UPMC - L1 **2010-2011**
LM125

Chapitre 1
Correction du TE

Exercice. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ (en fonction de k, P, P^{-1} et des coefficients de D et J) dans les deux cas suivants :

$$A = P^{-1}DP \quad \text{avec} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \lambda_1, ...\lambda_n \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad P \in GL_n(\mathbb{R});$$

$$A = P^{-1}JP \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad P \in GL_4(\mathbb{R}).$$

Correction. Rappel : $GL_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées *inversibles* d'ordre n.

Le premier cas est traité dans le poly du cours :

$$A^k = P^{-1}D^kP \qquad \text{(Théorème 4, page 28)}$$

et

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} \qquad \text{(Proposition 17, même page)}$$

donc pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} P.$$

De même, dans le deuxième cas, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = P^{-1}J^kP.$$

Il s'agit donc de calculer J^k pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour cela, on remarque que

$$J = N + D \quad \text{avec} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I_4$$

De plus,

$$\begin{aligned} DN = (\lambda I_4)N = I_4(\lambda N) &\quad \text{(d) de la Proposition 5 page 13)} \\ = (\lambda N)I_4 &\quad \text{(Proposition 6 page 13)} \\ = N(\lambda I_4) &\quad \text{(à nouveau par le d) de la Proposition 5 page 13)} \\ = ND. & \end{aligned}$$

Autrement dit les matrices N et D *commutent*. On peut donc appliquer la formule du binôme (deuxième égalité ci-dessous) :

$$\begin{aligned} J^k = (N+D)^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} N^j \underbrace{D^{k-j}}_{(\lambda I_4)^{k-j}=\lambda^{k-j} I_4} \\ &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} \underbrace{(N^j I_4)}_{=N^j} \end{aligned} \qquad (*)$$

(**Attention !!** $(\lambda I_4)^{k-j} = \lambda^{k-j} I_4 \neq \lambda I_4$. N'oubliez pas les parenthèses !)

Or un calcul rapide (vu en cours) montre que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad N^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_4,$$

et donc, par récurrence sur $j \geq 4$,

$$N^j = 0 \quad \text{pour tout } j \geq 4.$$

Ainsi, dans la somme $(*)$ ci-dessus, les seuls termes éventuellement non nuls sont les 4 premiers $j = 0, 1, 2$ ou 3 (quand $k \geq 3$ bien sûr). On obtient donc :

$$J^0 = I_4 \text{ (pas besoin de calcul pour ça...)}, \quad J^1 = J \text{ (là non plus...)},$$

$$\begin{aligned} J^2 &= \sum_{j=0}^{2} \binom{2}{j} \lambda^{2-j} N^j \quad \text{(en remplaçant } k \text{ par 2 dans } (*)) \\ &= \underbrace{\binom{2}{0}}_{=1} \lambda^2 N^0 + \underbrace{\binom{2}{1}}_{=2} \lambda^1 N^1 + \underbrace{\binom{2}{2}}_{=1} \lambda^0 N^2 \\ &\quad \left(\text{rappel : } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right) \\ &= \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 2\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda^2 & 2\lambda \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et pour tout $k \geq 3$,

$$\begin{aligned}
J^k &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j \\
&= \sum_{j=0}^{3} \binom{k}{j} \lambda^{k-j} N^j + 0_4 \quad (\text{puisque } N^j = 0_4 \text{ pour tout } j \geq 3) \\
&= \underbrace{\binom{k}{0}}_{=1} \lambda^k N^0 + \underbrace{\binom{k}{1}}_{=k} \lambda^{k-1} N^1 + \underbrace{\binom{k}{2}}_{=\frac{k!}{2!(k-2)!}=\frac{k(k-1)}{2}} \lambda^{k-2} N^2 + \underbrace{\binom{k}{3}}_{=\frac{k!}{3!(k-3)!}=\frac{k(k-1)(k-2)}{6}} \lambda^{k-3} N^3 \\
&= \lambda^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\lambda \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{k(k-1)(k-2)}{6} \lambda^{k-3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & \frac{k(k-1)(k-2)}{6}\lambda^{k-3} \\ 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} \\ 0 & 0 & \lambda^k & k\lambda^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix},
\end{aligned}$$