb{R}) \cong H^p_\infty\left(\coprod_i X_i, \mathbb{R}\right)$$

et on remarque par ailleur que $\mathscr{I}$ commute avec les ι_i^* pour tout i.

Tout ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ est DR. D'une part, si $p \neq 0$, on sait (d'après le lemme de Poincaré ou en remarquant que U est homotope à son barycentre) que $H^p_{dR}(U) = 0$ et que $H^0_{dR}(U) \cong \mathbb{R}$ est généré par les fonctions constantes, par exemple la fonction constante égale à 1. D'autre part en cohomologie singulière si $p \neq 0$ on a de même $H^p_\infty(U, \mathbb{R}) = 0$ et $H^0_\infty(U, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$. Il ne reste donc qu'à vérifier l'isomorphisme en degré nul. Étant donné $\sigma : \Delta_0 \to M$ lisse, en notant f la fonction constante égale à 1, on obtient

$$\int_{\Delta_0} \sigma^* f = (f \circ \sigma)(0) = 1$$

donc $\mathscr{I}$ est non nul sur les $H^0 \cong \mathbb{R}$, c'est donc un isomorphisme.

Si X possède un recouvrement fini qui est De Rham, alors X est De Rham. X est ainsi de la forme $X = U_1 \cup ... \cup U_k$, avec les U_i ouvert De Rham. On montre le résultat par récurence sur $k \geq 1$. Celui-ci étant évident pour $k = 1$, il suffit en fait de prouver le cas $k = 2$ qui donnera aussi l'hérédité en posant $U = U_1 \cup ... \cup U_{k-1}$ et $V = U_k$. Les suites de Mayer-Vietoris correspondant au recouvrement ouvert (U, V) fournissent le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
... & \longrightarrow & H^{p-1}_{dR}(U) \oplus H^{p-1}_{dR}(V) & \longrightarrow & H^{p-1}_{dR}(U \cap V) & \longrightarrow & H^p_{dR}(X) & \longrightarrow & ... \\
 & & \downarrow \mathscr{I} & & \downarrow \mathscr{I} & & \downarrow \mathscr{I} & & \\
... & \longrightarrow & H^{p-1}_{\infty}(U, \mathbb{R}) \oplus H^{p-1}_{\infty}(V, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^{p-1}_{\infty}(U \cap V, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^p_{\infty}(X, \mathbb{R}) & \longrightarrow & ...
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
... & \longrightarrow & H^p_{dR}(U) \oplus H^p_{dR}(V) & \longrightarrow & H^p_{dR}(U \cap V) & \longrightarrow & ... \\
 & & \downarrow \mathscr{I} & & \downarrow \mathscr{I} & & \\
... & \longrightarrow & H^p_{\infty}(U, \mathbb{R}) \oplus H^p_{\infty}(V, \mathbb{R}) & \longrightarrow & H^p_{\infty}(U \cap V, \mathbb{R}) & \longrightarrow & ...
\end{array}$$

et le lemme des cinq fournit que la flèche du milieu$H^p_{dR}(X) \xrightarrow{\mathscr{I}} H^p_{\infty}(X, \mathbb{R})$ est un isomorphisme.

Si X possède une base De Rham, alors X est De Rham. Notons (U_α) la base DR de X et donnons-nous $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction d'exhaustion. Pour $m \in \mathbb{Z}$, posons

$$A_m = \{x \in X \mid m \leq f(x) \leq m + 1\}$$

$$A'_m = \{x \in X \mid m - \frac{1}{2} \leq f(x) \leq m + \frac{3}{2}\}$$

qui sont des compacts de X vérifiant $A_m \subset A'_m$. (U_α) étant une base d'ouverts de X, on peut choisir un recouvrement fini $(U_{\alpha_{m,i}})$ de A_m tel que

$$B_m := \cup_i U_{\alpha_{m,i}} \subset A'_m$$

qui est donc De Rham d'après l'étape 3. Posons enfin

$$U = \cup_{m \; pair} B_m$$

$$V = \cup_{m \; impair} B_m$$

qui sont également De Rham car les unions les définissant sont disjointes (étape 1). On a enfin

$$X = U \cup V$$

et il reste donc à prouver que $U \cap V$ est De Rham. Or il s'agit de l'union disjointe

$$U \cap V = \cup_{m \in \mathbb{Z}} B_{2m} \cap B_{2m+1}$$

d'ensembles possédant un recouvrement fini De Rham, donc également De Rham (étape 3). Conclusion : X est De Rham (étape 3).

Tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est De Rham. En effet, tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ possède une base De Rham constituée des boules ouvertes euclidiennes.

Conclusion : toute variété différentielle est De Rham. Si X est une variété différentielle, X est recouvert par des cartes (U_i, ϕ_i) telles que U_i soit difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tout comme toute intersection finie des (U_i). En particulier toute base de la topologie de X est une base De Rham, donc X est De Rham.

3.3 Dualité de Poincaré

L'objectif de ce paragraphe est de proposer une adaptation du schéma de la précédente démonstration afin de démontrer le

Théorème 3.3 (dualité de Poincaré). *Pour toute variété orientée X de dimension n, l'accouplement*

$$H^q_{dR}(X) \times H^{n-q}_{dRc}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$$

induit par

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \int_X \alpha \wedge \beta$$

fournit un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} H^q_{dR}(X) & \xrightarrow{\cong} & H^{n-q}_{dRc}(X)^* \\ \alpha & \longmapsto & \int_X \alpha \wedge \cdot \end{array}$$

Notons $\Phi : \alpha \in H^q_{dR}(X) \mapsto \int_X \alpha \wedge \cdot \in H^{n-q}_{dRc}(X)^*$. La première chose à faire est de vérifier la naturalité de Φ, c'est-à-dire la

Proposition 3.2. *Soient X et Y des variétés différentielles de dimension n et q un entier positif.*

1. *Si $f : X \to Y$ est une application lisse préservant l'orientation, alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} H^q_{dR}(Y) & \xrightarrow{f^*} & H^q_{dR}(X) \\ \Phi\big\downarrow & & \Phi\big\downarrow \\ H^{n-q}_{dRc}(Y)^* & \xleftarrow{f^{**}} & H^{n-q}_{dRc}(X)^* \end{array}$$

   où $f^{**} : \varphi \in \mathrm{Hom}(H^{n-q}_{dRc}(X), \mathbb{R}) \mapsto (\omega \mapsto \varphi(f^*\omega)) \in \mathrm{Hom}(H^{n-q}_{dRc}(Y), \mathbb{R})$.

2. *Si (U, V) est un recouvrement ouvert de X, alors le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} H^{q-1}_{dR}(U \cap V) & \xrightarrow{\delta} & H^q_{dR}(X) \\ \Phi\big\downarrow & & \Phi\big\downarrow \\ H^{n-q+1}_{dRc}(U \cap V)^* & \xleftarrow{\delta_c^*} & H^{n-q}_{dRc}(X)^* \end{array}$$

   où δ et δ_c sont les morphismes de connexion des suites de Mayer-Vietoris associées au recouvrement pour les complexes de cochaînes $\Omega^\bullet(X)$ et $\Omega^{n-\bullet}(X)^*$.

Une variété X est dite $\cdot K$ (« point K ») si Φ est un isomorphisme pour tout entier q. On définit exactement comme dans la question précédente une notion de recouvrement $\cdot K$, de base $\cdot K$.

L'union disjointe de variétés différentielles $\cdot K$ est $\cdot K$. C'est exactement la même justification que pour les variétés DR.

Tout ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ est $\cdot K$ (a fortiori tout ouvert convexe de $\mathbb{R}$ aussi). Tout ouvert étoilé de $\mathbb{R}^n$ est difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. Or $H^q_{dR}(\mathbb{R}^n)$ n'est non nul que pour $q = 0$ et est alors isomorphe à $\mathbb{R}$, tout comme$H^{n-q}_{dRc}(\mathbb{R}^n)$. Il s'ensuite bien l'isomorphisme en passant au dual.

Si X possède un recouvrement fini qui est $\cdot K$., alors X est $\cdot K$. Il faut ici bien prendre garde d'appliquer la suite de Mayer-Vietoris au complexe de cochaînes $\Omega^{n-\bullet}(X)^*$ (dual d'un complexe de chaînes) mais avec un morphisme de boucle de degré -1 ; les flèches de la seconde ligne de la suite longue sont également inversées. Du reste, la démonstration est la même.

Si X possède une base $\cdot K$, alors X est $\cdot K$, et par ailleurs tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est $\cdot K$. La preuve est également la même en remplaçant DR par $\cdot K$.

On peut simplifier ce schéma de preuve en introduisant la notion de bon recouvrement, c'est-à-dire un recouvrement tel que toute intersection de ses ouverts est soit vide soit difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. On montre d'abort que tout recouvrement de X peut être raffiné en un bon recouvrement [1, Lemma IV.6.9]. En particulier X possède une base $\cdot K$, et le dernier point permet donc de conclure.

Références

[1] Jean-Pierre Demailly. *Complex Analytic and Differential Geometry*. 2012.

[2] Roger Godement. *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*. Troisième edition, 1973.

[3] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Graduate Texts in Mathematics. Second edition, 2013.

[4] Frank W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1971.