Curriculum Vitæ

État civil et fonction

Hélène Eynard-Bontemps
Née le 21 décembre 1982 à Riom, Puy-de-Dôme.
Nationalité française.

Maîtresse de conférences HDR à l'Université Grenoble Alpes, UFR IM^{2}AG, Institut Fourier, UMR 5582 (Thème Géométrie et Topologie)
Adresse professionnelle : Institut Fourier, CS 40700, 38058 Grenoble cedex 09

E-mail : `helene.eynard-bontemps@univ-grenoble-alpes.fr`
Page web : `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~eynardbh`

Parcours professionnel

Juin 2022	Obtention de l'**habilitation à diriger des recherches**.
2020 – ...	**Maîtresse de conférences** à l'Université Grenoble Alpes, rattachée à l'Institut Fourier.
2017 – 2020	Échange de services d'enseignement avec un professeur de l'Université Grenoble Alpes puis délégation CNRS à l'Institut Fourier (UMR 5582, UGA).
2010 – 2020	**Maîtresse de conférences** à Sorbonne Université (anciennement UPMC), rattachée à l'IMJ-PRG (UMR 7586). Titularisation : septembre 2011.
2009 – 2010	**Postdoctorante JSPS**, Université de Tokyo (Graduate School of Mathematical Sciences), responsable : Pr. Takashi Tsuboi.
2006 – 2009	**Allocataire de recherche monitrice** (Allocation Couplée). **Thèse de mathématiques** sous la direction d'Emmanuel Giroux, Unité de Mathématiques Pures et Appliquées, ENS Lyon, soutenue le 28 septembre 2009.
Depuis 2006	**Titulaire de l'agrégation de Mathématiques**.
2002-2006	**Élève fonctionnaire stagiaire**, ENS Lyon.

Cursus Universitaire

2006–2009	**Thèse de mathématiques** sous la direction d'Emmanuel Giroux. UMPA, ENS Lyon, soutenue le 28/09/2009.
2005–2006	**Licence (L3) de Lettres Modernes**, Université Paris VII Denis Diderot.
2004–2005	**Master de Mathématiques** (2ème année), ENS Lyon. **Agrégation de Mathématiques**
2003–2004	**Maîtrise de Mathématiques**, ENS Lyon et Imperial College of London.
2002–2003	**Licence de Mathématiques**, ENS Lyon.
2000–2002	**Classes préparatoires aux grandes écoles MPSI-MP***, Lycée Blaise Pascal, Clermont-Ferrand. *Admission à l'école Normale Supérieure de Lyon.*

Formation professionnelle

- Formation "Réflexion sur des questions de souffrance psychique des étudiants", UGA (2018, 2 jours).
- MOOC "Se former pour enseigner dans le supérieur", piloté par le Ministère ESRI (2017-2018).
- Journées *Audimath* sur l'écriture d'articles de diffusion, Lyon (2016, 2 jours).
- Formation "Agir pour l'égalité professionnelle F/H dans la Recherche – Les étapes clés de la carrière en mathématiques" organisée par le CNRS avec le soutien du projet INTEGER (2014, 2 jours).
- Formation "Apprendre à apprendre – Favoriser la réussite des étudiants et diminuer l'échec", UPMC (2013, 2 jours).
- Formation à l'enseignement supérieur, Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur de Lyon (2006-2009, 24 journées de stages et de colloques).

Autres éléments de carrière significatifs

- Membre des projets ANR Symplexe (2007–2011) et GROMEOV (2019–2023).
- CRCT (6 mois en 2013), délégations CNRS (6 mois en 2015, 12 mois en 2019–2020).
- 2013–2017 : participation intensive au projet Analysis Situs (cf. activités pédagogiques).

Expérience de bénévolat

- Membre de l'association *L'Ouvre Porte*, Grenoble (2021-...).
- *Foyer Notre dame des sans abris*, Lyon, France (2008).
- *Bibliothèque braille enfantine*, Paris 11 (2006-2007).
- Soutien scolaire pour les enfants du quartier de Gerland (tous niveaux), Lyon (2002-2003).

Activités pédagogiques et de diffusion

Présentation synthétique

Depuis **quinze ans**, j'ai enseigné à tous les niveaux **du L1 au M2** (recherche ou EEF), dans **diverses thématiques** (algèbre, analyse, probabilités, géométrie) principalement à des étudiants en mathématiques et informatique, mais aussi, pendant neuf ans, en Master EEF (préparation au CAPES de Mathématiques), participant à la **création de nouvelles maquettes** au fil des réformes. J'ai été **responsable d'UE**, coordonnant des équipes de deux à six enseignants, j'ai créé des polycopiés, planches de TD, sujets d'examens, vidéos... La plupart de ces ressources sont disponibles librement depuis ma page web. J'ai enseigné en présentiel et en distanciel, en français et en anglais, en particulier à deux reprises pendant un mois à **AIMS Sénégal** (institut rassemblant des étudiants de tous les pays d'Afrique). J'ai encadré des étudiants en **stage d'initiation à la recherche** en L3 et M1. J'ai suivi un grand nombre de formations à l'enseignement (cf. page précédente), que j'essaie de mettre à profit en favorisant une pédagogie active.

Mon principal accomplissement en matière de pédagogie a été ma participation intensive, de 2013 à 2017, à la **création du site** http://analysis-situs.math.cnrs.fr/ (cf. rubrique dédiée).

J'ai également participé à la **diffusion scientifique** sous diverses formes (cf. rubrique dédiée)

Sauf mention contraire, dans la présentation ci-dessous, les cours ont été effectués en présentiel.

Enseignement

L1	Cours magistral d'analyse (Suites et intégrales), UPMC. Cours-TD (langage mathématique), UGA. TD + colles d'algèbre linéaire, UPMC. TD d'analyse, UGA.
L2	CM (Suites et séries de fonctions, séries entières, séries de Fourier), UGA. TD (Intro. à la topologie et au calcul différentiel ; Probabilités ; Algèbre bilinéaire ; Séries et intégrales généralisées ; Intro. à la théorie des groupes), UGA et UPMC. Colles en classes préparatoires MP, Lycée du Parc.
L3	CM (Topologie des espaces métriques), UGA. TD (EDO et sous-variétés ; Analyse complexe), ENS Lyon.
M1 Recherche	Cours de Géométrie différentielle, AIMS Sénégal. TD (Géométrie différentielle ; Étude analytique des EDO), UPMC.
M1 et M2 EEF	Cours-TD Préparation à l'écrit du CAPES, UPMC et UGA. Préparation à l'oral du CAPES (colles et oraux blancs), UPMC. Préparation à l'oral de l'agrégation, ENS Lyon.

Encadrement

Encadrement d'un **stage** d'initiation à la recherche en **L3** (Théorie de Morse, mai-juin 2016) et en **M1** (Sphère d'homologie de Poincaré, avril-juillet 2017).

Diffusion scientifique

À la liste ci-dessous s'ajoutent plusieurs exposés à destination d'étudiants de premier cycle (séminaire Aromaths à Jussieu, séminaire du magistère de Grenoble, Mathematic Park à l'IHP...), ainsi que des interventions dans les collèges et lycées pour présenter le métier d'enseignant.e chercheur.e en mathématiques.

2019	Participation au film *Man Ray et les équations shakespeariennes* de Quentin Lazzarotto, produit par l'IHP.
2014-2017	Coorganisatrice du séminaire « Aromaths » pour les étudiants en Licence de l'UPMC.
2010-2013	Participation à la fête de la science dans les écoles primaires avec Paris 6 et 7.
2007	Animation d'un stand pour la Fête de la science, Lyon.
	Animation scientifique à l'école primaire (atelier-projet C.I.E.S), Grand Lyon.
2006	Accueil grand public et groupes scolaires lors de l'exposition temporaire *Pourquoi les Mathématiques ?* au Museum de Lyon.
	Co-animation d'un atelier mathématique pour enseignants du secondaire, Congrès National de l'APMEP, Clermont-Ferrand.
2002-2003	Soutien scolaire aux enfants du quartier de Gerland (tous niveaux), Lyon.

Projet Analysis Situs

De 2013 à fin 2016, j'ai participé de façon intensive à un projet collectif regroupant une vingtaine de mathématiciens (dont E. Ghys, D. Gaboriau, M. Boileau, N. Bergeron, F. Béguin, B. Deroin...) ayant abouti à la création du site internet http://analysis-situs.math.cnrs.fr/ autour des travaux de Poincaré sur l'*Analysis Situs* (topologie algébrique). Il s'agit du « second épisode » de l'aventure collaborative ayant donné lieu à la publication du livre *Uniformisation des surfaces de Riemann, retour sur un théorème centenaire* par le collectif de mathématiciens Henri Paul de Saint-Gervais. Le format de ce nouveau volet permet de multiples parcours et niveaux de lectures, en partant soit des textes originaux de Poincaré (retranscrits et commentés), soit d'un cours écrit original, soit d'une collection d'exemples présentés dans de nombreux cours filmés et animations 3D commentées, et bien sûr en navigant entre ces différents parcours.

Mon goût pour la topologie de dimension 3 m'a pour ma part conduite à étudier plus particulièrement le *cinquième complément* à l'Analysis Situs, dont j'ai travaillé aux commentaires, et en particulier la sphère d'homologie ou variété dodécaédrique de Poincaré.

Activités de recherche

Thèmes

Centres d'intérêt : Topologie, géométrie et dynamique : théorie des feuilletages, dynamique en dimension 1, géométrie symplectique, de contact, h-principe de Gromov.

Thèmes de recherche : Feuilletages de codimension 1 sur les variétés compactes, difféomorphismes de l'intervalle et du cercle, actions de groupes (abéliens notamment) sur l'intervalle et le cercle.

Publications

En cas d'audition, je présenterai (outre mes activités pédagogiques) les résultats de [3], [4] et [1].

Publications dans des revues à comité de lecture

[1] Smooth times of a flow in dimension one, à paraître dans les *Annales scientifiques de l'ENS*, arxiv:1905.07582 (2019)

[2] (avec A. Navas) Mather invariant, distortion, and conjugates for diffeomorphisms of the interval, *Journal of Functional Analysis*, Volume 281, Issue 9 (2021). Preprint: arxiv:1912.09305 (2019).

[3] On the connectedness of the space of codimension one foliations on a closed 3-manifold, *Invent. Math.* 204 (2016), no. 2, 605–670. Preprint: arXiv:1404.5884 (2014).

[4] (avec C. Bonatti) Connectedness of the space of smooth $\mathbb{Z}^n$ actions on the interval, *Ergodic Theory and Dynam. Systems* 36 (2016), no. 7, 2076–2106. Preprint: arXiv:1209.1601 (2012).

[5] A connectedness result for commuting diffeomorphisms of the interval, *Ergodic Theory and Dynam. Systems* 31 (2011), no. 4, 1183–1191. Preprint : arXiv:0912.1464 (2009).

[6] On the centralizer of diffeomorphisms of the half-line, *Comment. Math. Helv.* 86 (2011), no. 2, 415–435. Preprint : arXiv:0811.1173v1 (2008).

Ouvrages collectifs

[7] Site web *Analysis Situs* : http://analysis-situs.math.cnrs.fr/ (cf. Activités pédagogiques).

Actes de conférences

[8] On the connected components of the space of codimension one foliations on a closed 3-manifold, *Topology Symposium* (Japanese) 57 (2010), p. 29-42.

[9] Centralisateurs des difféomorphismes de la demi-droite, *Actes du Séminaire TSG (Grenoble). Volume 27. Année 2008-2009, 117–129.*

Mémoires (thèse et HDR)

[10] Flots et actions de groupes abéliens libres en dimension 1 (HDR, 95 pages).

[11] Sur deux questions connexes de connexité concernant les feuilletages et leurs holonomies (Thèse, 128 pages), disponible sur `http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00436304/fr/`.

Prépublications

[12] (avec A. Navas) Arc connectedness for the space of smooth $\mathbb{Z}^d$ actions on 1-manifolds. arxiv:2103.06940 (2020).

[13] Arithmetic properties of the centralizers of diffeomorphisms of the half-line, arXiv:1011.3454 (2010).

Communications

- **Exposés dans des conférences et workshops internationaux** (**2010** : *School on Periodic Approximation in Ergodic Theory* (Pisa, Italie), *Topology symposium* (Okayama, Japon) ; **2011** : *Workshop on holomorphic foliations* (Porto), *Workshop on Global Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity* (CIRM, Luminy), *New Trends in Symplectic and Contact Geometry* (Castro Urdiales, Espagne), *Todai forum, Geometry and dynamics* (Lyon) ; **2012** : *Workshop on Symplectic Geometry, Contact Geometry and Interactions VI* (Madrid), *Foliations 2012* (Lodz, Pologne)) ; **2013** : Conférence *Geometry and foliations 2013*, Tokyo, Japon, *B*Γ *School*, (Tokyo) ; **2014** : *British Mathematical Colloquium*, Geometry Workshop (Londres, Royaume-Uni), Conférence *Foliations 2014*, Madrid, Espagne) ; **2017** : *Rencontre ANR microlocal*, Grenoble, *Workshop on symplectic foliations* (Lyon) ; **2018** : *Congrès de la SMF* (Lille), *MATRIX program: Dynamics, Foliations and Geometry in dimension 3* (Creswick, Australie) ; **2019** : *BIRS-CMO Workshop : Ordered Groups and Rigidity in Dynamics and Topology* (Oaxaca, Mexique), *Journées de dynamique 2019* (Paris).
- **Exposés dans des séminaires spécialisés ou colloquium** (2010 : Paris 6, 7, 13, Clermont-Ferrand, Strasbourg, Tokyo, Bordeaux, Dijon ; 2011 : Bruxelles, Fribourg (Suisse), Nice ; 2012 : Lille, Munich, Orléans, Utrecht (Pays-Bas), Toulouse, Lyon, Cambridge, Quimper ; 2013 : Avignon ; 2014 : Marseille ; 2015 : Rio de Janeiro, Niteroi (Brésil) ; 2016 : Grenoble, Paris ; 2017 : Strasbourg, Lyon, Clermont-Ferrand ; 2018 : Amiens ; 2019 : Rennes, Bordeaux, Grenoble, Orsay, 2020 : séminaire francophone (en ligne)) ; 2022 : Avignon, Grenoble, Jussieu.

Séjours à l'étranger (autres que conférences et postdoc)

- mai 2017 : Séjour à l'Université de Montréal, invitée par Emmanuel Giroux.
- septembre-décembre 2015 : Séjour à l'Université Fédérale Fluminense, Niteroi, RJ, Brésil, invitée par le Pr. Sebastiao Firmo.
- janvier-février 2014 et 2015 : Séjours d'enseignement de trois semaines à AIMS Sénégal
- mai-juin 2007 : Séjour à l'Université de Tokyo, invitée par le Pr. Takashi Tsuboi.

Résumé des travaux

Les références bibliographiques du texte ci-dessous renvoient d'une part à ma liste de publications (références numérotées de [1] à [12]) et d'autre part à la bibliographie qui se trouve en fin de document (références sous forme des premières lettres du nom du ou des auteurs, suivies d'un numéro si nécessaire).

Mes travaux se situent au carrefour entre topologie différentielle et systèmes dynamiques. Ils concernent plus précisément les **feuilletages** de codimension 1 sur les variétés compactes sans bord et des questions de **dynamique unidimensionnelle** liées à leurs représentations d'holonomie.

Problématique initiale

Un *feuilletage de codimension k*, ou de dimension $n-k$, sur une variété M de dimension n est une partition de M en sous-variétés de dimension $n-k$ immergées injectivement qui est localement modelée sur la partition de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ par les $(n-k)$-plans $\mathbb{R}^{n-k} \times \{\cdot\}$. (Nous nous restreindrons au cas où les *cartes feuilletées* réalisant cette identification sont de classe C^∞).

Typiquement, les orbites d'un champ de vecteurs sans singularité définissent un feuilletage de dimension 1. L'étude qualitative des EDO est d'ailleurs l'une des origines de la théorie des feuilletages : Poincaré et ses successeurs ont compris que plutôt que de considérer les orbites d'un champ de vecteurs indépendamment les unes des autres, il était intéressant de les regarder dans leur ensemble, et d'étudier l'influence de la topologie de la variété concernée sur les propriétés de cet ensemble (penser par exemple au fameux théorème de Poincaré-Bendixson sur les champs de vecteurs du plan). Inversement, l'existence de feuilletages particuliers sur une variété donnée (par exemple les feuilletages *tendus* en dimension 3) peut fournir des informations sur la topologie de cette variété (citons en ce sens les travaux de Novikov, Thurston et Gabaï notamment).

Les premières questions naturelles sur ce sujet sont donc : *quelles variétés possèdent des feuilletages d'une dimension donnée, et que peut-on en dire – notamment, peut-on les classifier et comment ?*

Le cas de la dimension 1 est très particulier en ce que (en régularité C^∞, à laquelle nous nous restreignons dans tout ce qui suit) feuilletages de dimension 1 et champs de droites sont en fait deux facettes d'un seul et même objet : tout feuilletage possède un champ de droites tangent qui le détermine complètement, et tout champ de droites *s'intègre* en un feuilletage (au sens où il lui est tangent).

Au contraire, dans le cadre qui nous intéresse en premier lieu – celui des feuilletages de codimension 1 sur les variétés de dimension 3 – si un feuilletage a toujours un *champ de plans tangent* qui le détermine complètement et auquel on peut donc l'identifier, *la plupart* des champs de plans ne sont pas *intégrables* (tangents à un feuilletage). En effet, on peut montrer facilement que l'espace $\mathcal{F}(M)$ de tous les feuilletages existant sur une variété M de dimension 3 donnée, vu comme le sous-espace des champs de plans *intégrables* dans l'espace $\mathcal{P}(M)$ de *tous* les champs de plans existant sur M, muni de la topologie C^∞ naturelle, est un *fermé d'intérieur vide.* Une toute petite perturbation d'un éventuel champ de plans intégrable "casse" son intégrabilité. Notons au passage que toute variété close de dimension 3 est de caractéristique d'Euler nulle, et que ceci équivaut à l'existence d'un champ de plans, donc l'espace $\mathcal{P}(M)$ est non vide.

Une démarche possible, pour répondre aux questions générales ci-dessus, est alors d'essayer de comparer la topologie de $\mathcal{F}(M)$ à celle de $\mathcal{P}(M)$, qui, elle, est du ressort de la topologie algébrique.

On sait notamment depuis la fin des années 60, d'après des travaux fondateurs de J. Wood [W] et W. Thurston [T1], que sur toute variété close de dimension 3, tout champ de plans peut être déformé continûment en un champ de plans intégrable (résultat généralisé par Thurston en toute dimension dans [T2]). En d'autres termes, *l'inclusion de $\mathcal{F}(M)$ dans $\mathcal{P}(M)$ induit une surjection entre les composantes connexes (par arcs) de ces deux espaces.*

On peut alors se demander si cette inclusion n'est pas en fait une *équivalence d'homotopie faible* (induisant une bijection entre tous les groupes d'homotopie), ou, dans le langage de Gromov, si les feuilletages ne satisfont pas un *h-principe paramétrique relatif.* C'est d'autant plus tentant que ce type de résultats existe dans le domaine voisin de la géométrie de contact : dans les années 80, Y. Eliashberg [El] a spectaculairement généralisé les techniques de Thurston pour montrer une telle équivalence pour les structures de contact dites *vrillées* en dimension 3, et il a très récemment obtenu avec Borman et Murphy dans [BEM] un résultat analogue (très convoité) en dimension supérieure.

Résultats principaux : des feuilletages aux difféomorphismes de l'intervalle

Durant ma thèse [11], je me suis intéressée à la question suivante (qui correspond, dans le langage de Gromov, au cas "à un paramètre relatif" (pour les feuilletages en dimension 3), i.e. à la question de l'injectivité de l'application induite par l'inclusion entre les π_0 de $\mathcal{F}(M)$ et $\mathcal{P}(M)$) :

Question 1. *Deux feuilletages dont les champs de plans tangents sont homotopes peuvent-ils être reliés par un chemin continu de feuilletages (i.e. de champs de plans intégrables) ?*

Une idée pour répondre à cette question est d'établir une version à paramètre relative de la construction de Thurston : partir du chemin de champs de plans donné et les déformer tous en feuilletages par la méthode de Thurston, de façon continue par rapport au paramètre (et sans toucher les extrémités). Bien sûr, les choses ne sont pas si simples. Le procédé de Thurston nécessite de nombreux choix (triangulation, arcs transverses aux feuilletages...) qui ne peuvent a priori pas être faits continûment, et il ne laisse pas inchangé un champ de plan donné, même si celui-ci s'avérait déjà intégrable.

A. Larcanché [La] avait dans sa thèse contourné cette difficulté dans deux cas particuliers, répondant alors positivement à la question ci-dessus : le cas où M est un fibré en cercles et où les deux feuilletages considérés sont transverses aux fibres, et le cas où les deux feuilletages sont *tendus* et suffisamment proches. L'outil clef de Larcanché, commun à ses deux résultats, est basé sur un résultat profond de dynamique unidimensionnelle dû à Herman [H].

Dans ma thèse, je me suis inspirée des techniques de Thurston, Larcanché, mais aussi d'Eliashberg dans le travail susmentionné [El] pour répondre (partiellement) à la question 1 dans le cas général :

Si deux feuilletages C^∞ ont des champs de plans tangents homotopes, ils peuvent être reliés par un chemin continu de feuilletages C^1.

En fait, les feuilletages du chemin que je construisais étaient C^∞ en dehors de tores épais $\mathbb{T}^2 \times [0,1] \subset M$ sur lesquels ils étaient transverses au facteur $[0,1]$, ce qui réduisait la question 1 à une nouvelle question de connexité :

Question 2. *L'espace des feuilletages de $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$ tangents au bord et transverses au facteur $[0,1]$ est-il connexe par arcs ?*

Cette question se traduit en problème de dynamique unidimensionnelle de la façon suivante. Un tel feuilletage est entièrement décrit par sa *représentation d'holonomie*, un morphisme h de $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$

dans $\mathrm{Diff}^\infty_+[0,1]$, que nous allons décrire en quelques mots (pour tout $r \geq 1$, $\mathrm{Diff}^r_+[0,1]$ désigne l'espace des difféomorphismes C^r de $[0,1]$ préservant l'orientation, muni de la topologie C^r). Pour tout lacet (lisse) γ de $\mathbb{T}^2$ basé en $O=(0,0)$, le feuilletage de $\mathbb{T}^2\times[0,1]$ considéré est transverse à l'anneau $\gamma\times[0,1]$, et trace donc sur cet anneau un feuilletage de dimension 1, lui aussi transverse au facteur $[0,1]$. On peut donc lui associer une application de premier retour sur la transversale $\{O\}\times[0,1]\subset\gamma\times[0,1]$, que l'on appelle *holonomie du feuilletage le long de* γ, qui ne dépend en fait que de la classe d'homotopie $[\gamma]$ et que l'on note $h([\gamma])\in\mathrm{Diff}^\infty_+[0,1]$. La question sur les feuilletages du tore épais se ramenait donc en fait à la suivante :

Question 2'. *L'espace des représentations de* $\mathbb{Z}^2$ *dans* $\mathrm{Diff}^\infty_+[0,1]$ *est-il connexe par arcs ?*

Cette question est à rapprocher d'un problème posé par Rosenberg il y a une quarantaine d'années, également en lien avec les feuilletages de codimension 1 en dimension 3, et à l'origine de la thèse de J-C. Yoccoz : *L'espace des représentations de* $\mathbb{Z}^2$ *dans les difféomorphismes lisses du cercle est-il localement connexe (par arcs) ?* Ce problème demeure ouvert à ce jour, mais a provoqué de grandes avancées dans la compréhension de ces représentations (cf. notamment [Y2]).

Pour revenir à notre question 2', notons qu'une telle représentation n'est rien d'autre que la donnée d'un couple de difféomorphismes $f,\ g\in\mathrm{Diff}^\infty_+[0,1]$ qui commutent. Il s'agit donc de fabriquer des chemins continus de couples de difféomorphismes qui commutent. Ce problème s'avère délicat, comme nous allons le voir dans la suite, et dans ma thèse, je ne parvenais à déformer de tels couples que parmi les difféomorphismes C^1, résultat qui a donné lieu à l'article [5], basé sur des résultats "classiques" (dans le domaine) de Kopell et Szekeres [K, Sz] améliorés par Sergeraert et Yoccoz [Se, Y2]. Christian Bonatti et moi avons depuis démontré le résultat beaucoup plus fort suivant, inspiré des travaux de Sergeraert [Se] et nécessitant une étude beaucoup plus fine des "champs de vecteurs de Szekeres" (cf. projet 1) déjà manipulés dans [5] :

Théorème 1 (cf. [4])**.** *L'espace des représentations de* $\mathbb{Z}^2$ *dans* $\mathrm{Diff}^\infty_+[0,1]$ *est connexe.*

J'ai observé ensuite, comme corollaire de ce résultat et de travaux bien antérieurs de Plante et Thurston, qu'en fait, pour tout groupe nilpotent N finiment engendré, l'espace des actions lisses de N sur $[0,1]$ est connexe.

Le résultat ci-dessus améliore le résultat de ma thèse en l'énoncé suivant, dont la preuve complète fait l'objet de l'article [3] (où je généralise également les techniques de ma thèse pour prouver la surjectivité des applications induites entre les π_k, $k\geq 1$) :

Théorème 2 (cf. [3])**.** *Soit* M *une variété close de dimension* 3*,* $\mathcal{P}(M)$ *l'espace des champs de plans lisses sur* M *et* $\mathcal{F}(M)$ *l'espace des feuilletages lisses de codimension* 1 *sur* M*. L'inclusion de* $\mathcal{F}(M)$ *dans* $\mathcal{P}(M)$ *induit une bijection entre les composantes connexes de ces deux espaces.*

La question demeure ouverte pour ce qui est des composantes connexes *par arcs*, pour les actions de $\mathbb{Z}^2$ sur $[0,1]$ comme pour les feuilletages. En quelques mots, la difficulté principale provient de ce que certains difféomorphismes de $[0,1]$ ont un centralisateur (dans le groupe des difféomorphismes lisses de $[0,1]$) très compliqué.

Plus précisément, rappelons qu'une action lisse de $\mathbb{Z}^2$ sur $[0,1]$ préservant l'orientation est la donnée de deux difféomorphismes f et g de $[0,1]$ qui commutent et fixent $\{0\}$ et $\{1\}$. La question est de savoir si tout tel couple peut être déformé continûment, parmi de tels couples, en le couple trivial $(\mathrm{Id},\mathrm{Id})$. L'espace $\mathrm{Diff}^\infty_+[0,1]$ étant lui-même contractile, la difficulté principale est de trouver un moyen de déformer qui préserve la commutativité. La régularité C^∞ semble nous aider dans un premier temps en ce qu'elle contraint fortement la forme des couples (f,g) initiaux. En effet, si l'on se restreint pour commencer au cas où l'un des deux difféomorphismes, disons f, n'a pas de point fixe intérieur, des travaux de Szekeres et Kopell [Sz, K] entraînent que l'on se trouve dans l'une des deux situations suivantes (d'intersection non vide) :

- soit le centralisateur de f dans $\mathrm{Diff}^\infty_+[0,1]$ est cyclique (situation générique, résultat dû à Kopell), auquel cas f et g sont des itérés h^q et h^p d'un même difféomorphisme h, et on est ramené à déformer un seul difféomorphisme ;

- soit f est le temps 1 d'un champ de vecteurs ξ de classe C^1 sur $[0,1]$ et C^∞ sur $]0,1[$, et le centralisateur de f dans $\mathrm{Diff}^\infty_+[0,1]$ est précisément constitué des éléments C^∞ du flot de ξ.

Insistons au passage sur le fait que le résultat de Kopell évoqué ci-dessus montre que génériquement, un difféomorphisme lisse de $[0,1]$ sans point fixe intérieur ne se plonge pas dans un flot C^∞ (sinon son centralisateur contiendrait tous les éléments de ce flot et ne serait donc pas cyclique).

Dans le second cas, si ξ est C^∞ sur $[0,1]$, on peut simplement déformer g en Id dans flot de ξ (connexe par arcs), donc dans le centralisateur de f, sans bouger f, puis déformer (f,Id) en $(\mathrm{Id},\mathrm{Id})$. Mais les travaux de Szekeres susmentionnés ne donnent a priori que la régularité C^1, et Sergeraert [Se] a donné un exemple de difféomorphisme lisse f (sans point fixe dans $]0,1[$) qui est le temps 1 d'un flot C^1 mais pas C^2. Cependant, il s'avère que dans sa construction, seuls les temps entiers du flot sont C^∞, et on est donc aussi dans le premier cas ci-dessus où l'on sait déformer.

La question cruciale qui s'est posée au début de ma thèse était alors de savoir si un champ de vecteurs C^1 sur $[0,1]$ sans singularité dans $]0,1[$ pouvait avoir ses temps 1 et $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (et donc tous les temps $t \in \mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$, sous-ensemble dense de $\mathbb{R}$) lisses sans être lisse lui-même. J'ai répondu par la positive dans l'article [6], en combinant la construction de Sergeraert à des techniques de type "déformation par conjugaisons à la Anosov–Katok", classiques en systèmes dynamiques. Vue la méthode utilisée, il était naturel de se demander si l'on ne pourrait pas en fait construire un tel exemple pour tout nombre α *de Liouville*, i.e. non diophantien (rappelons qu'un nombre α est diophantien s'il est "mal approché par les rationnels" au sens où il existe C et $\nu > 0$ tels que pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$, $|q\alpha - p| > \frac{C}{q^{1+\nu}}$). C'est ce que j'ai fait dans [13] :

Théorème 3. *Pour tout nombre α de Liouville, il existe un champ de vecteurs C^1 sur $[0,1]$, ne s'annulant pas sur $]0,1[$, dont les temps t du flot sont lisses pour tout t appartenant à un Cantor K contenant 1 et α, mais dont d'autres temps du flot ne sont pas C^2.*

Cela constituait certes une amélioration de [6], mais cela soulevait surtout une autre question, a priori plus difficile : *inversement, si les temps 1 et α* diophantien *d'un champ de vecteurs C^1 sur $[0,1]$, sans singularité dans $]0,1[$, sont C^∞, le champ est-il lui-même C^∞ ?*

J'ai souhaité étudier cette question avant de soumettre le preprint [13], et j'y ai finalement répondu positivement très récemment, en m'inspirant de célèbres travaux d'Herman et Yoccoz [H, Y1] sur la linéarisation des difféomorphismes du cercle. Ces deux derniers résultats sont donc réunis dans un même article [1], où j'obtiens en fait, pour le deuxième point, l'énoncé plus général suivant (où le flot C^1 est remplacé par un "flot C^0", sur un intervalle quelconque) :

Théorème 4. *Soit $(f^t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'homéomorphismes d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ définissant une action non libre (ce qui équivaut ici à l'existence d'un point fixe global). Si f^1 et f^α sont C^∞ pour un nombre α diophantien, alors $(f^t)_{t\in\mathbb{R}}$ est le flot d'un champ de vecteurs C^∞.*

On peut vérifier que le cas où l'action est libre correspond précisément au résultat d'Herman et Yoccoz évoqué ci-dessus : tout difféomorphisme C^∞ du cercle de nombre de rotation diophantien est conjugué à la rotation correspondante par un difféomorphisme C^∞. Comme dans le cas du cercle, le théorème ci-dessus possède une version en différentiabilité finie.

Je montre par ailleurs dans le même article :

Théorème 5. *Soit $(f^t)_{t\in\mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'homéomorphismes d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ définissant une action non libre. Si f^1 et f^α sont C^∞ pour un nombre α irrationnel, alors l'ensemble des temps lisses du flot contient un ensemble de Cantor.*

Ce résultat est cette fois-ci en contraste avec un autre théorème de Yoccoz [Y2] montrant que pour une action libre, l'ensemble des temps lisses peut être réduit à $\mathbb{Z}+\alpha\mathbb{Z}$.

Je me suis depuis intéressée avec Andrés Navas aux actions sur l'intervalle et sur le cercle en "régularité intermédiaire".

Vers la période où C. Bonatti et moi prouvions la connexité de l'espace des actions lisses de $\mathbb{Z}^d$ sur le segment $[0,1]$ (cf. Théorème 1), A. Navas a obtenu la connexité par arcs de l'espace des actions C^1 de $\mathbb{Z}^d$ sur le segment ou sur le cercle [Na1]. Dans ce domaine, la régularité étudiée a une importance immense, et les techniques employées par Navas n'ont rien à voir avec celles de notre article [4]. Elles mettent crucialement en jeu la question suivante :

Étant donnée une action d'un groupe (éventuellement seulement $\mathbb{Z}$) sur V (désignant le segment ou le cercle), sous quelle condition peut-on la rapprocher par conjugaison d'une action par isométries (l'action triviale pour le segment).

Navas répond à cette question pour les groupes abéliens (en fait plus, mais ce sont ceux qui nous intéressent ici) en régularité C^1 dans [Na1] : il faut et il suffit que les éventuels points fixes soient paraboliques (i.e. que la dérivée des difféomorphismes en ces points soit 1). En différentiabilité supérieure (C^{1+bv}, i.e. C^1 avec une dérivée à variation bornée), il introduit dans [Na2] la *distorsion asymptotique*, définie, pour un difféomorphisme f de classe C^{1+bv} de V par :

$$\mathrm{dist}_\infty(f) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathrm{var}(\log Df^n)$$

(la limite existe et est finie), et montre qu'une CNS au fait d'être rapprochable d'une action par isométrie dans cette régularité est l'annulation de la distorsion asymptotique des générateurs. Dans le cas du cercle, pour des difféomorphismes de nombre de rotation irrationnel et dont la dérivée est en outre *absolument continue*, Navas montre que cette annulation est en fait automatique. Sur le segment en revanche, il exhibe des exemples (sans points fixes hyperboliques) pour lesquels la distorsion asymptotique est non nulle.

Dans un travail en commun récent [2], nous relions cette obstruction (au fait d'être rapprochable de l'identité par conjugaison), dans le cas d'un difféomorphisme C^2 du segment sans point fixe intérieur, à une obstruction plus classique, à savoir la *non trivialité de l'invariant de Mather*. En quelques mots, l'invariant de Mather M_f d'un tel difféomorphisme f est un C^2-difféomorphisme du cercle (défini à pré- et post-composition par des rotations près) qui est trivial si et seulement si f se plonge dans un flot C^1 sur $[0, 1]$, ce qui, comme nous l'avons déjà évoqué n'est génériquement pas le cas. Il ne dépend que de la classe de conjugaison C^1 de f *parmi les difféomorphismes* C^2, et tend vers l'identité si f tend vers l'identité (en topologie C^2). En particulier, si f est rapprochable de l'identité par conjugaison C^2, son invariant de Mather est nécessairement trivial.

Plus généralement (sans hypothèse sur les points fixes intérieurs), nous montrons entre autres dans [2] (Corollaire 2) :

Théorème 6. *La distorsion asymptotique d'un difféomorphisme $f \in \mathrm{Diff}^2_+[0, 1]$ est nulle si et seulement si f est le temps 1 d'un champ de vecteurs C^1 dont la dérivée s'annule en chacun de ses points singuliers.*

Notons que cet énoncé est faux sur le cercle où, génériquement, un difféomorphisme C^2 de nombre de rotation irrationnel ne se plonge pas dans un flot C^1 (alors qu'on a vu que sa distorsion asymptotique était nulle).

Pour les difféomorphismes sans point fixes intérieurs et paraboliques au bord, on a en fait la relation explicite : $\mathrm{dist}_\infty(f) = \mathrm{var}(\log DM_f)$. Ceci permet notamment d'étendre certaines propriétés bien connues de l'invariant de Mather (continuité, invariance par conjugaison C^1...) à la distorsion asymptotique, mais seulement, a priori, pour les difféomorphismes C^2 et sans points fixes intérieurs. En fait, on montre ces propriétés en toute généralité par d'autres techniques, et on montre inversement, dans un article ultérieur [12], que l'invariant de Mather, ainsi que les preuves "C^2" se généralisent en différentiabilité C^{1+bv}.

Les outils développés dans ces deux articles permettent de démontrer un nouveau résultat de connexité :

Théorème 7. *L'espace des actions de $\mathbb{Z}^d$ par C^2-difféomorphismes d'une variété compacte de dimension 1 est C^{1+ac}-connexe par arcs.*

Quelques projets

1. Centralisateurs en différentiabilité finie

La construction menant au théorème 3 ci-dessus est en fait locale et concerne les *contractions ou dilatations de la demi droite* $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, i.e. les difféomorphismes C^r de $\mathbb{R}_+$, $r \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $r \geq 2$, ne fixant que 0. D'après Szekeres, Sergeraert et Yoccoz [Sz, Se, Y2], un tel difféomorphisme f est toujours le temps 1 d'un champ de vecteurs C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et C^{r-1} en dehors de 0 (et pas en 0 en général), que l'on appellera *champ de Szekeres* de f, dont le flot constitue le centralisateur C^1 de f, le centralisateur C^k, $k \in \mathbb{N}^*$, étant par suite constitué des éléments de ce flot qui sont C^k.

Le théorème 3 (dans sa version originale où $[0, 1]$ est remplacé par $\mathbb{R}_+$) montre que dans le cas $r = \infty$, le sous-groupe des temps lisses peut contenir 1 et un irrationnel α sans être $\mathbb{R}$ tout entier, et le théorème 5 affirme qu'il ne peut pas être réduit à $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.

Avec C. Bonatti, nous nous sommes demandé il y a quelques années ce qu'il en était en différentiabilité finie, et nous avons notamment montré (dans un travail non publié) que l'on pouvait construire pour tout $r \geq 2$ fini et tout α irrationnel un exemple de contraction C^∞ dont le centralisateur C^r, $\mathcal{Z}^r_f$ (identifié à l'ensemble des temps C^r du champ de Szekeres), était réduit à $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, $\mathcal{Z}^{r+1}_f$ étant, lui, réduit à $\mathbb{Z}$, et $\mathcal{Z}^{r-1}_f$ étant $\mathbb{R}$ tout entier.

On peut se demander plus généralement à quoi peut ressembler la "suite" de sous-groupes emboîtés de $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{Z}^\infty_f \subset \cdots \subset \mathcal{Z}^r_f \subset \cdots \subset \mathcal{Z}^1_f = \mathbb{R}.$$

C'est une vaste question, à laquelle les estimées de [1] devraient fournir de nouvelles réponses partielles.

2. Actions de $\mathbb{Z}^d$ et distorsion sur l'intervalle et sur le cercle

Les travaux avec Navas évoqués à la fin de la rubrique "résultats principaux" ouvrent de nombreuses perspectives. Ils ont notamment une application inattendue de type "théorie des groupes". Rappelons qu'un élément f d'ordre infini dans un groupe finiment engendré est dit "distordu" si la longueur (pour la métrique des mots) de f^n croît sous-linéairement en n (ceci ne dépend pas du système de générateurs choisi). Plus généralement, un élément d'un groupe quelconque est un élément de distorsion s'il est distordu dans un sous-groupe finiment engendré du groupe considéré.

On peut voir facilement qu'un difféomorphisme C^2 distordu dans $\mathrm{Diff}_+^{1+bv}[0,1]$ a nécessairement une distorsion asymptotique nulle, et se plonge donc dans un flot C^1 d'après les travaux décrits ci-avant.

Question 3. *Réciproquement, tout élément de* $\mathrm{Diff}_+^2[0,1]$ *se plongeant dans un flot* C^1 *est-il distordu dans* $\mathrm{Diff}_+^{1+bv}[0,1]$ *?*

Notons que dans la plupart des énoncés et questions de notre travail avec Navas interviennent à la fois les régularités C^2 (pour laquelle l'invariant de Mather, notamment, est défini) et C^{1+bv}, régularité "naturelle" pour ce qui concerne la distorsion asymptotique.

Dans [12], nous démontrons que l'invariant de Mather peut en fait lui aussi être défini dans cette classe de différentiabilité plus faible.

Se pose inversement la question de savoir si certains résultats en classe C^{1+bv} s'étendent en classe C^2, notamment : parabolicité au bord et invariant de Mather trivial suffisent-ils pour qu'un C^2-difféomorphisme sans point fixe intérieur soit rapprochable de l'identité *en topologie et par conjugaison* C^2 (les résultats évoqués ci-avant montrent que c'est le cas en régularité C^{1+bv}) ? L'analogue de cette question pour les difféomorphismes du cercle de nombre de rotation irrationnel demeure un problème ouvert.

Enfin et surtout, nous avons commencé à exploiter ces outils pour attaquer la question de la connexité par arcs de l'espace des actions de $\mathbb{Z}^d$ sur le segment ou le cercle en régularité intermédiaire (C^{1+bv}, $C^{1+\alpha}$, C^2) (cf. [12]).

Les nouvelles techniques acquises (à travers le travail ci-dessus, mais aussi pour démontrer le théorème 4 ci-avant, et lors de mon travail autour des travaux de Rybicki, cf. section 6 ci-après) constituent en outre autant de nouvelles armes pour (ré)attaquer la même question (de la connexité *par arcs*) en régularité C^∞.

Comme expliqué dans la présentation de mes résultats principaux, cette étude est intimement liée à celle des espaces de feuilletages de codimension 1, qui sont au coeur des projets 4 et 5.

3. Connexité des actions de $\mathbb{Z}^d$ sur le cercle

Un problème nettement plus ambitieux concerne la question analogue pour les actions sur le cercle. Dans ce cas-là, on peut commencer par s'interroger sur la connexité (pas par arcs), qui demeure une question ouverte potentiellement plus accessible. Il ne reste plus pour cela qu'à déterminer si une paire (f,g) de difféomorphismes commutants telle que f a un nombre de rotation irrationnel appartient toujours à la composante connexe de la paire de rotations $(R_{\rho(f)}, R_{\rho(g)})$. Pour cela, deux pistes s'offrent à nous.

Tout d'abord, Yoccoz montre dans [Y2] qu'un difféomorphisme lisse f de nombre de rotation irrationnel appartient à l'adhérence de la classe de conjugaison lisse de la rotation $R_{\rho(f)}$. On peut se demander si ce résultat se généralise à deux difféomorphismes commutants (f,g), auquel cas (f,g) appartiendrait à l'adhérence de la classe de conjugaison lisse de $(R_{\rho(f)}, R_{\rho(g)})$, qui est connexe par arcs, donc d'adhérence connexe, et on aurait gagné. Outre la preuve de Yoccoz, il faudrait commencer par étudier les travaux de Benhenda [Be12] qui a des résultats partiels dans cette direction.

Dans "l'autre sens", Avila et Krikorian ont démontré récemment, dans un travail non encore publié, que l'adhérence de la classe de conjugaison lisse d'un tel f contient la rotation $R_{\rho(f)}$ (on dit que f est C^∞-*réductible*). On peut là encore se demander si leur argument se généralise aux paires de difféomorphismes commutants, auquel cas cette fois-ci ce serait $(R_{\rho(f)}, R_{\rho(g)})$ qui appartiendrait à l'adhérence de la composante connexe par arcs, et donc à la composante connexe, de (f,g).

Ces pistes visent une réponse positive à la question de la connexité. Mais on peut se demander au contraire s'il existe des paires commutantes *stables*, c'est-à-dire telles que toute paire voisine lui est C^∞-conjuguée. D'après un théorème de Fayad et Khanin, les candidats sont à chercher parmi les paires de difféos de nombres de rotation non conjointement diophantiens non C^∞-conjuguées à une paire de rotations (si les nombres de rotations sont conjointement diophantiens, la paire est C^∞-conjuguée à une paire de rotations et on peut trouver une paire voisine non conjuguée à la paire initiale simplement en modifiant légèrement les nombres de rotation). Malheureusement, les exemples de telles paires que l'on connaît sont, par construction, instables (elles s'obtiennent comme limite de paires C^∞-conjuguée à une paire de rotations).

4. Projet éditorial : Travaux de Thurston sur les feuilletages

Gaël Meigniez et moi avons été sollicités par le comité éditorial de la revue *Documents mathématiques* de la SMF pour travailler à l'édition d'un volume concernant les travaux “précoces” de Thurston sur les feuilletages. Leur fulgurance et la brieveté des articles que Thurston leur a consacrés a, à l'époque, décontenancé la communauté, comme il l'explique d'ailleurs très bien dans [T3]. En outre, certaines preuves, voire des textes entiers (sa thèse notamment), n'ont jamais été publiés, demeurant accessibles aux seuls spécialistes, avec un risque réel de perte au fil des générations.

Il s'agit donc de rassembler ce matériel et d'en faire une présentation “digérée” (et digeste). Je suis pour ma part chargée plus spécifiquement de la dimension 3, et Gaël Meigniez, dont les travaux récents [Me] ont déjà grandement contribué à éclaircir et diffuser les idées de Thurston, s'occupera des dimensions supérieures. Je suis en contact avec plusieurs chercheurs proches de Thurston scientifiquement à l'époque (Harold Rosenberg, Robert Roussarie, André Haefliger...), et ai déjà recueilli de précieux témoignages. Je souhaiterais poursuivre ce travail par la création d'un groupe de lecture (pour lequel plusieurs collègues de l'Institut Fourier se sont montrés enthousiastes) dans le but de “défricher le terrain”, et d'identifier les points à commenter plus particulièrement.

4. Espace des feuilletages de codimension 1

Concernant la topologie des espaces de feuilletages, la principale question du domaine est sans-doute la suivante : *l'inclusion de l'espace des feuilletages de codimension* 1 *sur une variété close donnée (de dimension quelconque) dans l'ensemble de tous les champs d'hyperplans est-elle une équivalence d'homotopie faible ?* Rappelons brièvement pourquoi il est légitime de se poser cette question, et pourquoi maintenant en particulier.

En dimension 3, Wood et Thurston [W, T1] ont démontré, il y a une quarantaine d'années, que tout champ de plans était homotope à un feuilletage. Ce résultat possède un analogue pour les structures de contact, dû à Lutz et Martinet. À la fin des années 80, Eliashberg [El] est allé beaucoup plus loin en montrant que les structures de contact *vrillées* (avec un disque vrillé prescrit) satisfaisaient le h-principe paramétrique de Gromov, i.e. qu'il existait une équivalence d'homotopie faible entre l'espace de ces structures et l'espace de tous les champs de plans sur une variété donnée (les résultats de Wood, Thurston, Lutz et Martinet étant, quant à eux, des exemples de h-principe sans paramètre). Dans ma thèse, je me suis appuyée sur les travaux de Thurston et d'Eliashberg pour obtenir un (presque) *h-principe à un paramètre relatif* pour les *feuilletages* : l'inclusion de l'espace des feuilletages dans l'espace des champs de plans induit une bijection entre les composantes connexes de ces deux espaces (cf. le paragraphe “Résultats principaux” pour l'énoncé d'origine et son évolution).

En dimension quelconque maintenant, il est également vrai que tout champ d'hyperplans sur une variété close est homotope à un feuilletage de codimension 1. Ce résultat, dû à Thurston [T2], a été récemment revisité et amélioré par Meigniez [Me]. Enfin, dans le monde “contact" en toute dimension (nécessairement impaire), Borman, Eliashberg et Murphy [BEM] ont récemment obtenu l'analogue de ce résultat (un peu plus compliqué à énoncer cette fois), et sa version paramétrique.

Ayant déjà étudié en profondeur les travaux de Thurston et Meigniez, et plus récemment ceux de Borman, Eliashberg et Murphy, j'aimerais voir dans quelle mesure la combinaison de leurs techniques pourrait fournir un angle d'approche vers un h-principe paramétrique pour les *feuilletages* de codimension un en toute dimension (i.e. une réponse à la question initiale de cette section), comme je l'ai vérifié en dimension 3. Un groupe de travail organisé à Grenoble en 2017 par le projet ANR microlocal autour des travaux d'un étudiant d'Eliashberg, Daniel Alvarez Gavela, basés sur la théorie des “plongements ridés” d'Eliashberg et Mischachev, a notamment donné l'impulsion a un nouveau projet en collaboration avec Emmanuel Giroux sur l'application de ces techniques à la théorie des feuilletages.

Ce resserrement de mes liens avec la géométrie de contact et symplectique avait déjà été amorcé lors de deux groupes de travail autour du h-principe à Houat et Munich (2015), auxquel participait également Eliashberg, et s'est poursuivi en septembre 2017 à l'occasion d'un Workshop organisé à Lyon par Klaus Niederkrüger autour des feuilletages symplectiques. Il se poursuit également à travers le projet suivant.

5. Simplicité du groupe des contactomorphismes

P. Massot (Orsay), S. Courte (Grenoble) et moi-même avons l'an dernier formé un groupe de travail autour de la question de la simplicité du groupe des contactomorphismes C^∞ isotopes à l'identité d'une variété[1], dans lequel sont également intervenus Stéphane Guillermou (Grenoble) et Emmanuel Giroux (Paris, DMA).

[1] Dans tout ce qui suit, les variétés sont supposées compactes sans bord

Cela m'a permis de renouer avec mon domaine de formation initiale, la géométrie de contact et symplectique, tout en apportant mes compétences en feuilletages et systèmes dynamiques/groupes de difféomorphismes, dans lesquels je me suis spécialisée depuis ma thèse.

La complexité de la preuve récente par Rybicki [R] de ce résultat de simplicité a rebuté plusieurs spécialistes du domaine, et travailler à son éclaircissement est une étape nécessaire, tant en soi que pour ses applications (Courte et Massot l'utilisent d'ores et déjà dans [CM] pour montrer l'uniforme perfection, avec une borne explicite, sous certaines hypothèses sur la variété de contact considérée).

Nous avions bien avancé dans notre compréhension, mais les obligations de chacun ont conduit à une "pause" dans ce groupe de travail. Nous souhaitons le reprendre pour aboutir à une production écrite qui se voudra éclaircissante pour le reste de la communauté.

Bibliographie

[AK] D. V. Anosov et A. B. Katok — *New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms.* Trans. Moscow Math. Soc. **23** (1970), 1–35.

[Be12] M. Benhenda — *Circle diffomorphisms: quasi-reducibility and commuting diffeomorphisms.* Nonlinearity **25** (2012), no. 7, 1981–1995.

[BEM] M. S. Borman, Y. Eliashberg et E. Murphy— *Existence and classification of overtwisted contact structures in all dimensions.* Acta Math. **215** (2015), 282–361.

[CM] S. Courte et P. Massot— *Contactomorphism groups and Legendrian flexibility.* ArXiv:1803.07997.

[El] Y. Eliashberg — *Classification of overtwisted contact structures on* 3*-manifolds.* Invent. Math. **98** (1989), 623–637.

[Ep] D. B. A. Epstein — *Commutators of C^∞-diffeomorphisms. Appendix to "A Curious Remark Concerning the Geometric Transfer Map" by John N. Mather.* Comment. Math. Helvetici **59** (1984) 111–122

[FF] B. Farb et J. Franks — *Groups of homeomorphisms of one-manifolds III: nilpotent subgroups.* Ergod. Th. & Dynam. Sys. **23** (2003), 1467–1484.

[FK] B. Fayad et A. B. Katok — *Constructions in elliptic dynamics.* Ergodic Theory & Dynam. Systems **24** (2005), no. 5, 1477–1520.

[H] M. R. Herman — *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations.* Inst. Hautes études Sci. Publ. Math. **49** (1979), 5–233.

[K] N. Kopell — *Commuting diffeomorphisms.* In *Global Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math. XIV, Amer. Math. Soc. (1968), 165–184.

[La] A. Larcanché — *Topologie locale des espaces de feuilletages en surfaces des variétés fermées de dimension 3.* Comment. Math. Helvetici **82** (2007), 385–411.

[Li] W. B. R. Lickorish — *A foliation dor* 3*-manifolds.* Ann. of Math., **82** (1965), 414–420.

[Ma] J. Mather — *Commutators of diffeomorphisms.* Comment.Math. Helvetici **49** (1974), 512–528.

[Me] G. Meigniez — *Regularization and minimization of codimension-one Haefliger structures.* J. Differential Geom. **107** (2017), no. 1, 157–202.

[Na1] A. Navas — *Sur les raprochements par conjugaison en dimension 1 et classe C^1.* Compositio Math. **150** (2014), 1183-1195.

[Na2] A. Navas — *On conjugates and the asymptotic distortion of* 1*-dimensional C^{1+bv} diffeomorphisms.* Preprint (2018), arXiv:1811.06077.

[R] T. Rybicki — *Commutators of contactomorphisms.* Adv. Math. **225** (2010), no. 6, 3291–3326.

[Se] F. Sergeraert — *Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité.* Invent. Math. **39** (1977), 253–275.

[Sz] G. Szekeres — *Regular iteration of real and complex functions.* Acta Math. **100** (1958), 203–258.

[T1] W. P. Thurston — *A local construction of foliations for three-manifolds.* Differential topology (Proc. Sympos. Pure Math. **27**, Stanford Univ., California, 1973), Amer. Math. Soc. (1975), 315–319.

[T2] W. P. Thurston — *Existence of codimension-one foliations.* Ann. of Math. (2) **104** (1976), no. 2, 249–268.

[T3] W. P. Thurston — *Of proof and progress in mathematics.* Bull. Amer. Math. Soc. **30** (1994), no. 2, 161–177.

[W] J. Wood — *Foliations on 3-manifolds.* Ann. of Math. **89** (1969), 336–358.

[Y1] J-C. Yoccoz — *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne.* Ann. Sci. école Norm. Sup. (4) **17** (1984), 333–359.

[Y2] J-C. Yoccoz — *Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle.* Astérisque **231** (1995), 89-242.

Fonctions d'intérêt collectif

Activités de responsabilités en recherche

- Membre du **conseil d'UMR** de l'Institut Fourier (2021-...) ;
- Membre du **groupe d'experts** Section 25 Rang B à l'UPMC (2011-2015) ;
- Représentante de l'IMJ-PRG au **Conseil Scientifique** de l'UFR de Mathématiques (2013-2017) ;
- Membre extérieur de nombreux **comités de sélection** MCF (Lyon, Paris 7, Paris 13, Clermont-Ferrand, Marseille...) ;
- Activité de **referee**.
- Membre du **comité scientifique** des conférences *Foliations 2016* (Bedlewo, Pologne) et *Aussois 2019* (Géométrie et dynamique, Aussois, France)
- Membre du **comité d'organisation** du trimestre IHP *Topologie symplectique, de contact, et intéractions* (printemps 2021) et de la conférence *Giroux60* (été 2022).
- **Coorganisatrice du séminaire de topologie** de l'Institut Fourier (2021-...).

Activités de responsabilités administratives et pédagogiques

- Membre du **comité parité** de l'IMJ-PRG (2016-2017) ;
- **Coorganisatrice du séminaire "Aromaths"** pour les étudiants en licence de l'UFR de Mathématiques de l'UPMC (2014-2017) ;
- **Coorganisatrice du séminaire des doctorants** de l'IMJ (2010-2012) ;
- **Correspondante** de l'UFR de Mathématiques au **GHET** (Groupement d'harmonisation des emplois du temps de l'UPMC) (2011-2014).