

FLOTS ET ACTIONS DE GROUPES ABÉLIENS LIBRES EN
DIMENSION 1

Hélène EYNARD-BONTEMPS

*À Emmanuel, mon mentor et ami très cher,
à l'occasion de son soixantième anniversaire.
J'espère que ce modeste cadeau te plaira,
toi qui l'as tant réclamé!*

Table des matières

Remerciements	3
Liste des travaux présentés	7
Quelques notations et définitions	9
Introduction	11
Problématique initiale	11
Présentation des résultats	13
Structure du mémoire	21
Perspectives concernant les feuilletages	22
1 Bases sur les difféomorphismes commutants	25
1.1 Centralisateur C^1 d'une contraction C^2 (ou plus)	25
1.2 Sur l'invariant de Mather	28
1.3 Visualisation de la « plongeabilité »	31
2 Centralisateurs exotiques	33
2.1 Principe général	33
2.2 Exemple de Sergeraert	37
2.3 Centralisateur « irrationnel » en régularité infinie	39
2.4 Centralisateur « irrationnel » en régularité finie	42
2.5 Perspectives	50
3 Flots sur l'intervalle	51
3.1 Lien avec les difféomorphismes du cercle	52
3.2 Cœur commun des deux preuves	55
3.3 Preuve des propositions clefs	59
3.4 Perspectives	62
4 Déformation d'actions lisses sur l'intervalle	63
4.1 Actions de \mathbb{Z}^n	64
4.2 Actions de groupes à croissance polynomiale	69
4.3 Perspectives	71

5	Actions en régularité intermédiaire	73
5.1	Réductibilité, var. asymptotique et inv. de Mather	74
5.2	Connexité des actions C^2 de \mathbb{Z}^d sur $[0, 1]$	83
5.3	Perspectives	84
	Bibliographie	87

Remerciements

Si certains pensent que les mathématiques sont une discipline principalement solitaire, ce n'est clairement pas comme ça que j'ai vécu mon métier d'enseignante-chercheuse ces douze dernières années, et je sais d'avance que je ne pourrai pas remercier ici tous ceux qui ont contribué à la richesse de cette expérience. Que ceux qui ne seront pas cités ici nommément me pardonnent.

C'est sans-doute moins commun pour une habilitation que pour une thèse de doctorat, mais mes premiers remerciements iront aujourd'hui encore à Emmanuel Giroux, qui a dirigé la mienne il y a maintenant une quinzaine d'années. Je dois énormément à ses enseignements, à sa façon unique de voir les maths et de les raconter, et à la constance de son intérêt pour mon travail et de ses encouragements. C'est bien simple, sans lui, j'aurais probablement arrêté les maths depuis longtemps (je n'aurais d'ailleurs jamais commencé!). En particulier, sans son inestimable confiance en mes capacités, je ne sais pas si ce mémoire aurait vu le jour, et je suis donc très heureuse de pouvoir le lui dédier à l'occasion de son soixantième anniversaire.

Je suis également très reconnaissante envers Bassam Fayad, Étienne Ghys et Takashi Tsuboi d'avoir accepté de consacrer de leur précieux temps à la lecture de ce mémoire, d'autant qu'ils ont tous trois joué un rôle déterminant dans ma carrière. Le plus ancien résultat présenté ici doit beaucoup à Bassam qui m'a, avec Sylvain Crovisier, initiée aux difféomorphismes du cercle non linéarisables, et ses travaux et d'autres discussions plus récentes ont été d'importantes sources d'inspiration. Étienne, par ses merveilleux cours et exposés, n'est pas étranger à mon goût pour la géométrie et les systèmes dynamiques, et je suis très honorée qu'il se penche à son tour sur mes travaux. « Tsuboi Sensei », par son invitation en 2007, a joué un rôle déterminant et imprévu dans le déroulement de ma thèse qui a affecté toute la suite de mes recherches, et le postdoc qu'il m'a permis d'obtenir à Tokyo deux ans plus tard fut une expérience inoubliable (et trop courte).

Je suis également très honorée par la présence dans mon jury de personnalités comme Marie-Claude Arnaud, Christian Bonatti et Frédéric Le Roux. Marie-Claude et moi nous sommes malheureusement croisées, puisqu'elle est arrivée à l'IMJ-PRG alors que j'en parlais, mais j'espère que cette occasion sera le point de départ de riches échanges. Christian m'a offert ma première expérience de collaboration ; outre son rôle déterminant dans ma prise d'autonomie « après-thèse », celle-ci a été intense et extrêmement riche tant humainement que mathématiquement, et je suis contente qu'il nous reste des choses à écrire

ensemble. J'ai eu la chance d'avoir Frédéric pour collègue à Jussieu ; enseigner avec quelqu'un d'aussi investi et inventif a été un réel plaisir et une source d'inspiration, et je regrette peut-être simplement que parmi toutes les choses sur lesquelles nous avons échangé, il n'y ait pas eu un peu plus de maths (niveau recherche).

De manière générale, j'ai bénéficié à Jussieu d'un cadre de travail privilégié, avec des collègues aussi passionnants que passionnés. C'est sans conteste là que j'ai vécu les meilleurs pauses café de ma vie, et ce n'est pas seulement grâce au chocolat de luxe et aux divines pâtisseries de Grégory. Je tiens à remercier celui-ci pour son accueil dès le tout premier jour et les années d'amitié qui ont suivi, dans la joie comme dans la tourmente. Lui et Maxime Z., qui nous a vite rejoints, ont grandement contribué à faire de l'équipe AA ma « seconde famille » dont j'ai eu bien du mal à me séparer. C'est aussi là que j'ai rencontré Clémence (avant tout mathématicienne, mais tout-de-même aussi un contact féminin bienvenu dans cet univers masculin), dont j'admire la persévérance, y compris en amitié, et que je remercie pour sa relecture attentive de ce texte. Je ne veux et ne peux pas citer ici tous les membres de cette glorieuse équipe en perpétuelle évolution, ni *a fortiori* tous les collègues des équipes et labos voisins, mais je remercie notamment, outre les susnommés, Erwan, Sophie, Laurent, Emmanuel, Vincent, Maxime W., Antonin, Alex et Fred P. pour les premières années et leurs joyeuses sorties, puis Penka, Sobhan et Marco pour les dernières. Enfin et surtout, l'ambiance d'AA n'aurait rien eu à voir sans sa personnalité (selon moi) la plus forte (et la moins discrète ;)), Nicolas, que je m'estime chanceuse au delà des mots d'avoir pu côtoyer toutes ces années, et encore plus maintenant.

C'est en particulier à Nicolas que je dois la chance d'avoir participé au projet *Analysis Situs* au sein du collectif Henri Paul de Saint-Gervais (version 2.0). Cette expérience s'est révélée ma plus belle aventure mathématique jusqu'à présent. Les mathématiques ne m'ont jamais paru aussi vivantes que lors de nos réunions, à deux ou à vingt, et, si ma recherche a sans-doute pâti sur le coup de mon investissement quasi total dans ce projet pendant quatre ans, j'y ai fait des rencontres précieuses, et le savoir, la motivation et la satisfaction que j'y ai accumulés m'ont donné de l'élan pour de nombreuses années. Pour la première fois, grâce à ce projet, j'ai eu la sensation d'avoir trouvé ma place dans ce métier. Je tiens donc à remercier ici tous mes comparses, en espérant être amenée à travailler avec eux de nouveau.

À l'achèvement de ce projet a succédé de peu mon départ pour Grenoble, dans une situation un peu précaire au début mais où j'ai néanmoins été, une fois encore, très bien accueillie, notamment par le directeur de l'Institut Fourier de l'époque, Thierry Gallay. J'ai eu le plaisir d'y retrouver une amie de longue date, Evelyne, que je remercie d'avoir relu ce mémoire bien éloigné de ses intérêts mathématiques, et à qui je dois mon début d'intégration. L'enseignement y a aussi contribué et je remercie les collègues, notamment Romain, Damien, Pierre W., Pierre D., Rémi, Raphaël, JB, Emmanuel et François avec qui j'ai eu plaisir à interagir dans ce domaine, puis dans d'autres. Cela a aussi été le point de départ d'une amitié précieuse avec Éric, dont j'ai pu apprécier la valeur dans les bons moments comme dans les plus durs (et longs !). Plus tard, j'ai appris à connaître Stéphane, que je n'arriverai jamais à remercier assez pour tout ce qu'il a fait pendant ces deux

dernières années. Mon travail et moi lui devons énormément, et ce n'est pas de gaîté de cœur que je le vois partir le premier. J'ai aussi eu beaucoup de chance d'avoir pour dernier voisin de bureau Christophe, dont j'ai pu apprécier la philosophie et la disponibilité. Il me faut enfin remercier ici ma « hiérarchie », Thierry puis Louis, Hervé et Dominique, pour leur attention et leur patience.

Je n'oublie pas dans cette liste Sylvain, son enthousiasme et sa grande gentillesse, dont j'ai eu plaisir à être brièvement la voisine, mais je l'associe ici à Patrick pour notre lutte acharnée et sans merci pour et contre Rybicki, lutte dont les interruptions ont au moins eu l'avantage de me remettre le pied à l'étrier plusieurs fois plutôt qu'une seule :). Ma reconnaissance envers Patrick, que je connais maintenant depuis vingt ans (!!), va bien au-delà, et ne se limite pas non plus à sa précieuse assistance TeXnique. Il a assumé à merveille son rôle de « grand-frère mathématique », et j'ai encore beaucoup à apprendre de lui (même si je n'ai pas suivi son conseil pour le titre de ce mémoire, qu'il aurait, lui, intitulé « Sur diverses applications de la formule de Faà di Bruno »...).

Dans les collègues plus indirects, je suis toujours heureuse de retrouver régulièrement Thomas V., Jonathan B. et Katie M. en conférences, où j'ai d'ailleurs souvent été invitée grâce à eux, et je les remercie de leur intérêt pour mon travail (Thomas étant notamment l'une des toutes premières personnes à qui j'ai raconté ma thèse) et tout ce que j'ai appris grâce à eux. Je dois également beaucoup aux organisateurs historiques de la désormais classique *École d'hiver d'Aussois*, Adrien Boulanger, Charles Fougeron et Selim Ghazouani. Outre le plaisir que j'ai à participer à cet événement chaque année, leur invitation à donner un mini-cours lors de l'édition 2018 est à l'origine du chapitre central de ce mémoire. Je suis en outre heureuse d'avoir depuis démarré une collaboration avec Selim, et j'espère qu'il ne se laissera pas décourager par mes doutes perpétuels. Je suis également très honorée d'être la collaboratrice d'Andrés Navas, pour qui j'ai beaucoup d'admiration et de qui j'apprends énormément. Je remercie aussi globalement toutes les personnes qui m'ont invitée à présenter mes travaux, c'est un exercice toujours très enrichissant pour moi.

Je saisis enfin l'occasion de remercier ici mes proches non (nécessairement) mathématiciens d'hier et d'aujourd'hui pour tous les moments partagés qui contribuent à mon équilibre, pour leur patience et pour leur soutien sans cesse renouvelé, notamment ces dernières années. J'ai beaucoup de chance d'être si bien entourée. Un immense merci notamment à Sébastien qui était à mes côtés pendant toute la période où les travaux présentés ici ont vu le jour. Ses encouragements n'ont pas cessé depuis, et cela compte beaucoup pour moi. Un grand merci enfin à : mes amies Julia et Ameline, ma famille grenobloise, ma famille deuilloise, mon père, mes frères et sœurs, leur adorable progéniture, et ma très chère maman, qui m'a notamment offert le cadre idéal pour rédiger la majeure partie de ce mémoire :)

Liste des travaux présentés

Publications dans des revues à comité de lecture

- [Ey-Na19] (avec A. Navas) *Mather invariant, distortion, and conjugates for diffeomorphisms of the interval*, Journal of Functional Analysis, Volume 281, Issue 9 (2021). Preprint : arxiv:1912.09305 (2019).
- [Ey19] *Smooth times of a flow in dimension one*, à paraître dans les Annales scientifiques de l'ENS, arxiv :1905.07582 (2019).
- [Bo-Ey16] (avec C. Bonatti) *Connectedness of the space of smooth \mathbb{Z}^n actions on the interval*, Ergodic Theory and Dynam. Systems 36 (2016), no. 7, 2076–2106. Preprint : arXiv:1209.1601 (2012).

Prépublications

- [Ey-Na21] (avec A. Navas) *Arc connectedness for the space of smooth \mathbb{Z}^d actions on 1-manifolds*. arxiv :2103.06940 (2020).

Autres publications en lien direct avec le contenu du mémoire

- [Ey16] *On the connectedness of the space of codimension one foliations on a closed 3-manifold*, Invent. Math. 204 (2016), no. 2, 605–670. Preprint : arXiv:1404.5884 (2014).
- [Ey11'] *A connectedness result for commuting diffeomorphisms of the interval*, Ergodic Theory and Dynam. Systems 31 (2011), no. 4, 1183–1191. Preprint : arXiv:0912.1464 (2009).
- [Ey11] *On the centralizer of diffeomorphisms of the half-line*, Comment. Math. Helv. 86 (2011), no. 2, 415–435. Preprint : arXiv:0811.1173v1 (2008).

Quelques notations et définitions

Fonctions C^r . Soit I un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide et u une fonction de I dans \mathbb{R} . On note

$$\|u\|_0 = \sup_I |u| \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

(l'intervalle I sur lequel on prend le sup sera en général clair d'après le contexte ; sinon, on l'explicitera en notant $\|u\|_{0,I}$). Si u est de classe C^r , avec $r \in \mathbb{N}$, on note

$$\|u\|_r = \max_{0 \leq j \leq r} \|D^j u\|_0 \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

Si I est un segment, $\|\cdot\|_r$ définit une norme sur l'ensemble $C^r(I, \mathbb{R})$ qui en fait un espace de Banach.

On s'intéressera en outre à des fonctions de régularité intermédiaire. Soit $J = [a, b]$ un segment et u une fonction de J dans \mathbb{R} .

Variation bornée. Pour toute subdivision $\sigma = (x_0 = a, \dots, x_n = b)$ de J , on note

$$V(u, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} |u(x_{i+1}) - u(x_i)|.$$

On appelle *variation totale* de u sur J la valeur

$$\text{var}(u, J) := \sup_{\sigma} V(u, \sigma) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

et on dit que u est à *variation bornée sur J* si $\text{var}(u, J)$ est fini. Si le contexte est suffisamment clair, on omettra J : on dira simplement que u est à variation bornée et on notera $\text{var}(u)$ sa variation totale (sur J). On note $\text{Diff}^{1+bv}(J)$ l'espace des C^1 -difféomorphismes de J dont le log de la dérivée est à variation bornée, muni de la distance :

$$d_{1+bv}(f, g) = \|f - g\|_1 + \text{var}(\log Df - \log Dg).$$

On définit de façon analogue $\text{Diff}^{1+bv}(\mathbb{S}^1)$.

Absolue continuité. On rappelle que $u : J \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *absolument continue* s'il existe une fonction v intégrable (au sens de Lebesgue) sur $[a, b]$ telle que pour tout $x \in [a, b]$,

$$u(x) - u(a) = \int_a^x v(t) dt.$$

On notera abusivement Du cette fonction v . Une fonction u absolument continue est à variation bornée, et

$$\text{var}(u, J) = \int_J |Du|.$$

On note $\text{Diff}^{1+ac}(J)$ l'espace des C^1 -difféomorphismes de J dont le log de la dérivée est absolument continu, muni de la distance :

$$d_{1+ac}(f, g) = \|f - g\|_1 + \int_J |D \log Df - D \log Dg| = d_{1+bv}(f, g).$$

On définit de façon analogue $\text{Diff}^{1+ac}(\mathbb{S}^1)$ et sa C^{1+ac} -topologie.

Introduction

*Quiconque a considéré les difféomorphismes qui commutent
a du respect pour le problème.*

Harold Rosenberg
(Séminaire Bourbaki, 1977)

Problématique initiale

L'intégralité des travaux présentés dans ce mémoire est motivée par un problème portant sur les feuilletages en surfaces des variétés de dimension 3 et leur classification. Mes travaux sur les feuilletages ayant principalement été effectués durant mon doctorat, j'ai choisi de ne pas les développer dans ce mémoire d'habilitation. J'en donne seulement un bref aperçu dans cette introduction, en guise de motivation pour la suite. Ceux qui préféreraient rentrer rapidement dans le vif du sujet peuvent se rendre directement à la question 2' sans préjudice pour la suite.

Un feuilletage de codimension k d'une variété M de dimension n (disons sans bord pour l'instant) est une partition de M en *feuilles* qui sont des sous-variétés connexes de dimension $n - k$ immergées injectivement, cette partition étant localement modelée sur la partition de $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n-k} \times \mathbb{R}^k$ par les sous-espaces affines $\mathbb{R}^{n-k} \times \{\cdot\}$. Plus précisément, il existe un atlas tel que l'intersection d'une feuille avec chaque ouvert de carte soit envoyée sur la réunion d'un certain nombre de *plaques* $\mathbb{R}^{n-k} \times \{\cdot\}$ (on peut supposer que toutes les cartes ont pour image \mathbb{R}^n tout entier). Nous nous restreindrons au cas où ces *cartes feuilletées* sont de classe C^∞ .

Typiquement, d'après le théorème dit « de la boîte de flot », les orbites d'un champ de vecteurs lisse sans singularité définissent un feuilletage de dimension 1 de la variété qui le porte. L'étude qualitative des équations différentielles ordinaires est d'ailleurs l'une des origines de la théorie des feuilletages : Poincaré et ses successeurs ont compris que, plutôt que de considérer les orbites d'un champ de vecteurs indépendamment les unes des autres, il était intéressant de les regarder dans leur ensemble, et d'étudier l'influence de la topologie de la variété concernée sur les propriétés de cet ensemble (penser par exemple au fameux théorème de Poincaré-Bendixson sur les champs de vecteurs du plan).

Donnons maintenant l'un des premiers exemples non triviaux de feuilletages en surfaces d'une variété close de dimension 3, à savoir le feuilletage de Reeb de la sphère \mathbb{S}^3 . Pour cela on commence par décrire le feuilletage de Reeb du tore plein (pour une variété à bord, on peut définir de façon naturelle les feuilletages transverses ou tangents au bord, le modèle local étant alors la partition de $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \times \mathbb{R}$ par les $(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}) \times \{\cdot\}$ dans le premier cas et celle de $\mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[$ par les $\mathbb{R}^2 \times \{\cdot\}$ dans le second). On peut le visualiser en faisant tourner l'image de gauche de la Figure 1 autour de l'axe vertical (pour obtenir la figure du centre) puis en quotientant par la translation verticale unité (l'image de droite donne une vue en coupe du résultat). Ce feuilletage a une unique feuille compacte, le tore du bord, sur lequel toutes les autres feuilles (topologiquement des disques) s'accumulent. Lorsque ce feuilletage apparaît comme « morceau » d'un feuilletage d'une variété plus grande, on parle de *composante de Reeb*. Les composantes de Reeb jouent un rôle majeur dans la construction et la déformation des feuilletages de codimension 1 en dimension 3. On obtient notamment le feuilletage de Reeb de l'hypersphère \mathbb{S}^3 en recollant deux composantes de Reeb le long de leur bord, en identifiant les parallèles de l'une aux méridiens de l'autre.

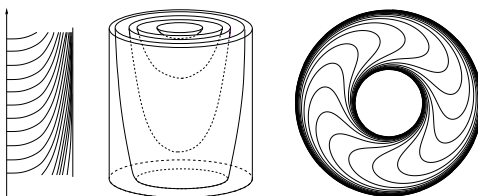


FIGURE 1 – Feuilletage de Reeb du tore plein

Il existe de multiples façons de classer les feuilletages. Lors de l'âge d'or de la théorie, dans les années 70-80, on s'est principalement intéressé à la classification à conjugaison près (topologique ou plus régulière), et à *concordance* près (deux feuilletages sur M étant dits *concordants* s'il existe un feuilletage sur $M \times [0, 1]$ transverse au bord qui « trace » le premier et le second feuilletage sur $M \times \{0\}$ et $M \times \{1\}$ respectivement).

Mais il existe une autre approche très naturelle, de type « *h-principe* » (cf. ci-après), qui consiste à classer les feuilletages à *homotopie près*, deux feuilletages étant dits *homotopes* s'il existe un chemin continu de feuilletages les reliant. C'est l'approche qu'a notamment choisie A. Larcanché dans sa thèse [La07], qui est le point de départ de la mienne. Par *chemin continu* de feuilletages, on n'entend pas déformation des feuilles par une isotopie ambiante, mais chemin dans *l'espace topologique* des feuilletages existant sur la variété, la topologie restant à préciser.

Pour cela, commençons par observer que le cas de la dimension 1 est très particulier en ce que feuilletages de dimension 1 et champs de droites sont en fait deux facettes d'un seul et même objet : tout feuilletage possède un champ de droites tangent qui le détermine complètement, et tout champ de droites (lisse) *s'intègre* en un unique feuilletage (au sens où il lui est tangent).

Au contraire, dans le cadre qui nous intéresse en premier lieu – celui des feuilletages de codimension 1 sur les variétés de dimension 3 – si un feuilletage a toujours un *champ*

de plans *tangent* qui le détermine complètement et auquel on peut donc l'identifier, la *plupart* des champs de plans ne sont pas *intégrables* (tangents à un feuilletage). En effet,

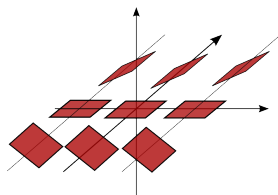


FIGURE 2 – Champ de plans non intégrable sur \mathbb{R}^3

on peut montrer facilement que l'ensemble $\mathcal{F}(M)$ de tous les feuilletages existant sur une variété M de dimension 3 donnée, vu comme le sous-espace des champs de plans *intégrables* dans l'espace $\mathcal{P}(M)$ de *tous* les champs de plans existant sur M , muni de la topologie C^∞ naturelle¹, est un *fermé d'intérieur vide*. Une toute petite perturbation d'un éventuel champ de plans intégrable peut « casser » son intégrabilité. Notons au passage que toute variété close de dimension 3 est de caractéristique d'Euler nulle, et que ceci équivaut à l'existence d'un champ de plans, donc l'espace $\mathcal{P}(M)$ est non vide.

La démarche que nous adoptons pour classifier les feuilletages sur une variété M est d'essayer de comparer la topologie du sous-espace $\mathcal{F}(M)$ à celle de l'espace $\mathcal{P}(M)$ qui, elle, est du ressort de la topologie algébrique.

On sait déjà depuis la fin des années 60, d'après des travaux fondateurs de J. Wood [Wo69] et W. Thurston [Th73], que sur toute variété close de dimension 3, tout champ de plans peut être déformé continûment en un champ de plans intégrable (résultat généralisé par Thurston en toute dimension dans [Th76]). En d'autres termes, toute composante connexe par arcs de $\mathcal{P}(M)$ contient au moins un feuilletage, ou encore : *l'inclusion de $\mathcal{F}(M)$ dans $\mathcal{P}(M)$ induit une surjection entre les composantes connexes (par arcs) de ces deux espaces*.

On peut alors se demander si cette inclusion n'est pas en fait une *équivalence d'homotopie faible* (induisant une bijection entre tous les groupes d'homotopie), ou, dans le langage de M. Gromov, si les feuilletages ne satisfont pas un *h-principe paramétrique relatif*. C'est d'autant plus tentant que ce type de résultats existe dans le domaine voisin de la géométrie de contact : dans les années 80, Y. Eliashberg [El89] a spectaculairement généralisé les techniques de Thurston pour montrer une telle équivalence pour les structures de contact dites *vrillées* en dimension 3, et il a plus récemment obtenu avec Borman et Murphy dans [BEM15] un résultat analogue (très convoité) en dimension supérieure.

Présentation des résultats

Ce qui suit sera développé dans les chapitres suivants. Pour plus de fluidité, nous donnons d'abord une présentation globale et cohérente des travaux sans faire systématiquement

1. topologie de l'espace des sections de classe C^∞ de la fibration grassmannienne de rang 2 de M

référence au reste du mémoire. Nous précisons la structure de celui-ci dans un second temps.

Des feuilletages aux difféomorphismes de l'intervalle. Revenons-en à la classification des feuilletages à homotopie près, l'ensemble des feuilletages sur une variété donnée étant maintenant muni d'une bonne topologie (celle de sous-espace de l'espace des champs de plans lisses). Une condition nécessaire à ce que deux feuilletages soient homotopes est naturellement que leurs champs de plans tangents le soient (parmi les champs de plans, non nécessairement intégrables). Mon problème de thèse [Ey09] (comme celui de Larcanché) portait sur le caractère suffisant ou non de cette condition :

Question 1. *Deux feuilletages dont les champs de plans tangents sont homotopes peuvent-ils être reliés par un chemin continu de feuilletages (i.e. de champs de plans intégrables) ?*

Une réponse positive correspondrait, dans le langage de Gromov, au cas « à un paramètre relatif » (pour les feuilletages en dimension 3), i.e. à l'injectivité de l'application induite par l'inclusion entre les π_0 de $\mathcal{F}(M)$ et $\mathcal{P}(M)$, et donc finalement, grâce au résultat de Wood-Thurston, à sa bijectivité : chaque composante connexe par arcs de $\mathcal{P}(M)$ en contiendrait exactement une de $\mathcal{F}(M)$.

Une idée pour répondre à cette question est d'établir une version à paramètre relative de la construction de Thurston : partir du chemin de champs de plans donné et les déformer tous en feuilletages par la méthode de Thurston, de façon continue par rapport au paramètre (et sans toucher les extrémités). Bien sûr, les choses ne sont pas si simples. Le procédé de Thurston nécessite de nombreux choix (triangulation, arcs transverses aux feuilletages...) qui ne peuvent a priori pas être faits continûment, et « surtout » (c'est ce qui motive l'intégralité de ce mémoire) il ne laisse pas inchangé le champ de plans de départ, même si celui-ci s'avérait déjà intégrable.

A. Larcanché avait dans sa thèse contourné cette difficulté dans deux cas particuliers, répondant alors positivement à la question ci-dessus : le cas où M est un fibré en cercles et où les deux feuilletages considérés sont transverses aux fibres, et le cas où les deux feuilletages sont *tendus* et suffisamment proches. L'outil clef de Larcanché, commun à ses deux résultats, est une construction (antérieurement présente chez Schweitzer [Sc95]) basée sur un résultat profond de dynamique unidimensionnelle dû à Herman [He79].

Notons que les chemins construits par Larcanché sont « longs ». Notamment, dans les deux cas, les feuilletages initiaux sont tendus, mais le chemin construit sort de l'espace de tels feuilletages. Des travaux de T. Vogel [Vo16], J. Bowden [Bo16] et K. Mann [Man15] ont d'ailleurs montré depuis que dans certains cas, *il n'existe pas* de chemin de feuilletages tendus reliant deux feuilletages tendus homotopes parmi les champs de plans (ceci dit, dans ces exemples, les feuilletages tendus ne sont pas proches l'un de l'autre, et la question de la locale connexité de l'espace des feuilletages tendus demeure ouverte).

Dans ma thèse, je me suis inspirée des techniques de Thurston, Larcanché, mais aussi d'Eliashberg dans le travail susmentionné [El89] pour répondre (partiellement) à la question 1 dans le cas général :

Si deux feuilletages C^∞ ont des champs de plans tangents homotopes, ils peuvent être reliés par un chemin continu de feuilletages (champs de plans intégrables) C^1 .

En fait, les feuilletages du chemin que je construisais étaient C^∞ en dehors de tores épais $\mathbb{T}^2 \times [0, 1] \subset M$ sur lesquels ils étaient transverses au facteur $[0, 1]$ et dont les bords étaient des feuilles (les feuilles toriques jouent un rôle particulier dans ce problème car ce sont les seules qui peuvent ne pas rencontrer de transversale fermée au feuilletage). Ceci réduisait la question 1 à une nouvelle question de connexité :

Question 2. *L'espace des feuilletages de $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ tangents au bord et transverses au facteur $[0, 1]$ est-il connexe par arcs ?*

Cette question se traduit en problème de dynamique unidimensionnelle de la façon suivante. Un tel feuilletage est entièrement décrit par sa *représentation d'holonomie*, un morphisme h de $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ dans $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$, que nous allons décrire en quelques mots (pour tout $r \geq 1$, $\text{Diff}_+^r[0, 1]$ désigne l'espace des difféomorphismes C^r de $[0, 1]$ préservant l'orientation, muni de la topologie C^r). Pour tout lacet (lisse) γ de \mathbb{T}^2 basé en $O = (0, 0)$, le feuilletage de $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ considéré est transverse à l'anneau $\gamma \times [0, 1]$, et trace donc sur cet anneau un feuilletage de dimension 1, lui aussi transverse au facteur $[0, 1]$. On peut donc lui associer une application de premier retour sur la transversale $\{O\} \times [0, 1] \subset \gamma \times [0, 1]$, que l'on appelle *holonomie du feuilletage le long de γ* , qui ne dépend en fait que de la classe d'homotopie $[\gamma]$ et que l'on note $h([\gamma]) \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$. La question sur les feuilletages du tore épais se ramenait donc en fait à la suivante :

Question 2'. *L'espace des représentations de \mathbb{Z}^2 dans $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ est-il connexe par arcs ?*

(La topologie naturelle sur cet espace sera précisée dans peu de temps). Cette question est à rapprocher d'un problème posé par Rosenberg il y a une quarantaine d'années, également en lien avec les feuilletages de codimension 1 en dimension 3, et à l'origine de la thèse de J-C. Yoccoz : *L'espace des représentations de \mathbb{Z}^2 dans les difféomorphismes lisses du cercle est-il localement connexe (par arcs) ?* Ce problème demeure ouvert à ce jour, mais a provoqué de grandes avancées dans la compréhension de ces représentations (cf. notamment [Yo95]).

Connexité des actions lisses de \mathbb{Z}^2 sur l'intervalle. Pour revenir à notre question 2', si l'on oublie un instant les spécificités du groupe $\Gamma = \mathbb{Z}^2$ concerné et de l'espace $F = [0, 1]$ sur lequel il opère, une idée générale pour déformer une action de groupe est de le faire par conjugaison par une isotopie de F . Pour prouver la connexité, il faudrait pouvoir, de cette manière, amener une action quelconque arbitrairement près de l'action triviale. Nous verrons dans le chapitre 5 que ce n'est en général pas possible, et nous expliciterons des obstructions. Toutefois, dans le cas des actions seulement continues sur un espace contractile (notamment $[0, 1]$), c'est possible, par une méthode de type « astuce d'Alexander » que nous décrivons maintenant.

On définit une rétraction $(r_t)_{t \in [0, 1]}$ de $\text{Homéo}_+[0, 1]$ sur $\{\text{Id}\}$ par : pour tout $t \in]0, 1]$ et tout $f \in \text{Homéo}_+[0, 1]$, $r_t(f)$ est l'homéomorphisme valant l'identité sur $[t, 1]$ et conjugué

à f par l'homothétie de rapport t sur $[0, t]$ (et r_0 est l'application constante égale à Id). Le fait remarquable est que chaque r_t est un morphisme de groupes de $\text{Homéo}_+[0, 1]$ dans lui-même. Ainsi, toute action continue $\rho : \Gamma \rightarrow \text{Homéo}_+[0, 1]$ d'un groupe Γ sur $[0, 1]$ peut être déformée en l'action triviale en posant, pour tout $g \in G$, $\rho_t(g) = r_t(\rho(g))$. Notons en revanche que, même si l'action initiale est plus régulière, les actions déformées ne sont même pas C^1 en général ($r_t(\rho(g))$ n'est a priori pas dérivable en t).

Il existe bien une rétraction (bien plus) naturelle de $\text{Homéo}_+[0, 1]$ qui préserve $\text{Diff}_+^r[0, 1]$, ces espaces étant des sous-ensembles convexes de l'espace vectoriel des applications continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Mais cette rétraction n'est pas faite de morphismes de groupes et ne permet donc pas de déformer des actions. Il découle en fait de [BMNR17] qu'il n'existe pas de rétraction de $\text{Diff}_+^1[0, 1]$ sur Id par morphismes de groupes.

Pour tenter de répondre à la question 2', nous avons employé une approche complètement différente, qui fait intervenir de façon cruciale le groupe qui agit, à savoir \mathbb{Z}^2 . Notons qu'une représentation de \mathbb{Z}^2 dans $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ n'est rien d'autre que la donnée d'un couple de difféomorphismes $f, g \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ qui commutent. Il s'agit donc de fabriquer des chemins continus de couples de difféomorphismes qui commutent. Si l'on sacrifiait la régularité, on pourrait appliquer l'astuce d'Alexander présentée ci-dessus. En conservant la régularité, on peut facilement déformer n'importe quel couple en n'importe quel autre, l'espace $(\text{Diff}_+^\infty[0, 1])^2$ étant, comme $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$, contractile. Mais c'est alors la commutativité qu'on a du mal à conserver, pour des raisons qui deviendront claires à la lecture de ce mémoire. En fait, très peu de difféomorphismes commutent avec un difféomorphisme de l'intervalle donné. Mais c'est justement cette rareté qui va nous fournir un angle d'attaque pour la question 2', que nous développerons dans peu de temps. Dans ma thèse, cette stratégie ne me permettait de relier de tels couples commutants que parmi les couples de difféomorphismes C^1 , résultat qui a donné lieu à l'article [Ey11'], basé sur des résultats « classiques » (dans le domaine) de N. Kopell et G. Szekeres [Ko68, Sz58] améliorés par F. Sergeraert et J-C. Yoccoz [Se77, Yo84] et présentés au chapitre 1.

C. Bonatti et moi avons depuis démontré le résultat beaucoup moins élémentaire suivant, inspiré des travaux de Sergeraert [Se77] et nécessitant une étude beaucoup plus fine des « champs de vecteurs de Szekeres » (cf. chapitre 1) déjà manipulés dans [Ey11'] :

Théorème A ([Bo–Ey16], Theorem A). *L'espace des représentations de \mathbb{Z}^n dans $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ est connexe.*

D'autres résultats ont été obtenus depuis, pour d'autres régularités et pour les actions sur le cercle. Nous y reviendrons dans le dernier paragraphe de cette présentation des résultats et dans les perspectives du chapitre 4.

J'ai observé ensuite, comme corollaire de ce résultat et de travaux bien antérieurs de Plante et Thurston [Pl–Th76], qu'en fait, pour tout groupe N à croissance polynomiale (notamment pour tout groupe nilpotent) finiment engendré, l'espace des actions lisses de N sur $[0, 1]$ est connexe. Le théorème A et son corollaire font l'objet du chapitre 4.

Ce résultat améliore celui de ma thèse sur les feuilletages en l'énoncé suivant, dont la preuve complète, que je n'aborderai pas dans ce mémoire, fait l'objet de l'article [Ey16]

(où je généralise également les techniques de ma thèse pour prouver la surjectivité des applications induites entre les π_k , $k \geq 1$) :

Théorème B ([Ey16], Theorem A). *Soit M une variété close de dimension 3, $\mathcal{P}(M)$ l'espace des champs de plans lisses sur M et $\mathcal{F}(M)$ l'espace des feuilletages lisses de codimension 1 sur M . L'inclusion de $\mathcal{F}(M)$ dans $\mathcal{P}(M)$ induit une bijection entre les composantes connexes de ces deux espaces.*

La question demeure ouverte pour ce qui est des composantes connexes *par arcs*, pour les actions lisses de \mathbb{Z}^2 sur $[0, 1]$ comme pour les feuilletages.

Voyons maintenant où se situe la difficulté. Rappelons qu'il s'agit de déformer en (Id, Id) tout couple (f, g) de difféomorphismes lisses de $[0, 1]$ qui commutent et fixent le bord, *parmi de tels couples*. On a vu que l'on sait faire si l'on sacrifie la régularité ou la commutativité. Préserver les deux, en revanche, rigidifie énormément le problème. Cette rigidité pourrait néanmoins jouer en notre faveur en ce qu'elle contraint fortement la forme des couples (f, g) initiaux.

En effet, si l'on se restreint pour commencer au cas où l'un des deux difféomorphismes, disons f , n'a pas de point fixe intérieur, des travaux de Szekeres et Kopell [Sz58, Ko68] présentés au chapitre 1 entraînent que l'on se trouve dans l'une des deux situations suivantes (d'intersection non vide) :

- soit le centralisateur de f dans $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ (et en fait dans $\text{Diff}_+^1[0, 1]$) est cyclique (situation générique, résultat dû à Kopell), auquel cas f et g sont des itérés h^q et h^p d'un même difféomorphisme lisse h , et on est ramené à déformer un seul difféomorphisme ;
- soit f est le temps 1 d'un champ de vecteurs X de classe C^1 sur $[0, 1]$ et C^∞ sur $]0, 1[$, et le centralisateur de f dans $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ est précisément constitué des éléments du flot de X qui sont C^∞ .

Insistons au passage sur le fait que le résultat de Kopell évoqué ci-dessus montre que génériquement, un difféomorphisme lisse de $[0, 1]$ sans point fixe intérieur ne se plonge pas dans un flot ne serait-ce que C^1 (sinon son centralisateur dans $\text{Diff}_+^1[0, 1]$ contiendrait tous les éléments de ce flot et ne serait donc pas cyclique).

Dans la seconde situation, si X est C^∞ sur $[0, 1]$, on peut simplement déformer g en Id dans le flot de X (qui est connexe par arcs), donc dans le centralisateur C^∞ de f (les éléments d'un même flot commutant entre eux), sans bouger f , puis déformer (f, Id) en (Id, Id) . Mais les travaux de Szekeres susmentionnés ne donnent a priori que la régularité C^1 , et Sergeraert [Se77] a donné un exemple de difféomorphisme lisse f (sans point fixe dans $]0, 1[$) qui est le temps 1 d'un (unique) flot C^1 qui n'est pas C^2 . Cependant, il s'avère que dans sa construction, seuls les temps entiers du flot sont C^∞ , et on est donc aussi dans le premier cas de l'alternative ci-dessus où l'on sait déformer.

Centralisateurs exotiques et contrainte arithmétique. La question cruciale qui s'est posée durant ma thèse était alors :

Question 3. *Un champ de vecteurs C^1 sur un segment peut-il avoir ses temps 1 et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (et donc tous les temps $t \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, sous-ensemble dense de \mathbb{R}) C^∞ sans être C^∞ lui-même ?*

Cela peut sembler improbable, mais ce serait méconnaître des « curiosités » pourtant classiques en dynamique unidimensionnelle : sur \mathbb{R} plutôt que le segment, on peut observer un tel phénomène en relevant à \mathbb{R} un difféomorphisme f du cercle de nombre de rotation α modulo 1 conjugué à la rotation correspondante par un difféomorphisme φ de classe C^2 mais pas C^3 (on peut obtenir un tel exemple par des techniques de « déformation par conjugaison à la Anosov–Katok », cf. chap. 2). En effet, si l’on note F et Φ les relevés de f et φ de nombre de translation α et 0 respectivement, et T_ν la translation de ν sur \mathbb{R} , on a

$$F = \Phi^{-1}T_\alpha\Phi \quad \text{et} \quad T_1 = \Phi^{-1}T_1\Phi$$

donc le champ $\Phi^*\partial_x = (D\Phi)^{-1} \times \partial_x$, où x désigne la coordonnée sur \mathbb{R} , de classe C^1 mais non C^2 , a ses temps 1 et α , T_1 et F , qui sont lisses.

Le problème est qu’on ne peut pas directement utiliser ce qui précède pour traiter le cas du segment, où le défaut de régularité ne peut se produire qu’aux points fixes et pas ailleurs, alors que le flot ci-dessus n’a pas de points fixes. Nous renvoyons à la section 3.1 du chapitre 3 pour une comparaison plus précise des deux situations.

Dans l’article [Ey11] (Proposition 1), j’ai néanmoins répondu par la positive à la question 3 en combinant la construction de Sergeraert aux techniques de déformation par conjugaison susmentionnées (les articles [Ey11, Ey-prep] traitent de la demi-droite plutôt que du segment mais le cas du segment en découle facilement). Vue la méthode utilisée, il était naturel de se demander si l’on ne pourrait pas en fait construire un tel exemple pour tout nombre α de Liouville, i.e. non diophantien (rappelons qu’un nombre α est dit *diophantien* s’il est « mal approché par les rationnels » au sens où il existe C et $\nu > 0$ tels que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $|q\alpha - p| > \frac{C}{q^{1+\nu}}$). C’est ce que j’ai fait dans le preprint [Ey-prep] (Theorem A’) et qui fait l’objet de la section 2.3 du chapitre 2 du mémoire :

Théorème C. *Pour tout nombre α de Liouville, il existe un champ de vecteurs C^1 sur $[0, 1]$, ne s’annulant pas sur $]0, 1[$, dont les temps 1 et α du flot sont lisses, mais dont d’autres temps du flot ne sont pas C^2 .*

Cela constituait certes une amélioration de [Ey11], mais cela soulevait surtout une autre question, a priori plus difficile : *inversement, si les temps 1 et α diophantien d’un champ de vecteurs C^1 sur $[0, 1]$, sans singularité dans $]0, 1[$, sont C^∞ , le champ est-il lui-même C^∞ ?*

J’ai souhaité étudier cette question avant de soumettre le preprint [Ey-prep], et j’y ai finalement répondu positivement en 2019, en m’inspirant de célèbres travaux d’Herman et Yoccoz [He79, Yo84] sur la linéarisation des difféomorphismes du cercle. Ces deux derniers résultats sont donc réunis dans un même article [Ey19], où j’obtiens en fait, pour le deuxième point, l’énoncé plus général suivant (où le flot C^1 est remplacé par un « flot C^0 », sur un intervalle quelconque et avec un nombre arbitraire (mais non nul) de singularités), qui fait l’objet du chapitre 3 de ce mémoire :

Théorème D ([Ey19], Theorem B'). Soit $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'homéomorphismes d'un intervalle I de \mathbb{R} définissant une action non libre (ce qui équivaut ici à l'existence d'un point fixe global). Si f^1 et f^α sont C^∞ pour un nombre α diophantien, alors $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot d'un champ de vecteurs C^∞ .

On peut vérifier (cf. chap. 3) que le cas où l'action est libre correspond précisément au résultat d'Herman et Yoccoz évoqué ci-dessus : tout difféomorphisme C^∞ du cercle de nombre de rotation diophantien est conjugué à la rotation correspondante par un difféomorphisme C^∞ . Comme dans le cas du cercle, le théorème ci-dessus possède une version en différentiabilité finie que nous ne discuterons pas ici.

Les théorèmes C et D se généralisent à des familles de nombres (non) simultanément diophantiens. Nous renvoyons aux chapitres 2 et 3 pour plus de détails.

Dans [Ey19] (Theorem C'), je montre par ailleurs :

Théorème E. Soit $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'homéomorphismes d'un intervalle I de \mathbb{R} définissant une action non libre. Si f^1 et f^α sont C^∞ pour un nombre α irrationnel, alors l'ensemble des temps lisses du flot contient un ensemble de Cantor.

Ce résultat est cette fois-ci en contraste avec un autre théorème de Yoccoz [Yo84] montrant que pour une action libre, l'ensemble des temps lisses peut être réduit à $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Avec C. Bonatti, nous nous étions posé la question de la transposabilité au segment de ce résultat sur le cercle, et n'y étions pas parvenus (et pour cause !) en différentiabilité C^∞ . En revanche, nous avons montré :

Théorème F. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et tout $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, il existe un champ de vecteurs C^1 sur $[0, 1]$ ne s'annulant qu'au bord dont les temps C^r sont exactement les éléments de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ et dont les temps entiers sont C^∞ .

Ce travail n'a pas encore été soumis. J'en inclus néanmoins une esquisse dans le chapitre 2 de ce mémoire.

Voici pour ce qui concerne les *centralisateurs exotiques* présentés au chapitre 2 et qui peuvent être vus comme un obstacle pour prouver la connexité *par arcs* souhaitée. Le chapitre 4 explique comment on parvient à surmonter partiellement cet obstacle pour montrer la connexité.

Actions en régularité intermédiaire. Je me suis depuis intéressée avec Andrés Navas aux actions sur l'intervalle et sur le cercle en « régularité intermédiaire ».

Vers la période où C. Bonatti et moi prouvions la connexité de l'espace des actions lisses de \mathbb{Z}^d sur le segment $[0, 1]$ (cf. théorème A), A. Navas a obtenu (notamment) la connexité par arcs de l'espace des actions C^1 de \mathbb{Z}^d sur le segment ou sur le cercle [Na14]. Comme nous l'avons déjà entraperçu, dans ce domaine, la régularité étudiée a une importance immense, et les techniques employées par Navas n'ont rien à voir avec celles de notre article [Bo–Ey16], la rigidité découlant des travaux de Kopell n'existant pas en régularité

C^1 (la régularité critique pour son fameux « lemme » est C^{1+bv} , *i.e.* C^1 avec une dérivée à variation bornée). De très loin, l'approche de Navas est à rapprocher de celle employée pour les action C^0 en ce qu'elle met crucialement en jeu la question suivante :

Étant donnée une action d'un groupe (éventuellement seulement \mathbb{Z}) sur V (désignant le segment ou le cercle), sous quelle condition peut-on la rapprocher par conjugaison d'une action par isométries (l'action triviale pour le segment) ?

Navas répond à cette question pour les groupes abéliens (en fait plus, mais ce sont ceux qui nous intéressent ici) en régularité C^1 dans [Na14] : il faut et il suffit que les éventuels points fixes soient paraboliques (*i.e.* que la dérivée des difféomorphismes en ces points soit 1). En différentiabilité C^{1+bv} (cf. *Notations*), il introduit dans [Na18] la *distorsion asymptotique*, définie, pour un difféomorphisme f de classe C^{1+bv} de V par :

$$\text{dist}_\infty(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{var}(\log Df^n)$$

(la limite existe et est finie), et montre qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une action de \mathbb{Z}^d sur V soit rapprochable par conjugaison d'une action par isométries dans cette régularité est l'annulation de la distorsion asymptotique des générateurs. Dans le cas du cercle, pour des difféomorphismes de nombre de rotation irrationnel et dont la dérivée est en outre *absolument continue*, Navas montre que cette annulation est en fait automatique. Sur le segment en revanche, il exhibe des exemples (sans points fixes hyperboliques) pour lesquels la distorsion asymptotique est non nulle.

Comme nous le verrons dans le chapitre 5, l'appellation « *distorsion asymptotique* » s'avère perturbante dans certaines situations, et A. Navas a depuis rebaptisé son outil « *variation asymptotique* », que nous noterons donc var_∞ .

Dans un travail en commun récent [Ey–Na19], présenté au chapitre 5, nous relient cette obstruction (au fait d'être rapprochable de l'identité par conjugaison), dans le cas d'un difféomorphisme C^2 du segment sans point fixe intérieur, à une obstruction plus classique, à savoir la *non trivialité de l'invariant de Mather*. En quelques mots, l'invariant de Mather M_f d'un tel difféomorphisme f est un C^2 -difféomorphisme du cercle (défini à pré- et post-composition par des rotations près) qui est trivial si et seulement si f se plonge dans un flot C^1 sur $[0, 1]$, ce qui, comme nous l'avons déjà évoqué, n'est génériquement pas le cas. Il ne dépend que de la classe de conjugaison C^1 de f parmi les difféomorphismes C^2 , et tend vers l'identité si f tend vers l'identité (en topologie C^2). En particulier, si f est rapprochable de l'identité par conjugaison C^2 , son invariant de Mather est nécessairement trivial.

Plus généralement (sans hypothèse sur les points fixes intérieurs), nous montrons entre autres dans [Ey–Na19] (Corollary 2) :

Théorème G. *La variation asymptotique d'un difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+^2[0, 1]$ est nulle si et seulement si f est le temps 1 d'un champ de vecteurs C^1 dont la dérivée s'annule en chacun de ses points singuliers.*

Notons que cet énoncé est faux sur le cercle où, génériquement, un difféomorphisme C^2 de nombre de rotation irrationnel ne se plonge pas dans un flot C^1 (alors qu'on a vu que sa variation asymptotique était nulle).

Pour les difféomorphismes sans point fixes intérieurs et paraboliques au bord, on a en fait la relation explicite (cf. [Ey–Na19], Theorem B) :

$$\text{var}_\infty(f) = \text{var}(\log DM_f).$$

Ceci permet notamment d'étendre certaines propriétés bien connues de l'invariant de Mather (continuité, invariance par conjugaison C^1 ...) à la variation asymptotique, mais seulement, *a priori*, pour les difféomorphismes C^2 et sans points fixes intérieurs. En fait, on montre certaines de ces propriétés en toute généralité par d'autres techniques, et on montre aussi, dans un article plus récent [Ey–Na21] (Appendix), que l'invariant de Mather, et l'égalité ci-dessus notamment, se généralisent en différentiabilité C^{1+bv} .

Les outils développés dans ces deux articles permettent de démontrer un nouveau résultat de connexité (cf. [Ey–Na21], Main Theorem) :

Théorème H. *L'espace des actions de \mathbb{Z}^d par C^2 -difféomorphismes d'une variété compacte de dimension 1 est C^{1+ac} -connexe par arcs.*

Tous ces résultats en régularités intermédiaires sont présentés et complétés au chapitre 5.

Structure du mémoire

Nous avons choisi de ne pas présenter ici la preuve du théorème B sur les feuilletages, essentiellement issue de notre thèse, et de nous concentrer sur la dynamique unidimensionnelle qui intervient dans le problème géométrique initial *via* la notion d'holonomie. On s'intéresse principalement aux actions de \mathbb{Z}^2 sur l'intervalle, donc aux paires de difféomorphismes commutants.

Les résultats « classiques » (des années 60-70 principalement) concernant ceux-ci, que nous utilisons dans tous nos travaux, font l'objet du **chapitre 1**. Dans un premier temps, on s'intéresse à la situation locale au voisinage d'un point fixe isolé, en étudiant le centralisateur d'un difféomorphisme lisse de l'intervalle semi-ouvert $[0, +\infty[$ ayant pour seul point fixe 0. On y voit notamment que le centralisateur C^∞ d'un tel difféomorphisme se plonge naturellement dans un groupe à un paramètre de difféomorphismes C^1 , mais peut être strictement plus petit, et notamment cyclique. Se pose alors la question de savoir s'il peut se produire une situation intermédiaire.

C'est l'objet du **chapitre 2**, dont la section 2.3 traite de la différentiabilité infinie en esquissant la preuve du théorème C, et la section 2.4 de la différentiabilité finie en présentant les grandes lignes de la démonstration du théorème « inédit » F.

Le **chapitre 3** traite des théorèmes D et E, qui montrent notamment que le centralisateur, identifié canoniquement à un sous-groupe de \mathbb{R} , ne peut néanmoins pas être *n'importe*

quoi : s'il contient des nombres conjointement diophantiens, il est nécessairement \mathbb{R} tout entier, et s'il contient des nombres rationnellement indépendants, il a nécessairement la puissance du continu.

Les centralisateurs exotiques du chapitre 2 constituent un obstacle à la preuve du théorème A sur les actions lisses de \mathbb{Z}^2 sur le segment. Nous expliquons dans le **chapitre 4** comment le contourner, en esquisant la preuve dudit théorème dans un cas particulier mais représentatif de la difficulté.

Enfin, dans le **chapitre 5**, nous nous tournons vers les actions moins régulières, à savoir C^2 , C^{1+ac} et C^{1+bv} .

Perspectives concernant les feuilletages

On a vu au début de l'introduction que tout champ de plans sur une 3-variété close pouvait être déformé en un feuilletage. Ce résultat dû à Wood [Wo69] et redémontré par Thurston [Th73] ainsi que les travaux d'Eliashberg [El89] dans le domaine « voisin » des structures de contact invitent à se demander s'il n'existerait pas en fait une équivalence d'homotopie faible entre l'espace des champs de plans intégrables et celui des champs de plans quelconques sur une 3-variété donnée.

On peut tout-à-fait se poser la même question pour les feuilletages de codimension 1 sur les variétés closes de dimension quelconque. En effet, là aussi, Thurston [Th76] a prouvé que tout champ d'hyperplans était homotope à un champ d'hyperplans intégrable, et son résultat a récemment été revisité et amélioré par Meigniez [Me17]. Dans le monde « contac » en toute dimension (nécessairement impaire), Borman, Eliashberg et Murphy [BEM15] ont récemment obtenu l'analogue de ce résultat (un peu plus compliqué à énoncer), et sa version paramétrique.

Ayant déjà étudié en profondeur les travaux de Thurston et Meigniez, et plus récemment ceux de Borman, Eliashberg et Murphy, j'aimerais voir dans quelle mesure la combinaison de leurs techniques pourrait fournir un angle d'approche vers un h -principe paramétrique pour les *feuilletages* de codimension 1 en toute dimension, comme je l'ai partiellement vérifié en dimension 3. Les techniques de *plongements ridés* d'Eliashberg et Mishachev [El-Mi98] pourraient également s'avérer utiles pour l'une des étapes de ce travail consistant à construire des feuilletages « à trous ».

Un sous-problème intervenant dans ce projet à long terme est celui de la stabilité des feuilles compactes : à quelle condition peut-on déformer un feuilletage au voisinage d'une feuille compacte pour faire disparaître celle-ci sans en créer d'autre ? Pour répondre à cette question, il faut se pencher sur les actions de groupes fondamentaux de variétés closes sur l'intervalle et leurs déformations.

Chapitre 1

Bases sur les difféomorphismes commutants

Pour comprendre les actions de \mathbb{Z}^2 sur l'intervalle, ou de façon équivalente les couples de difféomorphismes qui commutent, et leurs déformations possibles, on peut commencer par étudier, pour un difféomorphisme donné, son *centralisateur*, *i.e.* l'ensemble des difféomorphismes qui commutent avec lui (dans une classe de régularité donnée). C'est ce que nous commençons à faire dans ce chapitre, où nous présentons des résultats « classiques » concernant les difféomorphismes de l'intervalle. La **section 1.1** traite de l'intervalle semi-ouvert, et la **section 1.2** du segment. On va voir notamment que dans le premier cas, le centralisateur C^r , $r \geq 1$, se plonge toujours canoniquement dans un groupe à un paramètre de difféomorphismes C^1 (mais peut être strictement plus petit et non connexe par arcs), et que dans le second, génériquement, le centralisateur C^1 est réduit au groupe cyclique engendré par le difféomorphisme considéré.

Remarque préliminaire. Dans toute la suite, on confondra souvent un champ de vecteurs $u\partial_x$ sur un intervalle de \mathbb{R} (dont x désigne la coordonnée) et la fonction u . En particulier, étant donné un difféomorphisme φ de l'intervalle, $\varphi^*(u\partial_x)$ sera confondu avec la fonction $(u \circ \varphi)/D\varphi$.

1.1 Centralisateur C^1 d'une contraction C^2 (ou plus)

Ici, on appelle *contraction* (resp. dilatation) de la demi-droite \mathbb{R}_+ tout homéomorphisme de \mathbb{R}_+ tel que $f(x) < x$ (resp. $f(x) > x$) pour tout $x > 0$. On se restreindra au cas des contractions, les résultats étant naturellement valables aussi pour leurs inverses, les dilatations. Avec un léger abus de langage, par « contraction C^r », on entend « C^r -difféomorphisme qui est une contraction » (c'est-à-dire qu'on exclut le cas où la dérivée s'annule).

Pour $r \leq 1$, le centralisateur dans $\text{Diff}^r \mathbb{R}_+$ d'une contraction C^r peut être très gros et très compliqué. Dans le cas $r = 1$, il peut par exemple avoir un sous-groupe isomorphe au groupe libre \mathbb{F}_2 [Bo–Fa17]. Dès la régularité C^{1+bv} en revanche (*i.e.* « C^1 avec une dérivée

à variation bornée sur tout segment de l'intervalle considéré », cf. *Notations*), on constate une immense rigidité :

Théorème 1.1 (« Lemme de Kopell » [Ko68]). *Soit f une contraction C^{1+bv} de \mathbb{R}_+ . Si un C^1 -difféomorphisme de \mathbb{R}_+ commute avec f a un point fixe autre que 0, alors il est l'identité.*

Cet énoncé est faux si f est seulement de classe C^1 . Dans l'exemple de [Bo–Fa17] notamment, certains éléments du centralisateur ont une infinité de points fixes convergeant vers 0.

Une conséquence immédiate du « Lemme » ci-dessus est que si g et h appartiennent au centralisateur C^1 d'une contraction C^r , $r \geq 1 + bv$, et coïncident en un point autre que le bord, ils sont égaux. Autrement dit, le centralisateur C^1 est paramétré par l'image d'un point de \mathbb{R}_+^* donné. C'est au plus une famille à un paramètre. L'énoncé suivant, combiné au Lemme de Kopell, implique que c'est en fait exactement un groupe à un paramètre lorsque $r \geq 2$.

Théorème 1.2 (Szekeres [Sz58], Sergeraert [Se77], Yoccoz [Yo95]). *Soit f une contraction C^r , avec $r \geq 2$. Alors f est le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs complet C^1 sur \mathbb{R}_+ et C^{r-1} sur \mathbb{R}_+^* .*

En effet, les éléments d'un même flot commutent deux à deux, donc ceux du flot d'un champ de vecteurs comme ci-dessus appartiennent au centralisateur C^1 de f . En outre, un tel champ de vecteurs ne peut s'annuler qu'en 0 vu que f ne fixe que 0, donc si $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ désigne son flot, $f_t(\frac{1}{2})$, par exemple, parcourt tout \mathbb{R}_+^* lorsque t parcourt \mathbb{R} . Le Lemme de Kopell (ou plutôt sa « conséquence immédiate » ci-dessus) implique alors que le centralisateur de f est réduit aux éléments du flot considéré. Ceci montre au passage qu'un tel champ de vecteurs « générateur » pour f est unique (deux champs de vecteurs dont les flots contiennent les mêmes difféomorphismes et dont les temps 1 sont égaux coïncident). Nous consignons ces faits dans un unique énoncé :

Corollaire 1.3 (cf. par exemple [Na11]). *Soit f une C^r -contraction de \mathbb{R}_+ , avec $r \geq 2$. Alors f est le temps 1 du flot d'un unique champ de vecteurs complet C^1 sur \mathbb{R}_+ , que l'on appellera dorénavant champ de Szekeres de f et que l'on notera X_f . Ce champ est en outre C^{r-1} sur \mathbb{R}_+^* , et le C^1 -centralisateur de f est réduit aux éléments de son flot.*

Dans le preprint [Ey–Na21] (Proposition 6.1), A. Navas et moi-même montrons qu'on a en fait un énoncé analogue dans le cas où $r = 1 + bv$:

Proposition 1.4. *Soit f une C^{1+bv} -contraction de \mathbb{R}_+ . Alors il existe un unique champ de vecteurs X continu, uniquement intégrable et complet sur \mathbb{R}_+ , à variation bornée sur tout compact de \mathbb{R}_+^* , tel que f est le temps 1 du flot de X et que le C^1 -centralisateur de f coïncide avec ce flot.*

Le fait remarquable est la généralité de ces énoncés : toute contraction de la demi-droite suffisamment régulière (C^r avec $r \geq 1 + bv$) a un centralisateur C^1 qui s'identifie canoniquement à \mathbb{R} . On ne peut malheureusement pas en dire autant du centralisateur C^s , $2 \leq s \leq r$, sauf si l'on met de côté le cas extrême où f est C^r -tangent à l'identité en 0 :

Théorème 1.5 (Takens [Ta73], Yoccoz [Yo95]). *Soit f une contraction C^r , $r \geq 2$, de \mathbb{R}_+ non C^r -tangente à l'identité en 0. Alors son champ de Szekeres est de classe C^{r-1} sur \mathbb{R}_+ .*

Dans cet énoncé, le cas de la régularité infinie est dû à Takens, et le cas général est obtenu par Yoccoz par d'autres méthodes.

Sergeraert [Se77] a en revanche construit un exemple de contraction *lisse* infiniment tangente à l'identité (ITI) en 0 dont le champ de Szekeres n'est pas C^2 , et dont le centralisateur C^2 (et a fortiori C^∞) est en fait réduit au groupe cyclique engendré par f (cf. [Ey09] et chap. 2, section 2.2).

Remarque 1.6. Notons une conséquence peut-être contre-intuitive pour certains de ce résultat : en général, un C^∞ -difféomorphisme d'un intervalle ne se plonge pas dans un flot C^∞ (attention, on parle ici du flot d'un champ de vecteurs *autonome*!). Mais tout le défaut de régularité est concentré aux points fixes. En effet, on montre facilement qu'un C^∞ -difféomorphisme f sans point fixe d'un intervalle (nécessairement ouvert) est C^∞ -conjugué (d'une multitude de façons) à la translation de 1 sur \mathbb{R} , qui est le flot au temps 1 du champ (lisse) constant ∂_x , où x désigne la coordonnée sur \mathbb{R} , de sorte que f se plonge dans le flot (lisse) du tiré en arrière de ∂_x par la conjugante.

Revenons-en aux centralisateurs « exotiques ». Dans le chapitre 2, on verra qu'il peut se produire une situation intermédiaire entre un flot C^∞ et l'exemple de Sergeraert : le centralisateur C^∞ , canoniquement identifié à un sous-groupe de \mathbb{R} contenant \mathbb{Z} , peut contenir un nombre irrationnel et donc être dense dans \mathbb{R} , sans être tout \mathbb{R} . Dans le chapitre 3, on verra en revanche que cela ne peut pas se produire pour n'importe quel nombre rationnel. Le résultat suivant, également dû à Sergeraert [Se77], montre que pour rencontrer un tel centralisateur « exotique » (strictement plus petit que \mathbb{R}), il faut considérer une contraction ITI en 0 relativement compliquée :

Théorème 1.7. *Soit f une contraction C^∞ de \mathbb{R}_+ ITI en 0. Si*

$$\sup_{y \leq x} |f(y) - y| = O(|f(x) - x|),$$

alors le champ de Szekeres de f est C^∞ .

En particulier, si $f - \text{Id}$ est monotone, le champ de Szekeres est lisse. Pour avoir au contraire un centralisateur non-trivial, $f(x) - x$ doit se rapprocher dangereusement de 0 (sans l'atteindre) puis s'en éloigner « beaucoup » comparativement lorsque x tend vers 0 (cf. Figure 1.1). On pourrait dire que f doit avoir une suite de « presque points fixes ».

L'estimée centrale menant à l'énoncé ci-dessus est le point de départ de la preuve du théorème A (cf. chap. 4). Elle permet de montrer que toute paire de contractions/dilatations lisses qui commutent peut être approchée par une autre paire coïncidant avec la première en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de 0 et se plongeant dans un flot C^∞ .

Notons pour conclure cette section que si l'on peut obtenir de telles estimées, c'est parce qu'on connaît en fait « très bien » le champ de Szekeres, au sens où on a une expression relativement agréable pour lui (cf. [Yo95]) :

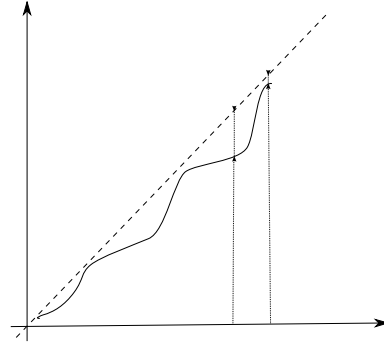


FIGURE 1.1 – Une contraction ayant des « presque points fixes »

$$X_f = c_f \lim_{k \rightarrow +\infty} (f^k)^*((f - \text{Id})\partial_x) \quad (1.1)$$

où

$$c_f = \begin{cases} \frac{\log(Df(0))}{Df(0)-1} & \text{si } Df(0) \neq 1, \\ 1 & \text{si } Df(0) = 1. \end{cases}$$

Pour prouver le théorème 1.2, on montre que la suite $(f^k)^*((f - \text{Id})\partial_x)$ converge en C^1 -topologie sur \mathbb{R}_+ et en C^{r-1} -topologie sur tout compact de \mathbb{R}_+^* .

Notons qu'on peut commencer à « comprendre » à partir de cette formule pourquoi X_f est C^1 mais peut ne pas être C^2 . Ce qui peut se passer est que, bien que $f - \text{Id}$ soit « sympathique » près de 0, si f^k ressemble à une dilatation de grand rapport quelque part (ce qui est typiquement le cas lorsque f a des « faux points fixes » car un itéré positif f^k envoie le voisinage d'un presque point fixe, où les intervalles fondamentaux sont très petits, dans une région où f est beaucoup plus loin de l'identité et où les intervalles fondamentaux sont du coup beaucoup plus grands), tirer en arrière $(f - \text{Id})\partial_x$ par f^k va laisser la première dérivée inchangée mais multiplier ses dérivées d'ordre supérieur par de très grands nombres. C'est exactement ce qui se passe dans la construction de Sergeraert présentée en 2.1 et 2.2 du chapitre 2.

1.2 Sur l'invariant de Mather

On s'intéresse maintenant au cas de difféomorphismes C^r , $r \geq 2$, du segment $[0, 1]$ préservant l'orientation et sans point fixe intérieur. On note $\text{Diff}_+^{r,\Delta}[0, 1]$ l'ensemble de ces difféomorphismes. En appliquant les résultats de la section précédente aux restrictions d'un tel difféomorphisme f aux deux intervalles semi-ouverts $[0, 1[$ et $]0, 1]$, on obtient un champ de Szekeres « à gauche », que l'on note encore X_f , et un champ de Szekeres « à droite », que l'on note Y_f (on notera simplement X et Y lorsqu'il n'y a pas ambiguïté). On étend en fait ces deux champs par continuité (par 0) en 1 et 0 respectivement. Suivant Yoccoz, on note f_t et f^t leurs temps t respectifs (de sorte que $f_1 = f^1 = f$).

Ces deux champs n'ont aucune raison de coïncider, et ce n'est d'ailleurs en général pas le cas : on montre ci-après (cf. Lemme 1.8) que, partant d'un difféomorphisme f dont les champs gauche et droit coïncident, n'importe quelle perturbation à support dans un intervalle fondamental de f (de la forme $[x, f(x)]$ ou $[f(x), x]$) produit un nouveau difféomorphisme dont les champs gauche et droit diffèrent. Ce défaut de coïncidence est mesuré par l'*invariant de Mather* que nous définissons maintenant.

Étant donnés deux points a et b de $]0, 1[$, on considère les C^{r-1} -difféomorphismes $\psi_X : t \mapsto f_t(a)$ et $\psi_Y : t \mapsto f_t(b)$ de \mathbb{R} sur $]0, 1[$, et le changement de coordonnées :

$$M_f^{a,b} := (\psi_Y)^{-1} \circ \psi_X : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Notons que

$$DM_f^{a,b}(t) = \frac{\frac{d\psi_X}{dt}(t)}{\frac{d\psi_Y}{dt}(\psi_Y^{-1}\psi_X(t))} = \frac{X(\psi_X(t))}{Y(\psi_Y(\psi_Y^{-1}\psi_X(t)))},$$

donc

$$DM_f^{a,b}(t) = \frac{X}{Y}(\psi_X(t)). \quad (1.2)$$

Le fait que f soit le temps 1 des flots de X et Y entraîne que $M_f^{a,b}$ commute avec la translation unité. Ainsi, il induit un difféomorphisme du cercle \mathbb{R}/\mathbb{Z} , qui est de classe C^r d'après (1.2) ci-dessus, et que l'on notera encore $M_f^{a,b}$.

Changer a et b se traduit en une pre/post composition de $M_f^{a,b}$ par des rotations. La classe de $M_f^{a,b}$ modulo ces $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ -actions (à gauche et à droite) est l'*invariant de Mather* de f , que l'on notera simplement M_f (jusqu'ici, tout se généralise naturellement à $\text{Diff}_+^{1+bv, \Delta}[0, 1]$ grâce à la proposition 1.4).

On dit que l'invariant de Mather est trivial si M_f coïncide avec la classe des rotations. D'après la discussion ci-dessus, cela revient à dire que X et Y coïncident, ce qui équivaut à dire que f se réalise comme le temps 1 d'un champ de vecteurs C^1 sur $[0, 1]$. Comme le montre le lemme suivant, cette propriété est « brisée » par toute C^2 -perturbation de f supportée dans un intervalle fondamental.

Lemme 1.8. *Soit $f \in \text{Diff}_+^{2, \Delta}([0, 1])$ et $c \in]0, 1[$. Si l'invariant de Mather de f est trivial, alors tout $g \in \text{Diff}_+^{2, \Delta}([0, 1])$ qui coïncide avec f en dehors de l'intervalle I d'extrémités $c, f(c)$ et diffère de f sur cet intervalle a un invariant de Mather non trivial.*

Démonstration. Pour fixer les idées, supposons que $f(x) > x$ sur $]0, 1[$. Puisque g (resp. g^{-1}) coïncide avec f sur $[0, c]$ (resp. avec f^{-1} sur $[f^2(c), 1]$), on peut montrer que X_g (resp. Y_g) coïncide avec X_f (resp. $Y_f = X_f$) sur $[0, f(c)]$ (resp. $[f(c), 1]$). Si g avait un invariant de Mather trivial, on aurait $X_g = Y_g = X_f$ sur le segment $[0, 1]$ tout entier, donc f serait égal à g partout, ce qui n'est pas le cas. \square

Prenons le temps de regarder ce qui arrive au champ de Szekeres à gauche disons, lorsqu'on applique une telle perturbation à un tel difféomorphisme f . On a déjà remarqué dans la preuve ci-dessus qu'il restait inchangé sur $[0, f(c)]$. Notons simplement X sa restriction

à $I = [c, f(c)]$. Sur l'intervalle fondamental suivant $g(I) = f(I)$, $X_g = g_*X \neq f_*X = X_f$, et plus généralement, sur $g^k(I)$, $k \in \mathbb{N}^*$,

$$X_g = (g^k)_*X = (g^{k-1})_*(g_*X) = (f^{k-1})_*(g_*X) \neq (f^{k-1})_*(f_*X) = X_f.$$

Autrement dit, alors qu'on n'a perturbé f que sur l'intervalle fondamental I , le champ de Szekeres à gauche se trouve perturbé dans toute la région à droite de cet intervalle (cf. Figure 1.2). La perturbation sur le champ se « propage » d'intervalle fondamental en intervalle fondamental, et le champ X_g résultant n'est plus C^1 en 1 (sinon, il coïnciderait avec l'unique champ de Szekeres à droite).

Une autre façon de voir les choses est d'interpréter la perturbation de f en terme de conjugaison. Le difféomorphisme perturbé g est de la forme $f \circ h$ avec h un difféomorphisme à support dans $[c, f(c)]$. On peut alors vérifier à la main que $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ avec $\varphi \in \text{Diff}^2([0, 1])$ valant l'identité sur $[0, f(c)]$, égal à $f \circ h \circ f^{-1}$ sur $[f(c), f^2(c)]$ et plus généralement à $f^n h f^{-n}$ sur $f^n([c, f(c)])$. Le champ de Szekeres de g est alors $X_g = \varphi_*X_f$.

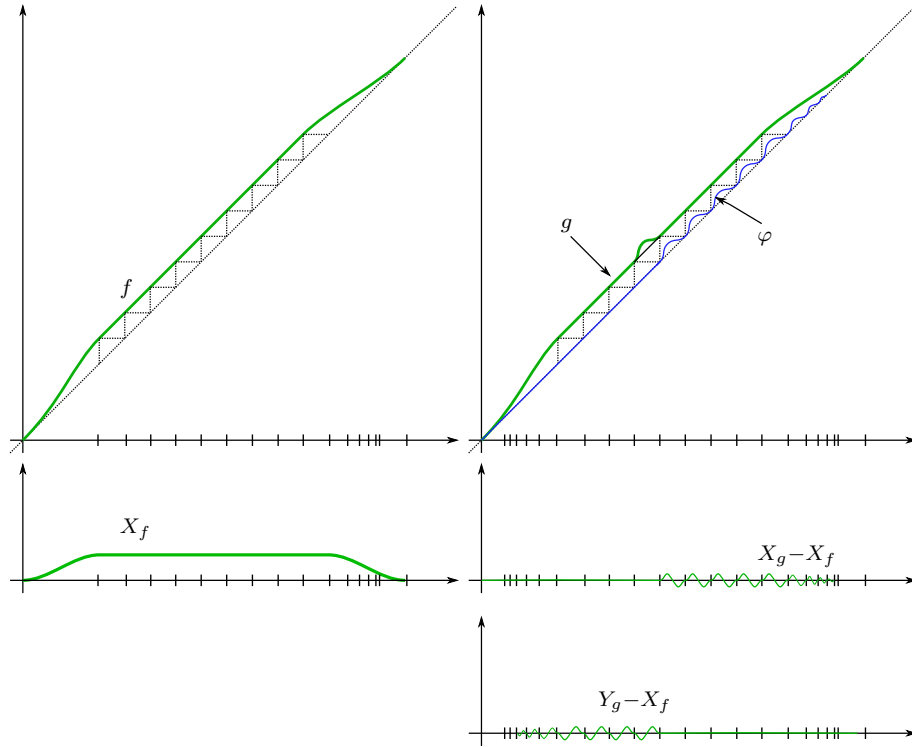


FIGURE 1.2 – Effet d'une perturbation locale de f sur son champ de Szekeres

Remarque 1.9. Dans la situation ci-dessus, on a en fait une description très simple pour M_g , ou plutôt son représentant $M_g^{c,c}$, en termes de la perturbation h appliquée à f pour obtenir g , à savoir :

$$M_g^{c,c} = \psi_{X_f}^{-1} \circ h \circ \psi_{X_f}$$

où $\psi_{X_f}(t) = f_t(c)$ (cf. [Ey-Na19]).

Pour en revenir aux centralisateurs — l'objet central de notre attention —, un difféomorphisme C^1 de $[0, 1]$ commute avec f si et seulement s'il appartient au flot des deux champs de Szekeres (et le temps correspondant, qui est le *nombre de translation relatif de ce difféomorphisme par rapport à f* (cf. chap. 4), est nécessairement le même). Ainsi, le centralisateur C^1 est en bijection avec l'ensemble $\{t \in \mathbb{R}, f_t = f^t\}$. Or cet ensemble est un sous-groupe fermé de \mathbb{R} . Il est donc soit égal à \mathbb{R} (ce qui correspond au cas où les champs coïncident, *i.e.* où l'invariant de Mather est trivial), soit cyclique (ce qui correspond au cas d'un invariant non trivial). Et on peut en fait montrer qu'il est génériquement réduit au groupe cyclique engendré par f [Ko68, Yo95]. En particulier, génériquement, un C^2 -difféomorphisme de $[0, 1]$ sans point fixe intérieur ne se plonge pas dans un flot C^1 .

Outre son interprétation en termes de centralisateurs, cet invariant va jouer un rôle central dans le chapitre 5, où sa trivialité se traduira en possibilité de rapprocher le difféomorphisme correspondant de l'identité par des conjugaisons C^{1+bv} .

L'invariant de Mather est en outre un invariant de conjugaison C^1 et, si on lui ajoute les classes de conjugaisons des germes en 0 et en 1, on obtient un invariant complet (*i.e.* qui détermine les classes de conjugaisons C^1 de C^2 -difféomorphismes de $[0, 1]$ sans point fixe intérieur).

1.3 Visualisation géométrique de la « plongeabilité » dans un flot C^∞

Alors que je présentais les résultats ci-dessus dans un exposé, un auditeur m'a demandé comment on pouvait « voir », en « regardant » un difféomorphisme, s'il se plongeait ou non dans un flot C^∞ . Une première réponse consiste à dire qu'on ne peut pas le voir, puisqu'une perturbation arbitrairement petite arbitrairement proche d'une extrémité de l'intervalle peut changer la réponse. On peut néanmoins donner une interprétation géométrique de la « plongeabilité » en termes de feuilletages. On se concentre ici sur le cas du segment pour éviter des soucis techniques liés à la non-compactité.

Tout difféomorphisme lisse f de l'intervalle $[0, 1]$ préservant l'orientation peut être réalisé comme holonomie d'un feuilletage lisse de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ (tangent au bord) par un procédé appelé *suspension*. En toute rigueur, ce procédé ne définit un feuilletage qu'à conjugaison près. Mais on peut fournir une réalisation explicite de la façon suivante. Étant donnée une fonction croissante $\rho : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ valant 0 au voisinage de 0 et 1 au voisinage de 1, définissons

$$f_t = (1 - \rho(t)) \text{Id} + \rho(t)f,$$

et traçons sur $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ les courbes paramétrées $\gamma_x : t \in [0, 1] \mapsto (\bar{t}, f_t(x)) \in \mathbb{T}^1 \times [0, 1]$, où \bar{t} désigne la classe de t modulo 1. Cela définit un feuilletage lisse d'holonomie f , que l'on note \mathcal{F}_f (sur la figure 1.3 on a pris ρ localement constante en dehors d'un petit voisinage de $1/2$, $t = 1/2$ correspondant au rayon vertical de la partie inférieure de la figure).

J'affirme en revanche que :

Proposition 1.10. *Un difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ se plonge dans un flot C^∞ si et seulement si f est l'holonomie d'un feuilletage lisse de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$ tangent au bord, transverse à $[0, 1]$ et \mathbb{T}^1 -équivariant.*

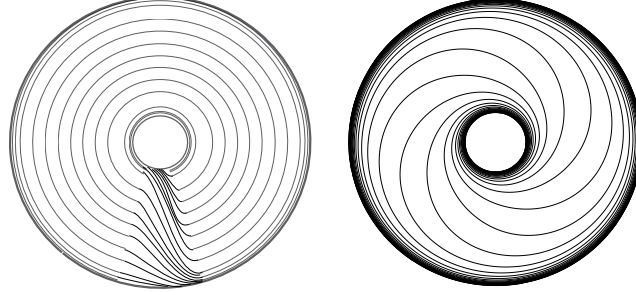


FIGURE 1.3 – Un feuilletage \mathcal{F}_f et un feuilletage \mathbb{T}^1 -équivariant

On peut réaliser tout f comme holonomie d'un feuilletage \mathbb{T}^1 -équivariant, mais en général pas C^∞ (ni même C^1) le long de ses feuilles compactes. Bien entendu, la différence n'est là encore pas manifeste à l'œil nu...

La preuve est tout-à-fait élémentaire.

Démonstration. Soit $f \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$. Supposons que f soit le temps 1 d'un champ de vecteurs $X : x \mapsto u(x)\partial_x$ lisse sur $[0, 1]$, de flot f^t , $t \in \mathbb{R}$, de sorte que $f^1 = f$. Considérons sur $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$, muni de coordonnées (θ, x) , le champ de vecteurs lisse, tangent au bord, transverse à $[0, 1]$ et \mathbb{T}^1 -équivariant $\nu = \partial_\theta + u(x)\partial_x$. La portion de courbe intégrale $t \in [0, 1] \mapsto (\theta(t), x(t))$ issue de $(\bar{0}, x_0)$ satisfait : $\theta'(t) = 1$ et $x'(t) = u(x(t))$ donc $\theta(t) = t$ et $x(t) = f^t(x_0)$. Ainsi, la feuille du feuilletage tangent à ν passant par $(\bar{0}, x_0)$ aboutit après un tour de \mathbb{T}^1 au point $(\bar{1} = \bar{0}, f(x_0))$, donc a pour holonomie le difféomorphisme f .

Réciproquement, considérons un feuilletage lisse, tangent au bord, transverse à $[0, 1]$ et \mathbb{T}^1 -équivariant de $\mathbb{T}^1 \times [0, 1]$, d'holonomie f . La \mathbb{T}^1 -équivariance implique qu'il possède un champ de vecteurs tangent ν de la forme $v(x)\partial_\theta + w(x)\partial_x$. La transversalité à $[0, 1]$ entraîne que v ne s'annule pas, de sorte que, en posant $u(x) = \frac{w(x)}{v(x)}$, $\partial_\theta + u(x)\partial_x$ définit un autre champ de vecteurs tangent au feuilletage. Mais alors pour tout $x_0 \in [0, 1]$, si f^t , $t \in \mathbb{R}$, désigne le flot du champ $u(x)\partial_x$ sur $[0, 1]$, la courbe $t \in [0, 1] \mapsto (t, f^t(x_0))$, tangente à ν , est un morceau de feuille qui relie le point $(\bar{0}, x_0)$ au point $(\bar{1} = \bar{0}, f^1(x_0))$. L'holonomie f du feuilletage est donc égale à f^1 , et se plonge donc bien dans un flot C^∞ . \square

Chapitre 2

Centralisateurs exotiques

Dans le chapitre précédent, on a défini les contractions C^r , $r \geq 2$, de la demi-droite, et on a vu que le centralisateur C^r d'un tel difféomorphisme f s'identifiait canoniquement à un sous-groupe de \mathbb{R} contenant \mathbb{Z} , f étant identifié à 1. Le chapitre présent est dédié à la construction de contractions ayant un centralisateur C^r « exotique » au sens où le sous-groupe en question n'est pas \mathbb{R} tout entier. Dans la **section 2.2**, on explique comment obtenir un exemple analogue à celui de Sergeraert [Se77] évoqué plus tôt, où le centralisateur est le plus petit possible, c'est-à-dire réduit à \mathbb{Z} (*i.e.* au groupe engendré par f). On cherche ensuite à produire des exemples où il n'est ni \mathbb{R} , ni cyclique, et plus précisément où il contient, outre les entiers, un nombre irrationnel. La **section 2.3** traite du cas $r = \infty$. On verra dans le prochain chapitre que dans ce cas, le nombre irrationnel est nécessairement *de Liouville* et le centralisateur exotique a en fait nécessairement la puissance du continu. En différentiabilité finie au contraire, on construit dans la **section 2.4**, pour *n'importe quel nombre irrationnel* α , une contraction C^r , $2 \leq r \in \mathbb{N}$, dont le centralisateur C^r (toujours identifié à un sous-groupe de \mathbb{R}) est réduit à $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$.

Ces trois constructions ont la même idée de départ, due à Sergeraert, présentée dans la **section 2.1**.

2.1 Principe général

On a vu dans le chapitre précédent (cf. Lemme 1.8 et après) que partant d'un $f_0 \in \text{Diff}_+^{r,\Delta}[0,1]$ appartenant à un flot lisse, une petite perturbation locale de f_0 (dans un intervalle fondamental) se « propage », au niveau du champ de Szekeres « de gauche » (celui de $f_0|_{[0,1[}$), à toute la région à droite de l'intervalle fondamental en question, allant jusqu'à briser la différentiabilité du champ en 1.

Ici, on s'intéresse à l'intervalle semi-ouvert donc on n'a pas ce deuxième point fixe 1 sur lequel peuvent venir se fracasser les échos de la perturbation locale. On peut néanmoins avoir des « presque points fixes », au sens où la distance de f_0 à l'identité présente de fortes variations d'échelle, comme sur la figure ci-dessous.

Nous allons voir qu'un tel comportement chez une contraction f_0 de la demi-droite

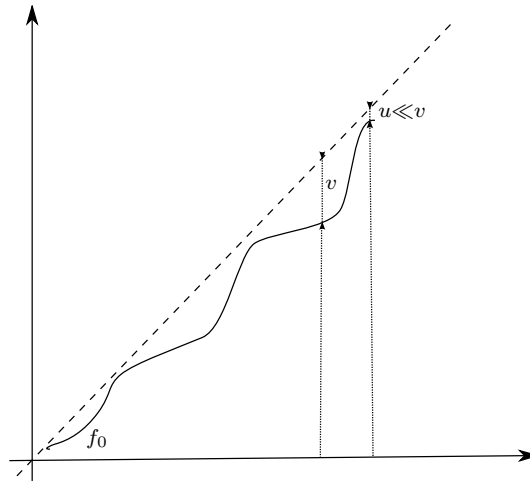
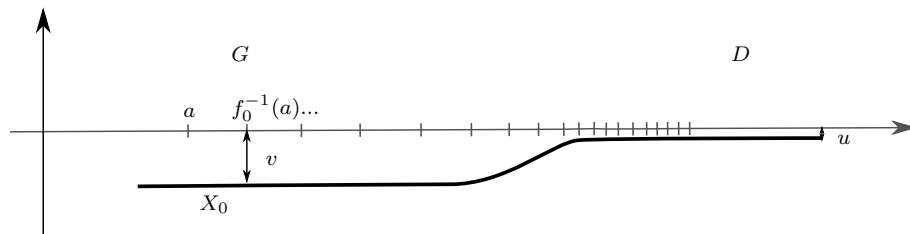


FIGURE 2.1 – Une contraction ayant des « presque points fixes »

permet de faire en sorte qu'une petite perturbation sur f_0 (dans un endroit où il est « loin » de l'identité) se traduise par une perturbation beaucoup plus grosse sur son champ de Szekeres X_0 , en un sens que nous précisons maintenant.

Partons d'un f_0 qui est le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs C^∞ , X_0 , qui, sur un certain intervalle ne contenant pas 0, a l'allure suivante (comme dans le chapitre précédent, on confond champ de vecteurs $u\partial_x$ et fonction u) :

FIGURE 2.2 – Champ initial X_0 (les petits traits verticaux représentent l'orbite passée de a par f_0)

i.e. qu'il est constant égal à un certain $-v < 0$ sur la partie gauche G de l'intervalle et à un certain $-u$ sur la partie droite D (on ne s'intéresse pas vraiment à ce qui se passe entre les deux). On suppose que u et v sont suffisamment petits pour que l'orbite passée d'un point a situé à gauche de la figure par f_0 ait au moins deux intervalles fondamentaux dans G et dans D .

Faisons subir à f_0 une petite perturbation à support dans $I = [a, f^{-1}(a)]$ résultant en un difféomorphisme f égal à f_0 en dehors de I et à $f_0 \circ \varphi$ sur I , où φ désigne un difféomorphisme C^∞ de I , C^r -proche de l'identité ($r \in \mathbb{N}^*$) et infiniment tangent à l'identité au

bord. Qu'arrive-t-il au champ de Szekeres ? Il est inchangé sur $[0, a]$, et, sur I ,

$$X_f = f^* X_f = f^* X_0 = \frac{X_0 \circ f}{Df} = \frac{-v}{D\varphi}$$

puisque f_0 est une translation à cet endroit. Considérons maintenant un intervalle fondamental J de la forme $f_0^{-k}(I)$ inclus dans D , avec $k \in \mathbb{N}^*$. Sur cet intervalle,

$$X_f = (f^k)^*(X_f | I) = (f_0^k)^*(X_f | I)$$

car f_0^k et f^k coïncident sur J . Or sur cet intervalle, f_0^k n'est rien d'autre qu'une homothétie affine h de rapport v/u . En effet, l'invariance de X_0 par son flot se traduit sur J par :

$$Df_0^k = \frac{X_0 \circ f_0^k}{X_0} = \frac{-v}{-u}.$$

Ainsi, sur J , X_f est le tiré en arrière de $X_f | I$, non constant, par une homothétie de très grand rapport si v/u est grand, ce qui donne :

$$\|X_f | J\|_r = \left(\frac{v}{u}\right)^{r-1} \|X_f | I\|_r = \frac{v^r}{u^{r-1}} \left\| \frac{1}{D\varphi} \right\|_r.$$

Ainsi, si le rapport v/u est suffisamment grand par rapport à la taille de la perturbation, aussi petite soit celle-ci, elle provoque au niveau du champ de Szekeres une grosse perturbation des dérivées d'ordre supérieur ou égal à 2.

Dans la construction de Sergeraert on choisit en outre la forme de φ de sorte que le temps $1/2$ du flot (et en fait tous les temps non entiers) soit, comme le champ de vecteurs, très perturbé à l'ordre 2 (cf. section suivante).

L'idée est alors de juxtaposer de telles « briques élémentaires » de plus en plus petites et de plus en plus proches de 0 pour obtenir la contraction exotique voulue (cf. figure 2.3).

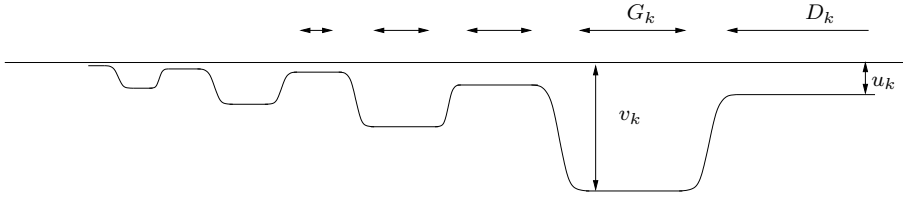
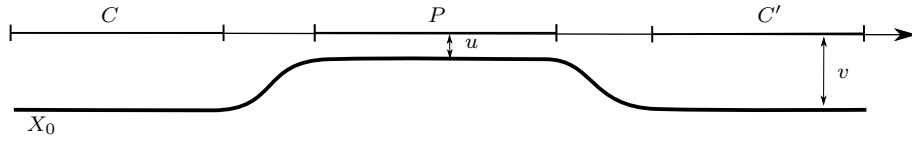


FIGURE 2.3 – Briques juxtaposées

Un détail technique désagréable est que, lorsque l'on fait une perturbation du difféomorphisme initial dans la partie gauche de la brique numéro k (les briques étant numérotées de droite à gauche, se rapprochant de 0 quand k tend vers l'infini), au niveau du champ, la perturbation se propage non seulement à la partie droite de la brique, mais aussi à toutes les briques antérieures, ce qui rend les calculs beaucoup plus compliqués. Pour éviter cet écueil, on propose la légère modification suivante, suggérée par C. Bonatti. Plutôt que de

FIGURE 2.4 – Une nouvelle « brique » de X_0

considérer des briques avec un « creux » et un « plateau », on en considère avec un plateau, de domaine P , et un creux de part et d'autre, de domaines C et C' (cf. figure 2.4).

L'intérêt est que l'on peut alors utiliser le creux de droite, pour « stopper la propagation » de la perturbation sur le champ de Szekeres.

Plus précisément, On note toujours f_0 le temps 1 du (morceau de) champ de vecteurs initial, et on lui fait toujours subir une perturbation sur un intervalle fondamental $I = [a, f_0^{-1}(a)]$ (inclus dans C) produisant un nouveau difféomorphisme de la forme $f_0 \circ \varphi$ sur I , avec φ un difféomorphisme de I . Mais cette fois-ci, on lui fait également subir une perturbation « symétrique » sur un intervalle fondamental $I' = f_0^{-l}(I)$ inclus dans C' : on le remplace ici par $f_0 \circ \psi$, où ψ est le difféomorphisme de I' défini par : $(f_0^l)^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ f_0^l$ (remarquons que f_0^l n'est autre qu'une translation ici, par un argument similaire à celui pour l'homothétie un peu plus haut, donc ψ est simplement φ^{-1} dont on a décalé le domaine). On a ainsi défini un nouveau difféomorphisme f sur I et I' , et on le prend égal à f_0 ailleurs.

Vérifions que cette deuxième perturbation a bien l'effet escompté de « stopper la propagation » de la perturbation au niveau du champ de Szekeres. Comme précédemment, X_f coïncide avec X_0 à gauche de I , est perturbé sur I , la perturbation se propage de proche en proche jusque sur la bosse centrale... Mais sur I' , un calcul élémentaire (mais peu éclairant) montre que X_f est de nouveau constant égal à $-v$, i.e. à X_0 (tout a été fait pour, comme on l'expliquera mieux dans un instant) :

$$X_f|_{I'} = (f^l)^*(X_f|_I) = \frac{-v}{D\varphi \circ f^l \times Df^l} = \frac{-v}{D(\varphi \circ f^l)},$$

or sur I' ,

$$f^l = f_0^{l-1} \circ f = f_0^l \circ (f_0^{-1} \circ f) = f_0^l \circ \psi = \varphi^{-1} \circ f_0^l,$$

et finalement $D(\varphi \circ f^l) = Df_0^l = 1$, et donc $X_f|_{I'} = -v$ comme annoncé. Et puisque $f_0 = f$ à droite de I' , par invariance de X_f et X_0 par $f_0 = f$, les deux champs coïncident à droite de I' .

On pourra ainsi, comme souhaité, procéder brique par brique, la perturbation sur une brique n'affectant pas ses voisines.

Une façon peut-être plus éclairante de voir les choses est d'interpréter cette perturbation en terme de conjugaison. En effet, on peut vérifier à la main que le difféomorphisme f ci-dessus est en fait obtenu à partir de f_0 par conjugaison par le difféomorphisme lisse ϕ valant

— l'identité sur $[0, a]$,

- $f_0^{-1} \circ \text{Id} \circ f = \varphi$ sur I ,
- $f_0^{-n} \circ \varphi \circ f^n = f_0^{-n} \circ \varphi \circ f_0^n$ sur $f_0^{-n}(I)$ pour $1 \leq n < l$,
- $f_0^{-l} \circ \varphi \circ f^l = \text{Id}$ (cf. calcul ci-dessus) sur $f_0^{-l}(I) = I'$,
- $f_0^{-n} \circ \text{Id} \circ f^n = \text{Id}$ sur $f_0^{-n}(I')$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La quatrième ligne montre que la « perturbation symétrique » sur I' est faite pour que le difféomorphisme conjuguant ϕ soit trivial à droite de I' , et donc que le champ de Szekeres demeure inchangé dans cette région.

2.2 Exemple de Sergeraert

Dans l'article [Se77], Sergeraert construit une contraction lisse de la demi-droite dont le champ de Szekeres n'est pas C^2 . En fait, ceci découle du fait que le temps 1/2 de son flot n'est pas C^2 . Voyons comment préciser les outils de la section précédente pour garantir un tel résultat.

On part d'un champ X_0 constitué de briques B_k , $k \in \mathbb{N}$, de la forme précédente (avant perturbation) de paramètres u_k et v_k , reliées entre elles par une simple interpolation de sorte que le champ obtenu soit lisse (il suffit pour cela de prendre u_k et v_k assez petits).

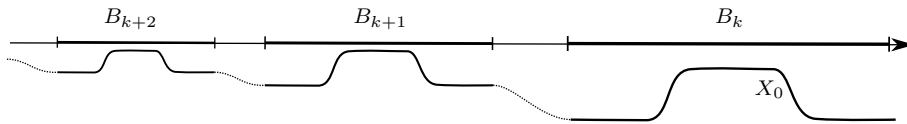


FIGURE 2.5 – Briques cimentées.

On perturbe le temps 1, f_0 , de la façon décrite précédemment, *i.e.* de façon « symétrique » dans deux intervalles fondamentaux $I = [a, b]$ et $I' = [a', b']$ de chaque brique, de façon à obtenir un nouveau difféomorphisme f toujours C^∞ (donc ayant en particulier un champ de Szekeres X_f bien défini). Il ne reste qu'à décrire la forme précise de la perturbation. On prend pour la brique k un difféomorphisme φ_k de la forme $\text{Id} + \delta_k$ avec δ_k de la forme suivante :



FIGURE 2.6 – δ_k sur $[a, b]$

Le difféomorphisme φ_k est donc en fait à support dans un demi-intervalle fondamental I_d (d pour droite) de f_0 . On note I_g la seconde moitié de I . On divise de la même façon J , intervalle fondamental de la forme $f_0^{-l}(I)$ inclus dans le domaine du « plateau », en deux demi-intervalles J_g et J_d . Il existe plusieurs façons de voir ce qu'il advient du temps 1/2 du flot après une telle perturbation. Une façon de faire est d'utiliser ce que l'on a dit précédemment du champ perturbé : sur I , $X_f = -\frac{v_k}{D\varphi_k}$. En particulier, il vaut $-v_k$ sur I_g , donc son temps 1/2 envoie le milieu m de l'intervalle sur a . Et puisque $f(b) = a$,

$f^{1/2}$ envoie nécessairement b sur m , donc finalement I_d sur I_g . Ainsi, sur I_d , l'égalité $Df^{1/2} = (X_f \circ f^{1/2})/X_f$ donne tout simplement

$$Df^{1/2} = D\varphi_k.$$

Mais alors là aussi, cette perturbation de $f_0^{1/2}$ en $f^{1/2}$ « se propage » au domaine du plateau. En effet, sur J ,

$$f^{1/2} = f^{-l} \circ f^{1/2} \circ f^l = f_0^{-l} \circ f^{1/2} \circ f_0^l.$$

Autrement dit, la restriction de $f^{1/2}$ à J est conjuguée à sa restriction à I par une homothétie de rapport v_k/u_k .

La construction de Sergeraert se résume alors à ceci : on peut choisir chaque difféomorphisme de perturbation φ_k suffisamment C^k -petit pour que le difféomorphisme f obtenu à partir de f_0 par perturbation sur chaque brique soit encore C^∞ , et on peut choisir les u_k et v_k (et surtout leurs rapports v_k/u_k , tendant vers l'infini avec k), de sorte que la dérivée d'ordre 2 du temps 1/2, en revanche, explose sur les « plateaux » lorsqu'on se rapproche de l'origine, pour la raison esquissée ci-dessus.

Une autre façon de dire est la suivante. On fixe des suites (v_k) et (u_k) avec pour seule propriété pour l'instant de tendre assez vite vers 0 pour qu'un champ de la forme de la figure 2.2 défini avec ces paramètres soit lisse jusqu'en 0. On prend pour tout k une perturbation φ_k sur la moitié d'un intervalle fondamental I dans le creux C_k , de largeur v_k , avec $\|\varphi_k - \text{Id}\|_{0,I}$ de l'ordre de $\frac{u_k}{v_k}$, de sorte que, par le théorème des accroissements finis, $\|\varphi_k - \text{Id}\|_{k,I}$ est en gros de l'ordre de $4^k \frac{u_k}{v_k^{k+1}}$ (le $4^k/v_k^k$ vient du fait que $\varphi_k - \text{Id}$ doit passer de la valeur 0 à la valeur $\frac{u_k}{v_k}$ dans un intervalle de largeur $v_k/4$), et on fixe u_k de sorte que ce nombre soit petit. Alors, pour un intervalle fondamental J dans P_k , $\|\varphi_k - \text{Id}\|_{2,J}$ (et par suite $\|f^{1/2} - f_0^{1/2}\|_{2,J}$) est de l'ordre de $\frac{v_k}{u_k} \|\varphi_k - \text{Id}\|_{2,I}$, *i.e.* de l'ordre de $1/v_k^2$, qui est grand.

On peut alternativement résumer la substance de la construction au lemme fondamental suivant qui résume ce qu'on attend d'une « brique élémentaire » :

Lemme 2.1. *Pour tous $\varepsilon, \delta > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un champ de vecteurs C^∞ sur \mathbb{R} , strictement négatif, constant en dehors de $[-\delta, \delta]$, dont le flot $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ (bien défini partout pour tout t) vérifie :*

1. $\|f^1 - \text{Id}\|_k \leq \varepsilon$;
2. $\|f^{1/2} - \text{Id}\|_2 \geq 1$.

La discussion qui précède donne une idée de la preuve du lemme : on part d'un champ du type de la figure 2.1, de paramètres u et v , dont on perturbe le flot par une perturbation φ à support dans deux demi-intervalles fondamentaux du temps 1 situés dans les « creux », avec $\|\varphi - \text{Id}\|_0 = u/v$, et il ne reste qu'à ajuster les paramètres u et v en fonction de ε et δ pour obtenir les propriétés 1 et 2.

À partir du lemme 2.1, pour obtenir le champ recherché sur \mathbb{R}_+ (dont le temps 1 est C^∞ et le temps $1/2$ non C^2), on juxtapose (en lissant la jointure) des briques données par le lemme avec des paramètres ε et δ bien choisis pour que le temps 1 global soit C^∞ ($\varepsilon = 2^{-k^2}$ et $\delta = 2^{-k-3}$ conviennent).

2.3 Centralisateur « irrationnel » en régularité infinie

Nous esquissons ici la preuve du théorème C de l'introduction, ou plutôt de son analogue sur la demi-droite, énoncé ci-dessous, qui entraîne facilement le théorème C. On rappelle qu'un nombre α est dit *de Liouville* s'il est irrationnel et non diophantien, ce qui équivaut au fait que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe des entiers p et q premiers entre eux tels que $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^k}$.

Théorème 2.2 ([Ey19], Theorem A). *Pour tout nombre α de Liouville, il existe un champ de vecteurs C^1 sur \mathbb{R}_+ , ne s'annulant qu'en 0, dont les temps 1 et α du flot sont lisses mais dont d'autres temps du flot ne sont pas C^2 .*

Par construction, l'ensemble des temps lisses contient en fait un Cantor, mais cela découle aussi du théorème E de l'introduction, prouvé dans le chapitre 3.

Remarque 2.3. Par construction (mais c'est en fait inévitable d'après les théorèmes de Szekeres-Sergeraert-Yoccoz et Takens), les temps lisses du champ de vecteurs que l'on construit sont infiniment tangents à l'identité en 0, le champ de vecteur est lisse sur \mathbb{R}_+ et sa dérivée s'annule en 0. Il est alors facile de recoller de tels champs de vecteurs pour montrer que l'énoncé ci-dessus reste vrai si l'on remplace « champ de vecteurs sur \mathbb{R}_+ ne s'annulant qu'en 0 » par « champ de vecteurs sur n'importe quel intervalle I de \mathbb{R} ».

On verra dans le chapitre 3, théorème D, que l'énoncé du théorème 2.2 est faux pour tout nombre α diophantien.

Ces énoncés (cas Liouville et cas diophantien) se généralisent à des familles de nombres irrationnels (cf. [Ey19]), la condition arithmétique critique étant alors « être ou ne pas être *simultanément diophantiens* ». Des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$, sont dits *simultanément diophantiens* s'il existe $\nu > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $\max(\|q\alpha_1\|, \dots, \|q\alpha_d\|) > \frac{C}{q^{1+\nu}}$, où $\|\alpha\|$ désigne la distance à \mathbb{Z} d'un réel α (ceci oblige l'un de ces nombres, au moins, à être irrationnel). En particulier, pour un seul nombre, *simultanément diophantien* signifie juste *diophantien*, mais une paire de nombres simultanément diophantiens peut être constituée de deux nombres (individuellement) de Liouville. Le théorème 2.2 se généralise en :

Théorème 2.4 ([Ey19], Theorem A). *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Pour toute famille $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ de nombres irrationnels non simultanément diophantiens, il existe un champ de vecteurs C^1 sur \mathbb{R}_+ ne s'annulant qu'en 0 dont le temps t est C^∞ pour tout $t \in \mathbb{Z} + \alpha_1\mathbb{Z} + \dots + \alpha_d\mathbb{Z}$ mais pas C^2 pour d'autres temps t (en particulier, le champ n'est pas C^2).*

Nous nous restreignons ici au cas d'un seul nombre irrationnel α (théorème 2.2) pour une meilleure lisibilité, le cas général ne nécessitant aucun ingrédient supplémentaire.

Le théorème 2.2 et le fait que l'énoncé soit faux pour un nombre diophantien rappellent la dichotomie suivante due à Herman et Yoccoz [He79, Yo84] concernant la linéarisation des difféomorphismes du cercle (nous ne l'écrivons volontairement pas dans sa forme optimale) :

- pour tout nombre α de Liouville, il existe un difféomorphisme lisse du cercle de nombre de rotation α qui n'est pas C^1 -conjugué à la rotation d'angle α ;
- pour tout nombre α diophantien, tout difféomorphisme lisse du cercle de nombre de rotation α est C^∞ -conjugué à la rotation d'angle α .

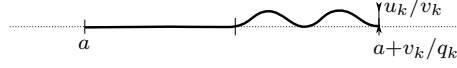
Pour la relation exacte entre ces résultats et les nôtres, qui va bien au-delà des énoncés, on renvoie à la section 3.1 du chapitre suivant. Contentons-nous ici de dire que la preuve du théorème ci-dessus est une combinaison des idées exposées dans les sections précédentes et d'une technique de type « déformation par conjugaison à la Anosov–Katok » [An–Ka70] qui peut effectivement notamment être utilisée pour construire des difféomorphismes « exotiques » du cercle.

Esquisse de preuve du théorème 2.2. Sans perdre de généralité (quitte à considérer un autre élément de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$) on peut supposer que $\alpha \in [0, 1]$. On part d'un difféomorphisme f_0 comme le difféomorphisme initial de la section précédente (les paramètres u_k et v_k des briques étant à définir ultérieurement). On va encore une fois effectuer des perturbations dans chaque brique, mais cette fois-ci, on voudrait que non seulement le temps 1 mais aussi un temps irrationnel α soient peu affectés par ces perturbations (alors que le champ, lui, doit l'être).

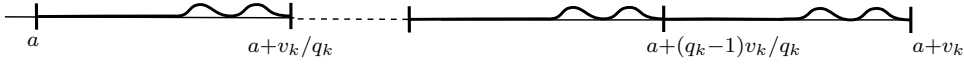
On ne peut pas adapter ce qui précède en imposant que les temps 1 *et* α restent inchangés sur le plateau, car alors on peut montrer, par densité de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ dans \mathbb{R} , que le champ le serait aussi. Ce que l'on peut faire en revanche, c'est imposer, sur la brique k , que les temps p/q_k , $q_k \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, q_k]$, et pas seulement le temps 1, soient inchangés en dehors de deux intervalles fondamentaux de f_0 , donc en particulier les temps 1 et p_k/q_k , pour de « très bonnes approximations rationnelles successives » p_k/q_k de α . Il s'agit de faire en sorte que, si l'on note $(f_k^t)_{t \in \mathbb{R}}$ le flot obtenu en ayant perturbé les briques 1 à k , les suites $(f_k^1)_k$ et $(f_k^{p_k/q_k})_k$ convergent en topologie C^∞ vers les temps 1 et α du flot d'un champ X qui lui, n'est pas C^2 . Cette dernière propriété sera assurée en prenant des perturbations φ_k telles que $\|\varphi_k - \text{Id}\|_0 = u_k/v_k$ comme dans l'exemple de Sergeraert. Le souci majeur est donc la convergence de $(f_k^{p_k/q_k})_k$. Pour en dire un peu plus, précisons la forme des perturbations.

Prenons pour commencer une suite quelconque d'approximations p_k/q_k de α , et plaçons-nous sur la brique k . Cette fois-ci, c'est au temps $1/q_k$ du flot initial que l'on va faire subir deux perturbations « symétriques » dans deux de ses intervalles fondamentaux $I = [a, b] = [a, a + v_k/q_k]$ et $I' = f_0^{-1}(I)$ situés dans les domaines des « creux ». Sur ces intervalles fondamentaux, on remplace donc f_0^{1/q_k} par $f_0^{1/q_k} \circ \varphi_k$ et $f_0^{1/q_k} \circ \psi_k$ respectivement, avec

φ_k de la forme $\text{Id} + \delta_k$ (cf. Figure 2.7) et $\psi_k = f_0^{-l} \circ \varphi_k^{-1} \circ f_0^l$ (comme dans les sections précédentes).

FIGURE 2.7 – Nouveau δ_k

Un petit exercice semblable à celui que nous avons fait pour étudier la perturbation du champ dans l'exemple de Sergeraert montre que f_0^1 (resp. $f_0^{p_k/q_k}$) est alors affecté de q_k (resp. p_k) copies de la même perturbation dans l'intervalle $[a, a + v_k]$ (resp. $[a, a + p_k/q_k \times v_k]$) et son image par f_0^{-l} (cf. Figure 2.8). La perturbation subie par ces deux difféomorphismes est donc de l'ordre de $\varphi_k - \text{Id} = \delta_k$.

FIGURE 2.8 – $f_k^1 - f_0^1 = f_k^1 - f_{k-1}^1$ sur $[a, a + v_k]$

Le théorème C se prouve en montrant qu'il existe un choix convenable de (p_k/q_k) , u_k , v_k et φ_k tel que le flot obtenu ait les propriétés souhaitées. Nous nous contenterons ici de donner une idée de l'usage de la condition de Liouville sur α .

La construction est faite pour que $\|f_k^{p_k/q_k} - f_{k-1}^{p_k/q_k}\|_k$ tende vite vers 0, mais ce qu'on veut, c'est que $\|f_k^\alpha - f_{k-1}^\alpha\|_k$ tende vers 0 suffisamment vite, et pour garantir cela, que $\|f_k^\alpha - f_k^{p_k/q_k}\|_k$ et $\|f_{k-1}^\alpha - f_{k-1}^{p_k/q_k}\|_k$ tendent vite vers 0. Or, très grossièrement, ceci est contrôlé par $|\alpha - \frac{p_k}{q_k}| \times \|X_k\|_k$, où X_k désigne le champ après perturbation sur les k premières briques. On veut donc s'arranger pour que

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| = o(1/\|X_k\|_k).$$

Or dans le plateau P_k , X_k est constant au voisinage des extrémités de J_k , distantes de u_k/q_k , donc par une application répétée du théorème des accroissements finis,

$$\|X_k\|_k \geq \left(\frac{q_k}{u_k} \right)^{k-2} \|X_k\|_2 \gg \left(\frac{q_k}{u_k} \right)^{k-2}$$

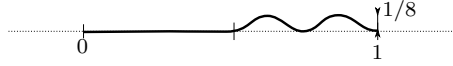
puisque la construction est faite pour que $\|X_k\|_2 \rightarrow \infty$. Ceci « montre » que pour faire converger le processus, on a besoin d'approximations de α satisfaisant notamment

$$\left| \alpha - \frac{p_k}{q_k} \right| \ll \frac{1}{q_k^{k-2}}$$

et donc que α soit de Liouville. L'objet de la partie de l'article [Ey19] consacrée aux centralisateurs exotiques est de montrer que la condition Liouville est en fait suffisante.

Plus précisément, voici l'ordre dans lequel les choses se font. Une brique B_k a pour domaine l'intervalle $[2^{-k-1}, 2^{-k}]$, et on fixe v_k de l'ordre de 2^{-k^2} . On se donne une suite

croissante $(q_k)_k$ quelconque pour le moment. On définit u_k de sorte que, si le difféomorphisme de perturbation φ_k , à support dans un intervalle de largeur $v_k/2q_k$, est tel que $\|\varphi_k - \text{Id}\|_0$ est de l'ordre de u_k/v_k , alors $\|\varphi_k - \text{Id}\|_k$ est de l'ordre de 2^{-k} (on peut prendre pour cela $u_k = 2^{-k-4}q_k^{-k}v_k^k\|\delta\|_k^{-1}$ où δ est la fonction ci-dessous).

FIGURE 2.9 – Fonction δ

Sous ces conditions, on a déjà $\|f_k^1 - f_{k-1}^1\|_k \leq 2^{-k}$ donc les temps 1 convergent vers un f^1 lisse. En outre, on a, pour tout $t \in [0, 1]$, $\|X_k \circ f_k^t\|_k \leq c(k)q_k^{n(k)}$, où $c(k)$ et $n(k)$ sont des constantes universelles indépendantes du choix de q_k . On montre alors que si $(p_k/q_k)_k$ est une suite d'approximations rationnelles d' α satisfaisant $|q_k\alpha - p_k| \leq \frac{1}{2^{k+2c(k)}q_k^{n(k)}}$, alors $\|f_k^\alpha - f_{k-1}^\alpha\|_k \leq 2^{-k}$ également, donc les temps α convergent également vers un f^α lisse, tandis que d'autres temps du flot limite ne sont pas C^2 .

2.4 Centralisateur « irrationnel » en régularité finie

Dans le chapitre 3, on verra que si les temps 1 et α d'un champ contractant de la demi-droite sont C^∞ , comme dans la section précédente, l'ensemble des temps lisses a nécessairement la puissance du continu (cf. théorème E). On montre maintenant qu'en revanche, pour tout $r \geq 2$ fini, un champ contractant peut avoir un ensemble de temps C^r réduit à $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Il s'agit de l'énoncé ci-dessous, obtenu en collaboration avec C. Bonatti¹ et analogue sur la demi-droite du théorème F de l'introduction, qui en découle facilement.

Théorème 2.5. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et tout $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$, il existe un champ de vecteurs C^1 sur $[0, +\infty[$ ne s'annulant qu'en 0 dont les temps C^r sont exactement les éléments de $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ et dont les temps entiers sont C^∞ .*

2.4.1 Un nouveau type de briques

Ici encore, la construction est à base de « briques fondamentales » juxtaposées pour obtenir le champ voulu. Mais cette fois-ci, on veut contrôler les temps 1 et α en norme C^r tout en faisant « exploser » les normes C^r de tous les temps n'appartenant pas à $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Le lemme suivant détaille les propriétés de ces « briques élémentaires » (dans cet énoncé, $V_\eta(A)$ désigne le η -voisinage d'un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ ou \mathbb{T}^1). On donne ensuite la preuve du théorème à partir de ce lemme, auquel on consacrera ensuite toute une sous-section.

Lemme 2.6 (Lemme Fondamental). *Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Pour tous*

- $\varepsilon, \delta > 0$,
- $m, n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq m \geq 1$, $k > r$,
- $\eta > 0$ tel que le η -voisinage de $\{i\alpha \bmod 1, 0 \leq i \leq 2n\} \subset \mathbb{T}^1$ soit formé de $2n + 1$ intervalles disjoints,

1. et non encore soumis

il existe un champ de vecteurs C^∞ sur \mathbb{R} , strictement négatif, constant en dehors de $[-\delta, \delta]$, dont le flot $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ (bien défini partout pour tout t) vérifie :

1. $\|f^1 - \text{Id}\|_k \leq \varepsilon$;
2. $\|f^\alpha - \text{Id}\|_r \leq \varepsilon$;
3. pour tout $t \in [0, 1] \setminus V_\eta(\{i\alpha \bmod 1, 0 \leq i \leq 2m\})$, $\|f^t - \text{Id}\|_r \geq \frac{(m-2)\varepsilon}{4}$.

Remarque 2.7. Nous aurons souvent à manipuler, dans la suite, des normes C^k de fonctions qui sont nulles en dehors d'un intervalle de longueur inférieure à 1. La norme C^k étant alors égale au sup de la dérivée k -ième sur l'intervalle considéré (d'après le théorème des accroissements finis), nous manipulerons plus souvent ce dernier, et déduirons les résultats voulus sur la norme C^k sans rejustifier à chaque fois le passage de l'un à l'autre.

Preuve du théorème 2.5. Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (on peut supposer, sans perdre de généralité, $\alpha \in]0, 1[$) et $r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$. Le champ recherché est obtenu en juxtaposant des briques obtenues grâce au Lemme Fondamental avec des paramètres bien choisis. Concrètement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $k > r$, on note X_k le champ de vecteurs donné par le Lemme Fondamental pour les paramètres suivants :

- $\varepsilon = 2^{-k^2}$;
- $\delta = 2^{-k-3}$;
- $m = \frac{1}{\varepsilon} = 2^{k^2}$;
- $n = 2^{(k+1)^2}$;
- $k = k$;
- $\eta = \eta_k$, choisi suffisamment petit pour que le η_k -voisinage de $\{|i\alpha| \bmod 1, 0 \leq i \leq 2n = 2 \times 2^{(k+1)^2}\}$ soit formé de $2n + 1$ intervalles disjoints. On fait également en sorte que la suite $(\eta_k)_k$ soit décroissante.

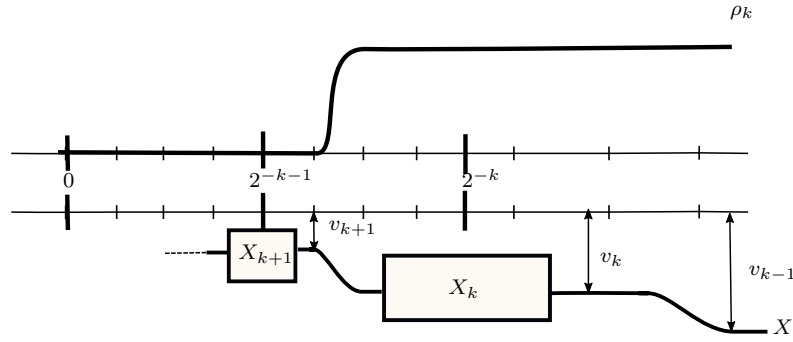
On note $-v_k$ la valeur (négative) du champ X_k en dehors de $[-2^{-k-3}, 2^{-k-3}]$. D'après le point 1 du lemme, le temps 1 de X_k est C^k - 2^{-k^2} -proche de l'identité. Or là où X_k est constant égal à $-v_k$, son flot au temps 1 n'est autre que la translation de longueur $-v_k$, donc on a nécessairement $v_k \leq 2^{-k^2}$.

On construit alors le champ X comme suggéré par la figure 2.10. Plus précisément, on se fixe une fonction C^∞ croissante $\rho : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ valant 0 sur $]-\infty, 0]$ et 1 sur $[1, +\infty[$. Pour tout $k > r$, on construit, à partir de ρ , une fonction ρ_k valant 0 sur $]-\infty, 2^{-k-1} + 2^{-k-3}]$ et 1 sur $[2^{-k} - 2^{-k-2}, +\infty[$:

$$\rho_k(x) = \rho\left(\frac{x - (2^{-k-1} + 2^{-k-3})}{2^{-k-3}}\right).$$

On définit alors le champ X sur $[0, +\infty[$ par :

$$X(x) = \begin{cases} X_k(x - 2^{-k}) & \text{sur } [2^{-k} - 2^{-k-2}, 2^{-k} + 2^{-k-2}] ; \\ \rho_k(x)(-v_k) + (1 - \rho_k(x))(-v_{k+1}) & \text{sur } [2^{-k-1} + 2^{-k-3}, 2^{-k} - 2^{-k-2}]. \end{cases}$$

FIGURE 2.10 – Allure de ρ_k et X

Par construction, ce champ de vecteurs et, par suite, les éléments de son flot sont C^∞ sur $]0, +\infty[$. Pour prouver le théorème, il s'agit donc d'étudier la régularité de ces difféomorphismes en 0.

Notons que dans les zones de « transition » (les zones T_k où les ρ_k ne sont pas constantes), X est « très gentil » : pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x \in T_k} |D^l X(x)| \leq v_k \sup_{x \in T_k} |D^l \rho_k(x)| \leq \frac{2^{-k^2}}{(2^{-k-3})^l} \|\rho\|_l \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0, \quad (2.1)$$

et par suite (cf. tout-de-même la remarque suivante), pour tout $t \in [0, 1]$, si f^t désigne le flot de X au temps t ,

$$\sup_{T_k} |D^l(f^t - \text{Id})| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (2.2)$$

Remarque. Le champ X étant strictement négatif en dehors de 0, f^t est strictement contractant, donc ne laisse pas T_k invariant. Pour obtenir (2.2) à partir de (2.1) il faut donc, en toute rigueur, vérifier que X est aussi C^l petit sur $f^1(T_k) \setminus T_k$. Mais on vérifie facilement que, pour k assez grand, X est constant égal à $-v_{k+1}$ dans cette région.

La régularité des difféomorphismes f^t en 0 ne dépend donc que de leur comportement sur l'union des $B_k = [2^{-k} - 2^{-k-2}, 2^{-k} + 2^{-k-2}]$ (dans les « boîtes » de la figure ci-dessus).

Régularité des temps entiers. Pour tout $l \in \mathbb{N}$, pour tout $k > \max(r, l)$, le point 1 du lemme fondamental entraîne :

$$\sup_{B_k} |D^l(f^1 - \text{Id})| \leq 2^{-k^2},$$

ce qui montre, avec (2.2), que f^1 (et par suite tous les temps entiers du flot) est C^∞ jusqu'en 0.

Régularité du temps α . Pour tout $k > r$, pour tout $l \in [0, r]$, le point 2 du lemme fondamental entraîne :

$$\sup_{B_k} |D^l(f^\alpha - \text{Id})| \leq 2^{-k^2},$$

ce qui montre, avec (2.2), que f^α est C^r jusqu'en 0.

Irrégularité des autres temps. Soit $t \in [0, 1] \setminus \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Pour tout $k > r$, notons $V_k = V_{\eta_k}(\{|i\alpha| \bmod 1, 0 \leq i \leq 2m_k = 2^{k^2+1}\})$ et $U_k = [0, 1] \setminus V_k$. Alors nous allons montrer que

$$t \in \bigcap_{k_0 > r} \bigcup_{k \geq k_0} U_k. \quad (2.3)$$

En effet, soit $k_0 > r$ et supposons par l'absurde que pour tout $k \geq k_0$, $t \in V_k$. Étant donné $k \geq k_0$, par hypothèse sur η_k , chaque composante connexe de V_k contient un unique élément de $\{|i\alpha| \bmod 1, 0 \leq i \leq 2m_k = 2^{(k+1)^2+1}\}$. Notons α_k celui qui se trouve dans la même composante connexe que t .

Nous allons montrer que la suite ainsi définie est constante. La taille des composantes connexes de V_k tendant vers 0 avec k , ceci montrera que t est égal à cette constante α_{k_0} , qui appartient à $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, ce qui contredira l'hypothèse sur t .

Par hypothèse sur η_k (et choix de m_k et n_k), si $\alpha_{k+1} \neq \alpha_k$, $V_{\eta_k}(\alpha_k) \cap V_{\eta_k}(\alpha_{k+1}) = \emptyset$. Or $t \in V_{\eta_k}(\alpha_k)$ donc ne peut appartenir à $V_{\eta_{k+1}}(\alpha_{k+1}) \subset V_{\eta_k}(\alpha_{k+1})$, ce qui va à l'encontre de la définition de α_{k+1} . La suite $(\alpha_k)_k$ est donc bien constante, ce qui conclut la preuve de (2.3).

Ainsi, t appartient à une infinité de U_k . Quitte à extraire, on peut donc supposer que $t \in \bigcap_{k > r} U_k$. D'après le point 3 du lemme, on a alors, pour tout $k > r$,

$$\sup_{B_k} |D^r(f^t - \text{Id})| \geq \frac{(2^{k^2} - 2) \times 2^{-k^2}}{4} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \neq 0,$$

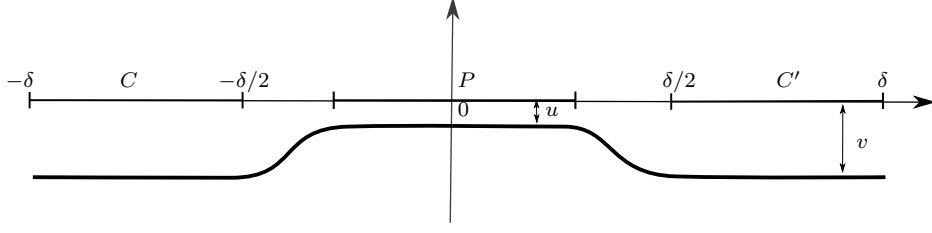
ce qui, avec (2.2), montre que f^t n'est pas C^r sur $[0, +\infty[$, et conclut donc la preuve du théorème. \square

2.4.2 Preuve du lemme fondamental

Idée de la construction

Soient α, δ, m, n , et η comme dans l'énoncé du lemme. Sans perdre de généralité, on peut supposer $0 < \alpha < 1$. Comme dans les sections précédentes, on va partir d'une brique initiale de type « double creux / plateau » dont les paramètres seront à déterminer. On va lui faire subir une perturbation qui laissera le temps 1 inchangé en dehors des creux, sur lesquels l'effet de la perturbation sera contrôlé. Mais cette fois-ci, celle-ci ne sera pas à support dans deux intervalles fondamentaux. Elle sera « étalée » le long d'un segment d'orbite du temps α pour que celui-ci aussi soit peu affecté.

Plus précisément, on part d'un champ du type ci-dessous (Figure 2.11), noté $X^{u,v}$. On appellera C, C' et P (pour « creux » et « plateau ») les intervalles $] -\infty, -\frac{\delta}{2}]$, $[\frac{\delta}{2}, +\infty[$ et $[-\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4}]$, où $X^{u,v}$ est respectivement constant égal à $-v$ (sur $C \cup C'$) et à $-u$ (sur P).

FIGURE 2.11 – Champ $X^{u,v}$

Une fois les paramètres u et v choisis, on note X_0 le champ $X^{u,v}$ correspondant, et $(f_0^t)_t$ son flot. Pour $j \in \llbracket 0, 2m \rrbracket$, on pose $x_j = f_0^{-j\alpha}(-\delta + v)$ et $I_j = V_{\eta v/2}(x_j)$. On note

$$I = \bigcup_{0 \leq j \leq 2m} I_j \quad \text{et} \quad M = \max\{i \in \mathbb{N} ; f_0^{-i}(I_{2m}) \subset [-\delta, \delta]\} - 1.$$

Pour l'instant, on suppose seulement v (et donc u) suffisamment petit pour que :

- (i) C contienne le v -voisinage du segment d'orbite $\{x_0, \dots, x_{2m}\}$ de f_0^α ,
- (ii) C' contienne $f_0^{-M}(I) \cup f_0^{-M-1}(I)$,
- (iii) pour tout $j \in \{0, \dots, 2m\}$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que le u -voisinage de $f_0^{-i}(I_j)$ soit inclus dans P .

On se donne ensuite un difféomorphisme « modèle » φ à support dans $[-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}]$. On notera $\varphi_{\nu,x}$ le difféomorphisme conjugué à φ par l'homothétie de rapport ν envoyant 0 sur x .

On peut maintenant définir le temps 1 perturbé f par :

$$f = f_0 \circ \begin{cases} \varphi_{\nu,x_j}^{(m-|m-j|)} & \text{sur } I_j, 0 \leq j \leq 2m, \\ \varphi_{\nu,f_0^{-M-1}(x_j)}^{-(m-|m-j|)} & \text{sur } f_0^{-M-1}(I_j), 0 \leq j \leq 2m, \\ \text{Id} & \text{partout ailleurs.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Notons que, f_0^α étant une translation envoyant x_j sur x_{j-1} pour tout $1 \leq j \leq 2m$,

$$\varphi_{\nu,x_j} = f_0^{-j\alpha} \circ \varphi_{\nu,x_0} \circ f_0^{j\alpha}. \quad (2.5)$$

On peut vérifier, de façon similaire aux sections précédentes, que $f = h^{-1} \circ f_0 \circ h$ avec

$$h = \begin{cases} f_0^{-i} \circ \varphi_{\nu,x_j}^{(m-|m-j|)} \circ f_0^i & \text{sur } f_0^{-i}(I_j), \forall j \in \{0, \dots, 2m\}, i \in \{0, \dots, M\}, \\ \text{Id} & \text{partout ailleurs.} \end{cases}$$

(Ceci a bien un sens car, par hypothèse sur η , les $f_0^{-i}(I_j)$, $1 \leq j \leq 2m$, $i \in \mathbb{N}$, sont deux à deux disjoints.) Le difféomorphisme C^∞ ainsi défini est à support dans $[-\delta, \delta]$ d'après (i) et (ii).

Si l'on note $(f^t)_t$ le flot du champ de Szekeres de f (de sorte que $f = f^1$ et $f^t = h^{-1} \circ f_0^t \circ h$), cette perturbation est conconctée de sorte que :

$$f^\alpha = \begin{cases} f_0^\alpha \circ (f_0^{-i} \circ \varphi_{v,x_j} \circ f_0^i) & \text{sur } f_0^{-i}(I_j), 1 \leq j \leq m, 0 \leq i \leq M, \\ f_0^\alpha \circ (f_0^{-i} \circ \varphi_{v,x_j}^{-1} \circ f_0^i) & \text{sur } f_0^{-i}(I_j), m+1 \leq j \leq 2m, 0 \leq i \leq M, \\ f_0^\alpha & \text{partout ailleurs.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Les paramètres seront choisis de sorte que les difféomorphismes entre parenthèses soient aussi proches de l'identité que requis dans l'énoncé du lemme. En revanche, pour tout $t \in [0, 1] \setminus V_\eta(\{j\alpha \bmod 1, 0 \leq j \leq 2m\})$ et tout $i \in \{0, \dots, M\}$ tel que le u -voisinage de $f_0^{-i}(I_m)$ soit inclus dans $P = [-\frac{\delta}{4}, \frac{\delta}{4}]$, on peut vérifier que la perturbation affecte « m fois plus » le temps t :

$$f^t - f_0^t = (f_0^{-i} \circ \varphi_{v,x_m}^m \circ f_0^i) - \text{Id} \quad \text{sur } f_0^{-i}(I_m). \quad (2.7)$$

Le fait que le temps α soit « m fois moins affecté » provient de l'étalement de la perturbation précisément le long d'un segment d'orbite de ce temps du flot.

Il reste à montrer que, étant donnés ε , r et k comme dans le lemme, il existe un choix de v , u et φ tels que le flot obtenu satisfasse bien :

1. $\|f^1 - \text{Id}\|_k \leq \varepsilon$;
2. $\|f^\alpha - \text{Id}\|_r \leq \varepsilon$;
3. pour tout $t \in [0, 1] \setminus V_\eta(\{j\alpha \bmod 1, 0 \leq j \leq 2m\})$, $\|f^t - \text{Id}\|_r \geq \frac{(m-2)\varepsilon}{4}$.

Voici dans quel ordre les choix sont faits. Ceux-ci sont justifiés a posteriori par la preuve des points 1. à 3., où l'on se contente de confirmer rigoureusement l'idée d'étalement de la perturbation déjà évoquée.

Choix des paramètres

Choix de v . On choisit $v > 0$ tel que tous les champs de la famille $X^{u,v}$, $u \in [0, v]$, soient $\frac{\varepsilon}{2}$ - C^k -petits, et que leurs flots au temps t , pour tout $t \in [0, 1]$, soient $\frac{\varepsilon}{2}$ - C^k -proches de l'identité (on peut donner une formule explicite pour $X^{u,v}$ et on vérifie facilement que, quand v tend vers 0, la famille des $X^{u,v}$, $u \in [0, v]$, converge uniformément vers le champ nul en topologie C^∞). On prend également v assez petit pour que les propriétés (i) et (ii) de l'« idée de la construction » soient satisfaites ($v < \frac{\delta}{3(2m+2\eta)}$ convient pour cela). Enfin, on prend également v suffisamment petit pour que la conclusion du lemme suivant soit satisfaite :

Lemme 2.8. *Pour v suffisamment petit, pour tout $u \in [0, v]$, le flot (f_0^t) de $X_0 := X^{u,v}$ satisfait : si J et N sont un intervalle et un entier tels que $f_0^{-N}(J) \subset P$,*

$$\text{sur } J, \quad \forall 1 \leq l \leq r, \quad |D^l f_0^{-N}| \leq \frac{u}{|X_0|^l}. \quad (2.8)$$

et

$$\text{sur } f_0^{-N}(J), \quad \forall 2 \leq l \leq r+1, \quad |D^l f_0^N| \leq \frac{\varepsilon}{8r|\Pi_r|^2} \times \frac{|X_0 \circ f_0^N|}{u^l}. \quad (2.9)$$

où Π_r désigne le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \dots, r\}$.

Ce lemme se démontre en observant que sur J , $Df_0^{-N} = -\frac{u}{X_0}$ et sur $f_0^{-N}(J)$, $Df_0^N = -\frac{X_0 \circ f_0^N}{u}$.

Choix de φ . On rappelle que $r, k \geq 2$ et η sont fixés. On admet le lemme suivant :

Lemme 2.9. *Arbitrairement C^k -près de l'identité, il existe un difféomorphisme φ de \mathbb{R} à support dans $[-\frac{\eta}{2}, \frac{\eta}{2}]$ tel que :*

$$\frac{\|\varphi^m - \text{Id}\|_r}{\|\varphi - \text{Id}\|_r} \geq \frac{m}{2}.$$

On choisit un tel φ suffisamment C^k -près de l'identité pour que

$$\forall l \in \llbracket -m, m \rrbracket, \quad \|\varphi_{v,0}^l - \text{Id}\|_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.10)$$

(le choix de la proximité de l'identité requise pour φ dépend évidemment du v fixé à l'étape précédente, la conjugaison par une homothétie de petit rapport v faisant exploser les normes C^k pour $k \geq 2$).

Choix de u . Pour un u quelconque dans $[0, v]$, pour tout $l \in \mathbb{N}$,

$$\left\| D^l(\varphi_{u,0} - \text{Id}) \right\|_0 = u^{(1-l)} \left\| D^l(\varphi - \text{Id}) \right\|_0. \quad (2.11)$$

En particulier, il existe un u (suffisamment petit) tel que

$$\|\varphi_{u,0} - \text{Id}\|_r = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.12)$$

On note dorénavant X_0 le champ $X^{u,v}$ correspondant aux paramètres v et u choisis, f_0^t son flot au temps t et f_0 son flot au temps 1.

Démonstration du point 1. D'après (2.4),

$$\|f^1 - f_0^1\|_k = \max_{0 \leq j \leq 2m} \left\{ \left\| \varphi_{v,x_j}^{(m-|m-j|)} - \text{Id} \right\|_k, \left\| \varphi_{v,f_0^{-(M+1)}(x_j)}^{-(m-|m-j|)} - \text{Id} \right\|_k \right\}.$$

et les normes ci-dessus sont inférieures à

$$\max_{l \in \llbracket -m, m \rrbracket} \left\| \varphi_{v,0}^l - \text{Id} \right\|_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{d'après (2.10).}$$

Comme d'autre part v a été choisi de sorte que $\|f_0^1 - \text{Id}\|_k < \frac{\varepsilon}{2}$, on a bien la majoration du point 1.

Démonstration du point 3. Soit $t \in [0, 1] \setminus V_\eta(\{j\alpha \bmod 1, 0 \leq j \leq 2m\})$ et $0 \leq i \leq M$ tel que $f_0^{-i}(I_m) \subset P$ (l'existence d'un tel i a été assurée par le choix de v). D'après (2.7), sur $f_0^{-i}(I_m)$,

$$f^t - f_0^t = (f_0^{-i} \circ \varphi_{v,x_m}^m \circ f_0^i) - \text{Id} = (f_0^{-i-m\alpha} \circ \varphi_{v,x_0}^m \circ f_0^{i+m\alpha}) - \text{Id}.$$

Mais par un exercice que nous avons déjà fait dans les sections précédentes (utilisant l'égalité $Df_0^t = X_0 \circ f_0^t/X_0$), sur cet intervalle, $f_0^{i+m\alpha}$ est affine de pente v/u , donc

$$\|f^t - f_0^t\|_r \geq \|\varphi_{u,0}^m - \text{Id}\|_r.$$

Or φ a été choisi de sorte que l'inégalité ci-dessous soit vérifiée :

$$\frac{\|\varphi_{u,0}^m - \text{Id}\|_r}{\|\varphi_{u,0} - \text{Id}\|_r} = \frac{u^{1-r} \|\varphi^m - \text{Id}\|_r}{u^{1-r} \|\varphi - \text{Id}\|_r} \geq \frac{m}{2}$$

et u a justement été choisi pour que

$$\|\varphi_{u,0} - \text{Id}\|_r = \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui entraîne

$$\|\varphi_{u,0}^m - \text{Id}\|_r \geq \frac{m\varepsilon}{4},$$

et donc

$$\|f^t - \text{Id}\|_r \geq \|f^t - f_0^t\|_r - \|f_0^t - \text{Id}\|_r \geq \frac{m\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{(m-2)\varepsilon}{4},$$

ce qui conclut la preuve du point 3.

Démonstration du point 2. Commençons par observer que pour tout intervalle J de la forme $f_0^{-i}(I_j) \subset C \cup C'$, $0 \leq j \leq 2m$,

$$\begin{aligned} \|f^\alpha - f_0^\alpha\|_{r,J} &= \left\| f_0^\alpha \circ f_0^{-i} \circ \varphi_{v,x_j}^{\pm 1} \circ f_0^i - f_0^\alpha \right\|_{r,J} \quad \text{d'après (2.6)} \\ &= \left\| \varphi_{v,x_j}^{\pm 1} - \text{Id} \right\|_{r,\mathbb{R}} \quad \text{car } f_0^\alpha \text{ et } f_0 \text{ sont des translations dans les domaines concernés} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{d'après (2.10)}. \end{aligned}$$

De façon similaire, pour tout intervalle J de la forme $f_0^{-i}(I_j) \subset P$, $0 \leq j \leq 2m$,

$$\begin{aligned} \|f^\alpha - f_0^\alpha\|_{r,J} &= \left\| f_0^\alpha \circ f_0^{-i} \circ \varphi_{v,x_j}^{\pm 1} \circ f_0^i - f_0^\alpha \right\|_{r,J} \quad \text{d'après (2.6)} \\ &= \left\| f_0^{-i} \circ \varphi_{v,x_j}^{\pm 1} \circ f_0^i - \text{Id} \right\|_{r,J} \quad \text{car } f_0^\alpha \text{ est une translation sur } J \\ &= \left\| \varphi_{u,0}^{\pm 1} - \text{Id} \right\|_{r,\mathbb{R}} \quad \text{car } f_0^i \text{ est à cet endroit une homothétie de rapport } v/u \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{d'après (2.12)}. \end{aligned}$$

Il nous faut maintenant contrôler $\|f^\alpha - f_0^\alpha\|_r$ sur les autres $f_0^{-i}(I_j)$, ce qui s'avère être la partie à la fois la plus creuse et la plus pénible de ce travail, et nous ne la détaillerons pas ici. Disons seulement qu'étant donné un tel intervalle J , et $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_0^{-N}(J) \subset P$, sur J ,

$$\begin{aligned} f^\alpha - f_0^\alpha &= f^N \circ f^\alpha \circ f^{-N} - f_0^N \circ f_0^\alpha \circ f_0^{-N} \\ &= f_0^N \circ f^\alpha \circ f_0^{-N} - f_0^N \circ f_0^\alpha \circ f_0^{-N} \quad \text{d'après la troisième ligne de (2.4).} \end{aligned}$$

On montre alors que sur J , la norme C^r de cette quantité est majorée par ε , en utilisant la formule de Faà di Bruno, le choix de v (cf. (2.8) et (2.9)) et le fait que $\|f^\alpha - f_0^\alpha\|_{r, f_0^{-N}(J)} = \frac{\varepsilon}{2}$. \square

2.5 Perspectives

À partir des résultats de ce chapitre, on peut se poser tout un tas de questions dérivant de l'interrogation générale suivante :

Question 2.10. *Quels sous-groupes de \mathbb{R} (contenant \mathbb{Z}) peut-on réaliser comme C^r -centralisateur d'une contraction C^s de la demi-droite (avec $2 \leq r \leq s \leq +\infty$) ?*

Notamment :

- Peut-on généraliser le théorème 2.5 pour montrer que tout sous-groupe finiment engendré de \mathbb{R} contenant \mathbb{Z} se réalise comme centralisateur C^r d'une contraction C^r ?
- Dans un exemple où le centralisateur C^r est $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, que dire du centralisateur C^{r-1} ? Est-il nécessairement plus gros ?
- Que dire de la taille (dimension de Hausdorff ?) d'un centralisateur exotique obtenu à partir du théorème 2.2 ? (le théorème 3.2 affirme qu'il contient un Cantor, et le théorème 3.1 implique qu'il ne contient pas de nombre diophantien et est donc de mesure nulle).
- Le C^∞ -centralisateur d'une contraction C^∞ peut-il être dénombrable et dense ? D'après le théorème 3.2, un tel exemple ne peut pas contenir de nombre irrationnel. Mais peut-on par exemple réaliser \mathbb{Q} comme C^∞ -centralisateur d'une contraction C^∞ ? Il nous semble que la réponse est positive, mais ce résultat anecdotique n'a pas fait l'objet d'une publication.
- Si l'on note Z_f^r le C^r -centralisateur d'un difféomorphisme f , peut-on construire une contraction f pour laquelle toutes les inclusions ci-dessous soient strictes

$$\mathbb{R} = Z_f^1 \supset \dots \supset Z_f^{k-1} \supset Z_f^k \supset \dots \supset Z_f^\infty \supset \mathbb{Z} \quad ?$$

Chapitre 3

Flots sur l'intervalle

On a vu dans le chapitre précédent (théorème 2.2) qu'un champ de vecteurs C^1 complet sur un intervalle pouvait avoir ses temps 1 et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ lisses sans être lui-même ne serait-ce que C^2 . On montre ici que cela ne peut néanmoins pas se produire pour n'importe quel nombre irrationnel α .

On rappelle qu'un nombre est dit *diophantien d'ordre ν* s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $|q\alpha - p| > \frac{C}{q^{1+\nu}}$. Un nombre est diophantien s'il est diophantien d'ordre ν pour un certain $\nu > 0$. Un nombre irrationnel non diophantien est dit *de Liouville*.

Théorème 3.1 (cf. [Ey19], Theorem B). *Soit α un nombre diophantien. Étant donné un champ de vecteurs complet X de classe C^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} , si le temps t du flot de X est C^∞ pour tout $t \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, alors X est lui-même C^∞ .*

Le cœur de la preuve consiste en des estimées générales, présentées dans la section 3.2, qui entraînent, *sans hypothèse arithmétique*, que si l'ensemble des temps lisses contient 1 et un nombre irrationnel, alors il a nécessairement la puissance du continu :

Théorème 3.2 (cf. [Ey19], Theorem C). *Soit X un champ de vecteurs C^1 complet sur un intervalle I de \mathbb{R} . Si l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que le temps t de X est C^∞ contient 1 et un nombre irrationnel α , il contient alors un ensemble de Cantor K_α (ne dépendant que de α , pas de X).*

La dichotomie Liouville/diophantien des théorèmes complémentaires 2.2 et 3.1 n'est pas sans rappeler de célèbres résultats sur la linéarisation des difféomorphismes du cercle. Le théorème 3.2, en revanche, contraste avec un autre résultat de Yoccoz sur le cercle (cf. théorème 3.5). Nous explicitons dans la **section 3.1** la relation entre les deux situations et, en cours de route, nous étendons les théorèmes 3.1 et 3.2 aux « flots C^0 », obtenant ainsi les théorèmes D et E de l'introduction. Nous passons ensuite dans la **section 3.2** à l'idée centrale des deux preuves et aux estimées générales évoquées ci-dessus, et nous en déduisons les théorèmes 3.1 et 3.2 dans la **section 3.3**.

3.1 Lien avec les difféomorphismes du cercle

Cette section est essentiellement extraite (et traduite) de l'introduction de l'article [Ey19]. Par cercle, on entend $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\bar{\alpha} \in \mathbb{T}^1$ sa classe modulo 1. De plus, on note $H(\mathbb{T}^1)$ l'ensemble des homéomorphismes de \mathbb{R} qui commutent avec la translation unité. Rappelons que, si $f \in H(\mathbb{T}^1)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\frac{f^n(x)-x}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre qui ne dépend pas de x , appelé *nombre de translation de f* et noté $\tau(f)$. Notons que f a un point fixe si et seulement si $\tau(f) = 0$. Si g est un homéomorphisme du cercle et $\tilde{g} \in H(\mathbb{T}^1)$ un relevé de g à \mathbb{R} , $\tau(\tilde{g})$ ne dépend que de g (pas du relevé) et est appelé *nombre de rotation de g* , et noté $\rho(g)$.

Voici maintenant les célèbres résultats de linéarisation auxquels nous avons fait référence dans le paragraphe précédent (le premier est volontairement cité dans une forme non optimale) :

Théorème 3.3 (Herman [He79]). *Pour tout nombre de Liouville α , il existe un difféomorphisme lisse du cercle de nombre de rotation α qui n'est pas C^1 -conjugué à la rotation correspondante.*

Théorème 3.4 (Herman [He79], Yoccoz [Yo84]). *Tout difféomorphisme lisse du cercle de nombre de rotation diophantien est C^∞ -conjugué à la rotation correspondante.*

Un premier réflexe naturel est de se demander si les théorèmes 2.2 et 3.1 peuvent se déduire d'une façon ou d'une autre des énoncés ci-dessus. Peut-on utiliser les difféomorphismes « exotiques » du théorème 3.3 pour construire un flot « exotique » comme dans le théorème 2.2 ? Peut-on « traduire » le flot du théorème 3.1 en termes de difféomorphisme du cercle auquel 3.4 s'applique et obtenir la conclusion souhaitée ? Nous verrons que la réponse est *non*, bien qu'il existe en effet une relation entre difféomorphismes du cercle et flots, mais pas n'importe quels flots : les flots qui définissent une action *libre* du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur la droite réelle \mathbb{R} (ou n'importe quel intervalle ouvert). Nous, au contraire, nous intéressons en premier lieu aux \mathbb{R} -actions *non libres* (les contractions, en particulier, fixent 0). Nous verrons qu'il y a des différences fondamentales entre les deux situations (libre et non libre), et le challenge rencontré dans la preuve de nos théorèmes est précisément de déterminer quelles techniques utilisées dans le cas libre s'appliquent dans le cas non libre, et comment.

Mais explicitons d'abord la correspondance évoquée ci-dessus. En deux mots, à un difféomorphisme du cercle de nombre de rotation $\bar{\alpha}$ irrationnel correspond une \mathbb{R} -action libre sur \mathbb{R} avec des temps 1 et α lisses, et inversement.

En effet, considérons d'abord un difféomorphisme g du cercle de nombre de rotation $\bar{\alpha}$ irrationnel. Le théorème de Denjoy affirme que g est conjugué par un homéomorphisme φ à la rotation $R_{\bar{\alpha}}$. Ainsi, g se plonge dans le groupe à un paramètre $(\varphi \circ R_{\bar{\alpha}}^t \circ \varphi^{-1})_{t \in \mathbb{R}}$ d'homéomorphismes du cercle. Celui-ci se relève de façon unique en groupe à un paramètre (ou flot C^0) $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de $H(\mathbb{T}^1)$ conjugué au flot des translations $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$ par un relevé $\tilde{\varphi}$ de φ , dans lequel $f^1 = T_1$ est lisse, tout comme f^α , en tant que relevé de g . Ce flot, comme celui des translations, agit librement sur \mathbb{R} .

Inversement, soit $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un flot C^0 sur \mathbb{R} définissant une \mathbb{R} -action continue *libre* sur \mathbb{R} et tel que f^t est C^∞ pour tout $t \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Le temps 1, f^1 , n'a pas de point fixe, donc quitte à conjuguer par un difféomorphisme C^∞ , on peut supposer $f^1 = T_1$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, f^t est un homéomorphisme de \mathbb{R} commutant avec la translation unité, donc il a un nombre de translation $\tau(f^t)$ bien défini, et celui-ci vaut t (en effet, quand on le restreint à un sous-groupe abélien de $H(\mathbb{T}^1)$, τ est un morphisme de groupe, et en particulier, $t \mapsto \tau(f^t)$ est un automorphisme continu de $(\mathbb{R}, +)$ envoyant 1 sur 1, donc l'identité). Ainsi, f^α induit un C^∞ -difféomorphisme g du cercle de nombre de rotation $\bar{\alpha}$.

En tenant compte de ceci, nous affirmons que les théorèmes 3.3 et 3.4 sont respectivement équivalents aux énoncés suivants :

- Si α n'est pas diophantien, il existe un C^0 -flot $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ **agissant librement** sur \mathbb{R} dont le temps t est lisse pour tout $t \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ mais qui n'est pas C^1 -conjugué au flot des translations $(T_t)_{t \in \mathbb{R}}$;
- si α est diophantien, tout C^0 -flot $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ **agissant librement** sur \mathbb{R} dont le temps t est lisse pour tout $t \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est C^∞ -conjugué au flot des translations.

Notons que dans le second énoncé, l'action étant supposée libre, « est C^∞ -conjugué au flot des translations » (qui est le flot du champ unité sur \mathbb{R}) peut être remplacé par « est le flot d'un champ de vecteurs C^∞ » (nécessairement partout non nul).

Nous affirmons maintenant que le théorème 3.1 peut être utilisé pour obtenir un énoncé identique au second énoncé ci-dessus pour les actions *non libres*. C'est le contenu du théorème D de l'introduction, rappelé ci-dessous, **dont l'énoncé, finalement, est valable en toute généralité** (pour les actions libres ou non).

Théorème D. *Soit α un nombre diophantien. Si $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre d'homéomorphismes d'un intervalle I de \mathbb{R} **agissant non librement** sur I et tel que $f^t \in \text{Diff}_+^\infty(I)$ pour tout $t \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, alors $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot d'un champ de vecteurs C^∞ sur I .*

Plus précisément, on peut voir (cf. [Ey19], Proposition 2.2) qu'il découle des travaux de Szekeres, Kopell et Takens présentés dans le chapitre 1 et de leur approfondissement par Yoccoz [Yo95] qu'un C^0 -flot comme ci-dessus (agissant **non librement**) est *automatiquement, sans hypothèse arithmétique sur α* , le flot d'un champ de vecteurs C^1 sur I (\star), qui est même C^∞ sur le complémentaire de ses points d'annulation ($\star\star$). Ceci montre en particulier qu'il ne peut pas y avoir d'analogue strict, en termes de régularité, du théorème 3.3 (ou de sa reformulation en terme de flot) dans le cas non libre, où tout est automatiquement C^1 d'après (\star). Mais surtout, ($\star\star$) affirme que dans le cas non libre, la question de la régularité de l'action est concentrée aux points fixes ; en dehors d'eux, où l'action est libre, tout est automatiquement lisse. Ainsi les *résultats* sur les actions libres (traductions des théorèmes 3.3 et 3.4) ne peuvent rien nous dire que nous ne sachions déjà concernant le théorème D, et ne peuvent pas nous servir à construire les actions non libres du théorème C (même dans une version adaptée où C^1 serait remplacé par C^2).

En revanche, nos *preuves* sont profondément inspirées de celles sur le cercle, dont elles empruntent et adaptent certaines techniques (comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre 2 dans le cas « Liouville ») mais avec des différences significatives.

Concernant le « cas diophantien », dans le cas libre (cas du cercle), la preuve du théorème 3.4 se divise en deux parties : prouver la conjugaison C^1 (ce qui requiert déjà l'hypothèse diophantienne), puis « bootstrapper » de C^1 à C^∞ (pour une idée de ce qu'on entend ici par ce terme, voir la remarque 3.12). Dans le cas non libre (théorème D), comme nous l'avons déjà affirmé, l'analogue de la première partie (et en fait plus, cf. ci-dessous) est traité par les travaux « classiques » du chapitre 1, sans recours à l'hypothèse arithmétique, réduisant le théorème D au théorème 3.1.

Donc en principe, notre tâche serait de reprendre la preuve de la partie « bootstrap » (ainsi que des bornes *a priori* qu'elle met en jeu) dans [He79, Yo84], traduire chaque étape en termes de \mathbb{R} -actions, et voir, pour chacune, si l'hypothèse de liberté est superflue (cela nécessite en particulier de se débarrasser de tout argument spécifique au cercle ou de toute allusion aux translations, qui, encore une fois, sont le modèle canonique pour les \mathbb{R} -actions libres sur \mathbb{R} , alors qu'il n'y a pas de tel modèle dans le cas non libre).

Toutefois, il apparaît une différence majeure entre la preuve que l'on donne du théorème 3.1 et la stratégie ci-dessus. En quelques mots, cela vient du fait que, dans le cas du cercle, le bootstrap commence avec un flot qui est C^1 -conjugué au flot des translations, alors qu'ici, nous partons d'un champ de vecteurs C^1 . Observons que dans le cas libre, être engendré par un champ C^1 (sans singularité) est équivalent à être C^2 -conjugué au flot des translations (la conjugante ϕ étant reliée au champ de vecteurs générateur $u\partial_x$ par $\phi' = 1/u$). Ce petit décalage dans la régularité de laquelle on part, répercuté dans l'usage que l'on fait des inégalités de convexité d'Hadamard (cf. section 3.2.3) se révèle avoir un effet immense sur la preuve (cf. Remarque 3.20). Concrètement, on obtient la plupart des analogues des estimées du bootstrap de [Yo84] *sans la condition diophantienne*. Une conséquence est le théorème 3.2, qui, comme le théorème 3.1, admet une généralisation aux C^0 -actions *non libres*, en particulier les actions sur des intervalles non ouverts :

Théorème E (cf. [Ey19], Theorem C'). *Soit $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ un groupe à un paramètre d'homéomorphismes d'un intervalle I de \mathbb{R} agissant non librement sur I . Si $\{t \in \mathbb{R} : f^t \in \text{Diff}_+^\infty(I)\}$ contient $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ pour un nombre irrationnel α , alors il contient un ensemble de Cantor K_α (ne dépendant que de α).*

En revanche, le théorème suivant de Yoccoz [Yo95] montre que l'analogue de l'énoncé ci-dessus est faux dans le cas *libre* :

Théorème 3.5 (Yoccoz, [Yo95] p. 207). *Il existe $g \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$ avec un nombre de rotation irrationnel dont le centralisateur dans $\text{Diff}_+^\infty(\mathbb{T}^1)$ est réduit aux itérés de g .*

En effet, comme vu précédemment, à un tel g , de nombre de rotation $\alpha \pmod 1$, correspond un sous-groupe à un paramètre $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ de $\text{Homéo}_+(\mathbb{R})$ dans lequel $f^1 = T_1$, f^α est un relevé de g et tout f^t lisse induit un difféomorphisme lisse du cercle commutant avec g . Ainsi, la trivialité du centralisateur implique que dans ce cas, l'ensemble $\{t \in \mathbb{R} : f^t \in \text{Diff}_+^\infty(\mathbb{R})\}$ est exactement $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, contrairement au théorème E.

Notons pour conclure que, comme dans le cas du cercle (cf. [Fa–Kh09]), le théorème D se généralise aux *familles* de nombres *simultanément* diophantiens. Rappelons que des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, avec $d \in \mathbb{N}^*$, sont dits *simultanément diophantiens* s'il existe $\nu > 0$ et $C > 0$ tels que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, $\max(\|q\alpha_1\|, \dots, \|q\alpha_d\|) > \frac{C}{q^{1+\nu}}$, où $\|\alpha\|$ désigne la distance à \mathbb{Z} d'un réel α (ceci oblige l'un de ces nombres, au moins, à être irrationnel). En particulier, pour un seul nombre, *simultanément diophantien* signifie juste *diophantien*, mais une paire de nombres simultanément diophantiens peut être constituée de deux nombres (individuellement) de Liouville. Le théorème suivant ne découle donc pas directement du théorème D, l'ingédient manquant étant directement tiré de [Fa–Kh09] :

Théorème 3.6 (cf. [Ey19], Theorem B'). *Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ une famille de nombres simultanément diophantiens. Si $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est un groupe à un paramètre d'homéomorphismes d'un intervalle I de \mathbb{R} **agissant non librement** sur I et tel que f^t appartient à $\text{Diff}_+^\infty(I)$ pour tout $t \in \mathbb{Z} + \alpha_1\mathbb{Z} + \dots + \alpha_d\mathbb{Z}$, alors $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ est le flot d'un champ de vecteurs C^∞ sur I .*

3.2 Cœur commun des deux preuves

Dans [Ey19], on montre que, pour prouver les théorèmes 3.1 et 3.2, on peut en fait se ramener au cas où I est \mathbb{R} , $\alpha \in [0, \frac{1}{4}[$ et X est 1-périodique, ce que nous faisons dorénavant. L'avantage est que nous sommes alors amenés à manipuler des espaces de fonctions sympathiques.

3.2.1 Quelques rappels et notations

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, on note abusivement $C^r(\mathbb{T}^1)$ l'ensemble des fonctions C^r et 1-périodiques sur \mathbb{R} , et par $D^r(\mathbb{T}^1)$ l'ensemble des C^r -diffeomorphismes de \mathbb{R} qui commutent avec la translation unité. Alors $\|\cdot\|_0 : u \mapsto \sup_{\mathbb{R}} |u|$ définit une norme sur $C^0(\mathbb{T}^1)$, qui en fait un espace de Banach, tout comme $C^r(\mathbb{T}^1)$ muni de la C^r -norme définie par :

$$\|u\|_r = \max_{0 \leq j \leq r} \|D^j u\|_0.$$

Concernant maintenant l'approximation diophantienne, on rappelle qu'étant donné un nombre irrationnel $\alpha \in]0, 1[$, il existe une suite $(\frac{p_k}{q_k})_k$ d'approximations rationnelles privilégiées de α , ses *réduites*, que l'on peut définir récursivement de la façon suivante : $(p_0, q_0) = (0, 1)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$q_{k+1} = \min\{q \in \mathbb{N}, \text{dist}(q\alpha, \mathbb{Z}) < \text{dist}(q_k\alpha, \mathbb{Z})\}$$

et p_k est l'unique entier tel que $|q_k\alpha - p_k| = \text{dist}(q_k\alpha, \mathbb{Z}) =: \alpha_k$.

Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on note $\|\beta\|$ la distance de β à \mathbb{Z} et $\{\beta\}$ l'unique représentant de β dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$, de sorte que $|\{\beta\}| = \|\beta\|$.

Remarque 3.7. En général, $\{\beta\}$ désigne la partie fractionnaire $\beta - [\beta]$ du réel β . Notre notation, bien que non conventionnelle, a l'avantage que, si $(\frac{p_s}{q_s})_{s \in \mathbb{N}}$ est la suite des réduites de α , la suite $(\{q_s \alpha\})_{s \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 en changeant de signe : pour tout $s \in \mathbb{N}$, $\{q_s \alpha\} = (-1)^s \|q_s \alpha\|$ et $(2q_{s+1})^{-1} < \|q_s \alpha\| < q_{s+1}^{-1}$. Si $\{\cdot\}$ était, de façon plus standard, la partie fractionnaire, $(\{q_s \alpha\})_{s \in \mathbb{N}}$ se scinderait en deux sous-suites convergeant respectivement vers 0 et 1.

Avec ces notations, on peut d'ores et déjà, pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, définir le Cantor K_α intervenant dans l'énoncé E :

$$K_\alpha = \left\{ \sum_{s=1}^{+\infty} b_s \{q_s \alpha\}; (b_s)_{s \in \mathbb{N}^*} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} \right\}.$$

On peut vérifier que pour une telle suite $(b_s)_s$,

$$\text{si } n = \sum_{s=1}^S b_s q_s, \quad \{n\alpha\} = \sum_{s=1}^S b_s \{q_s \alpha\} \quad (3.1)$$

(cf. remarque 3.25). On note N_α l'ensemble des n de la forme ci-dessus.

Pour conclure ce paragraphe, on rappelle que la condition diophantienne se traduit en termes des dénominateurs des réduites de la façon suivante : un nombre ayant pour réduites $(\frac{p_s}{q_s})_s$ est diophantien d'ordre ν si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$q_{s+1} \leq C q_s^{1+\nu}. \quad (3.2)$$

3.2.2 Idée des preuves

Pour démontrer le théorème 3.2, il s'agit de montrer que l'ensemble $\{f^t, t \in K_\alpha\}$ est inclus dans $C^r(\mathbb{T}^1)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Quant au théorème 3.1, grâce à la proposition 3.8 ci-dessous, il suffit de montrer que $\{f^t, t \in [0, 1]\}$ est un sous-ensemble borné de $(C^r(\mathbb{T}^1), \|\cdot\|_r)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Ces deux affirmations découlent, par un argument de type Ascoli, des propositions clefs 3.9 et 3.10 respectivement (cf. fin de la section), qui font l'objet des sections suivantes. L'idée des preuves et les calculs sont très largement inspirés de [He79, Yo84], avec une différence majeure indiquée dans la section précédente.

Proposition 3.8 (Condition équivalente). *Soit X un champ de vecteurs C^1 et 1-périodique sur \mathbb{R} , et $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ son flot. Alors pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- (i) X est le tiré en arrière d'un champ C^r par un élément de $D^r(\mathbb{T}^1)$;
- (ii) f^t est C^r pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $\{f^t, t \in [0, 1]\}$ est C^r -borné.

Cet énoncé est un cas particulier d'un résultat beaucoup plus général de Dorroh [Do71], encore généralisé par Hart [Ha82, Ha83].

Proposition 3.9. *Soit X un champ de vecteurs C^1 complet sur un intervalle I de \mathbb{R} , dont les temps 1 et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ du flot sont C^k pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $r \in \mathbb{N}$ strictement inférieur à $k/2$, $\{f^{\{n\alpha\}}, n \in N_\alpha\}$ est C^r -borné.*

Proposition 3.10. *Soit X un champ de vecteurs C^1 complet sur un intervalle I de \mathbb{R} , dont les temps 1 et $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ du flot sont C^k pour un certain $k \in \mathbb{N}$. Si α est diophantien d'ordre ν , alors $\{f^{\{n\alpha\}}, n \in \mathbb{N}\}$ est C^r -borné pour tout $r \in \mathbb{N}$ strictement inférieur à $\frac{k}{2+\nu}$.*

Remarque 3.11. Ce second énoncé correspond, dans [He79, Yo84], au caractère C^r -borné de $\{g^n, n \in \mathbb{N}\}$ pour un difféomorphisme du cercle g de nombre de rotation diophantien α . Concernant les r pour lesquels cette propriété est valable, voir la remarque 3.12.

Pour démontrer ces énoncés, il s'agit donc de contrôler les normes C^r des temps $t \in \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ du flot, et notamment ceux correspondant aux dénominateurs des *réduites* de α . C'est l'objet de la section 3.2.4 qui s'appuie sur les faits généraux de la section suivante 3.2.3.

Concluons cette section en déduisant les théorèmes 3.2 et 3.1 des énoncés ci-dessus.

Pour le premier, étant donné $r \in \mathbb{N}$, puisque les temps 1 et α sont C^k pour tout k , on a que $\{f^{\{n\alpha\}}, n \in N_\alpha\}$ est C^{r+1} -borné pour tout $r \in \mathbb{N}$. Étant donné $\tau \in K_\alpha$, de la forme $\sum_{s=1}^{+\infty} b_s \{q_s \alpha\}$ avec $(b_s)_{s \in \mathbb{N}^*} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$, on note, pour tout $S \in \mathbb{N}^*$, $\tau_S = \sum_{s=1}^S b_s \{q_s \alpha\}$ et $n_S = \sum_{s=1}^S b_s q_s$ et on a déjà affirmé (cf. (3.1)) que dans ce cas, $\tau_S = \{n_S \alpha\}$. Ainsi, X étant C^1 , $(f^{\{n_S \alpha\}})_{S \in \mathbb{N}^*}$ converge en C^1 -topologie vers f^τ , et par le théorème d'Ascoli, puisque cette suite est C^{r+1} -bornée, on peut en extraire une sous-suite qui converge en topologie C^r , et ce pour tout r , ce qui conclut.

Pour le second, il suffit de remarquer que $\{\{n\alpha\}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On obtient alors comme dans l'argument précédent que $\{f^t, t \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]\}$ est C^r -borné pour tout $r \in \mathbb{N}$, ce qui suffit à conclure.

Remarque 3.12. L'énoncé de la proposition 3.10 est loin d'être optimal en terme de perte de différentiabilité. En effet, il ne constitue que la conclusion de la première étape d'un « bootstrap » qui, effectué entièrement, donnerait le caractère C^r -borné de $\{f^{\{n\alpha\}}, n \in \mathbb{N}\}$ pour des r plus grands. Plus précisément, une fois que l'on a le caractère C^r -borné pour les r de l'énoncé ci-dessus, on obtient que le flot est C^{r-1} -conjugué à un flot C^{r-1} . On peut alors améliorer le lemme 3.19 à venir en l'étendant aux dérivées d'ordre $r-2$, et améliorer les lemmes 3.21 et 3.22 en conséquence, et obtenir le résultat du lemme 3.24, et donc de la proposition 3.10 pour des r plus grands, et ainsi de suite. Nous n'avons pas effectué dans [Ey19] l'intégralité du bootstrap car celle-ci aurait requis l'introduction de régularités non entières et aurait alourdi les preuves d'un article déjà dense. Ce travail fera l'objet d'une autre publication.

3.2.3 Conséquences des inégalités de convexité

On s'intéresse au sous-ensemble $C_0^r(\mathbb{T}^1)$ de $C^r(\mathbb{T}^1)$ constitué des applications $\varphi \in C^r(\mathbb{T}^1)$ telles que $D^l \varphi$ s'annule *quelque part* pour tout $0 \leq l \leq r$. En effet, notons que pour tout $h \in D^{r+1}(\mathbb{T}^1)$, $Dh - 1$ et $\log Dh$ appartiennent à $C_0^r(\mathbb{T}^1)$.

L'énoncé suivant donne des relations entre les différentes normes $\|\cdot\|_r$ (il s'agit précisément de la proposition 3 dans [Yo84], pour laquelle Yoccoz renvoie à l'*Appendix* de [Ho76]).

Proposition 3.13 (Inégalités de convexité de Hadamard). *Soient r_1, r_2 et $r_3 \in \mathbb{N}$ avec $r_3 \geq r_2 \geq r_1$ et $r_1 \neq r_3$. Il existe une constante C ne dépendant que de r_3 telle que pour tout $u \in C^{r_3}(\mathbb{T}^1)$,*

$$\|u\|_{r_2} \leq C \|u\|_{r_1}^{(r_3-r_2)/(r_3-r_1)} \|u\|_{r_3}^{(r_2-r_1)/(r_3-r_1)}.$$

En voici trois conséquences clefs (pour les preuves, cf. [Ey19], énoncés 2.9 à 2.12) :

Corollaire 3.14 (cf. [Yo84], corollaire p. 351). *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{F} \subset \mathbb{D}^k(\mathbb{T}^1)$ une famille de difféomorphismes tels que $\{\log Dg, g \in \mathcal{F}\}$ est C^0 -borné. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout $g \in \mathcal{F}$ et tout $r \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$,*

$$C^{-1} \|Dg - 1\|_r \leq \|\log Dg\|_r \leq C \|Dg - 1\|_r.$$

Ceci s'applique en particulier aux temps lisses du flot $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'un champ de vecteurs C^1 et 1-périodique sur \mathbb{R} , pour lequel $\{\log Df^t, t \in B\}$ est en effet C^0 -borné pour toute partie bornée B de \mathbb{R} , et en particulier pour $B = [-1, 1]$, ce qui suffira dans notre situation :

Corollaire 3.15. *Soit X un champ de vecteurs C^1 et 1-périodique sur \mathbb{R} et $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ son flot. Alors pour tout $r \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $t \in [-1, 1]$ tel que f^t soit lisse,*

$$C^{-1} \|Df^t - 1\|_r \leq \|\log Df^t\|_r \leq C \|Df^t - 1\|_r.$$

Corollaire 3.16. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $M > 0$. Il existe $C > 0$ tel que pour tout $g \in \mathbb{D}^k(\mathbb{T}^1)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \times \|\log Dg\|_0 \leq M$,*

$$\|\log Dg^n\|_k \leq Cn \|\log Dg\|_k. \quad (3.3)$$

Corollaire 3.17. *Soit $r \in \mathbb{N}$ et soit $(\varepsilon_s)_{s \in \mathbb{N}}$ une suite de réels tels que $\prod_s (1 + \varepsilon_s)$ converge. Alors le sous-ensemble de $\mathbb{D}^{r+1}(\mathbb{T}^1)$ constitué des difféomorphismes de la forme $g_s \circ \dots \circ g_1$ avec $s \in \mathbb{N}^*$ et $\|\log Dg_j\|_r \leq \varepsilon_j$ pour tout $j \in \llbracket 1, s \rrbracket$ est C^{r+1} -borné.*

3.2.4 Contrôle des temps correspondant aux réduites

La proposition suivante est le cœur des estimations des $f^{\{n\alpha\}}$, $n \in \mathbb{N}$, permettant de prouver les propositions 3.9 et 3.10.

Proposition 3.18. *Soit X un champ de vecteurs C^1 et 1-périodique sur \mathbb{R} , dont les temps 1 et α du flot $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ sont C^k , pour un nombre irrationnel $\alpha \in [0, \frac{1}{4}[$ et un entier positif k . Alors la suite $(\|\log Df^{\{q_s \alpha\}}\|_k / q_s)_{s \in \mathbb{N}}$ est bornée (où les q_s désignent les dénominateurs des réduites de α).*

Suivant Yoccoz, on prouve cette proposition dans [Ey19] (Proposition 2.22) par une sorte de récurrence sur $s \in \mathbb{N}$, en décomposant $f^{\{q_{s+1}\alpha\}}$ en termes de $f^{\{q_s \alpha\}}$ et $f^{\{q_{s-1}\alpha\}}$ et en utilisant les estimées des lemmes 3.21 et 3.22 ci-dessous (qui s'obtiennent eux-mêmes

facilement à partir du Lemme 3.19 sur les dérivées premières en utilisant les inégalités de convexité 3.13 pour la première, et en appliquant le corollaire 3.16 à celle-ci (la première) pour la seconde). Nous n'en dirons pas plus sur les preuves ici. L'estimée obtenue dans la proposition 3.18 sera alors *réinjectée* dans ces mêmes estimées dans la section suivante pour obtenir les propositions 3.10 et 3.9.

Les hypothèses des énoncés suivants, non répétées, sont celles de la proposition 3.18.

Lemme 3.19. *Il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|\log Df^t\|_0 \leq C|t|$$

et en particulier

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \|\log Df^{\{q_s\alpha}\}\|_0 \leq C|\{q_s\alpha\}| = C\alpha_s.$$

Remarque 3.20. Dans [Yo84], l'« analogue » de l'énoncé ci-dessus (proposition 4 p. 352 avec $\gamma_0 = 0$) donne, avec nos notations, un contrôle sur $\|f^{\{n\alpha\}} - \text{Id}\|_0$ plutôt que $\|\log Df^{\{n\alpha}\}\|_0$. C'est parce que l'hypothèse d'une conjugaison C^1 avec laquelle on démarre le bootstrap dans [Yo84] est plus faible que notre hypothèse d'un champ de vecteurs générateur C^1 . Ce décalage d'un degré de régularité se répercute sur les exposants apparaissant dans les contrôles sur les dérivées d'ordre supérieur obtenues à l'aide des inégalités de convexité de Hadamard. En effet, dans les analogues des lemmes suivants 3.21 et 3.22 dans [Yo84] (Lemmes 13 et 14), $\frac{r}{k}$ est remplacé par $\frac{r+1}{k+1}$. Cette différence s'avère avoir un effet énorme sur le reste de la preuve. En effet, dans [Yo84], dans la preuve de la proposition 5 – l'analogue de notre proposition 3.18 – la condition diophantienne est utilisée pour compenser l'« inadéquation » des exposants, alors que nous n'en avons pas besoin ici, avec pour conséquence que les estimées que nous obtenons sont indépendantes de la condition diophantienne et en particulier nous permettent de prouver le théorème 3.2.

Lemme 3.21. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $r \in \llbracket 0, k \rrbracket$ et tout $s \in \mathbb{N}$,*

$$\|\log Df^{\{q_s\alpha}\}\|_r \leq Cq_{s+1}^{-1}(q_{s+1}\|\log Df^{\{q_s\alpha}\}\|_k)^{\frac{r}{k}}.$$

Lemme 3.22. *Il existe $C > 0$ tel que pour tout $r \in \llbracket 0, k \rrbracket$, tout $s \in \mathbb{N}$ et tout $n \in [0, \frac{q_{s+1}}{q_s}] \cap \mathbb{N}$,*

$$\|\log Df^{n\{q_s\alpha}\}\|_r \leq Cq_s^{-1}(q_{s+1}\|\log Df^{\{q_s\alpha}\}\|_k)^{\frac{r}{k}}. \quad (E_r)$$

3.3 Preuve des propositions clefs

Voici finalement comment on déduit les propositions 3.9 et 3.10 des estimées générales.

3.3.1 Proposition 3.9

Réinjectée dans l'estimée du Lemme 3.21, le résultat de la proposition 3.18 donne (cf. fin de la sous-section) :

Lemme 3.23. *Soit X un champ de vecteurs C^1 et 1-périodique sur \mathbb{R} , dont les temps 1 et α du flot $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ sont C^k , pour un certain $\alpha \in [0, \frac{1}{4}[$ irrationnel et un entier k positif. Alors, pour tout $r < k/2$, en posant $\delta = 1 - \frac{2r}{k} > 0$, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que*

$$\forall s \in \mathbb{N}, \quad \|\log Df^{\{q_s \alpha\}}\|_r \leq C q_{s+1}^{-\delta}.$$

En particulier (en appliquant le corollaire 3.14), la suite $(f^{\{q_s \alpha\}})_{s \in \mathbb{N}}$ converge vers l'identité en C^r -topologie.

Grâce au corollaire 3.17, il découle directement de l'énoncé ci-dessus, et de la convergence du produit $\prod_s (1 + q_{s+1}^{-\delta})$ pour tout $\delta > 0$, que la famille $\{f^{\{n\alpha\}}, n \in N_\alpha\}$ est C^r -bornée pour tout $r < k/2$ (on utilise une fois encore que pour tout $n = \sum_{s=1}^S b_s q_s \in N_\alpha$, avec $b_s \in \{0, 1\}$, $\{n\alpha\} = \sum_{s=1}^S b_s \{q_s \alpha\}$ et donc $f^{\{n\alpha\}} = (f^{\{q_s \alpha\}})^{b_s} \circ \dots \circ (f^{\{q_1 \alpha\}})^{b_1}$). Ceci conclut la preuve de la proposition 3.9.

Preuve du Lemme 3.23. Soit $r < k/2$. Le Lemme 3.21 et la proposition 3.18 donnent C et $M > 0$ tels que pour tout $s \in \mathbb{N}$,

$$\|\log Df^{\{q_s \alpha\}}\|_r \leq C q_{s+1}^{-1} (q_{s+1} M \underbrace{q_s}_{\leq q_{s+1}})^{\frac{r}{k}} \leq C M^{\frac{r}{k}} (q_{s+1})^{-1 + \frac{2r}{k}} \leq C' (q_{s+1})^{-\delta} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0.$$

□

3.3.2 Proposition 3.10

Le lemme suivant découle directement du lemme 3.22 et de la proposition 3.18 en appliquant la condition diophantienne.

Lemme 3.24. *Soit X un champ de vecteurs C^1 et 1-périodique sur \mathbb{R} , dont les temps 1 et α du flot $(f^t)_{t \in \mathbb{R}}$ sont C^k , pour un nombre diophantien $\alpha \in [0, \frac{1}{4})$ d'ordre ν et un entier strictement positif k . Alors, pour tout $r < \frac{k}{2+\nu}$, il existe C et $\delta > 0$ tels que :*

$$\forall s \in \mathbb{N}, \forall b \in [0, \frac{q_{s+1}}{q_s}] \cap \mathbb{N}, \quad \|\log Df^{b\{q_s \alpha\}}\|_r \leq C q_s^{-\delta}.$$

Démonstration. Pour $r \leq k$, l'estimée du Lemme 3.22 combinée à la proposition 3.18 et à la condition diophantienne sous la forme $q_{s+1} \leq C q_s^{1+\nu}$ devient : pour tout $s \in \mathbb{N}$ et tout $b \in [0, \frac{q_{s+1}}{q_s}] \cap \mathbb{N}$,

$$\|\log Df^{b\{q_s \alpha\}}\|_r \leq C' (q_s)^{-1 + \frac{r}{k}} (q_s^{1+\nu})^{\frac{r}{k}} \leq C' q_s^{\rho(r,k)} \quad \text{avec} \quad \rho(r,k) = \frac{r(2+\nu)}{k} - 1.$$

Si $r < \frac{k}{2+\nu}$, on a bien le résultat voulu. □

On obtient alors la proposition 3.10 par composition de façon similaire à la proposition 3.9 dans la section précédente.

Plus précisément, on suit une technique déjà utilisée par Denjoy, Herman, Yoccoz, etc. On note toujours $(q_s)_{s \in \mathbb{N}}$ la suite des dénominateurs des réduites de α , et on abrège $\|q_s \alpha\|$ par α_s pour tout $s \in \mathbb{N}$.

Soit $r < \frac{k}{2+\nu}$. Tout entier n s'écrit

$$n = \sum_{s=0}^S b_s q_s \quad \text{avec } S \in \mathbb{N}^* \text{ et } \forall s \in \llbracket 0, S \rrbracket, 0 \leq b_s \leq a_s = \left\lfloor \frac{q_{s+1}}{q_s} \right\rfloor. \quad (\diamond)$$

Remarque 3.25. Le hic par rapport à [He79, Yo84] est qu'en général, on n'a pas tout à fait

$$\{n\alpha\} = \sum_{s=0}^S b_s \{q_s \alpha\} \quad \text{ou de façon équivalente} \quad f^{\{n\alpha\}} = f^{b_S \{q_S \alpha\}} \circ \dots \circ f^{b_1 \{q_1 \alpha\}},$$

comme on aimerait pour déduire la proposition 3.10 directement du lemme 3.24 à l'aide du corollaire 3.17 (qui contrôle les composées). Par exemple, si $b_0 = q_1$ et $b_s = 0$ pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{s=0}^S b_s \{q_s \alpha\}$ vaut $q_1 \alpha = 1 - \alpha_1 = 1 + \{q_1 \alpha\} = 1 + \{n\alpha\}$.

Mais dans le cas particulier où $b_0 = 0$, on a effectivement :

$$\sum_{s=0}^S b_s \{q_s \alpha\} = \sum_{s=1}^S (-1)^s b_s \alpha_s \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\quad \text{donc} \quad \{n\alpha\} = \sum_{s=0}^S b_s \{q_s \alpha\}.$$

En effet, pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq b_s \alpha_s \leq a_s \alpha_s \leq \alpha_{s-1}$, et $\alpha_{s+2} < \frac{1}{2} \alpha_s$ donc

$$-\frac{1}{2} \leq -2\alpha \leq -\sum_{t=0}^{+\infty} \alpha_{2t} \leq \sum_{s=0}^S b_s \{q_s \alpha\} \leq \sum_{t=1}^{+\infty} \alpha_{2t-1} \leq 2\alpha_1 < \frac{1}{2}.$$

Notons alors \mathcal{B} l'ensemble des entiers dont la décomposition (\diamond) commence par $b_0 = 0$. Il nous suffit de montrer que $\{f^{\{n\alpha\}}, n \in \mathcal{B}\}$ est C^r -borné. En effet, tout $m \in \mathbb{N}$ est de la forme $b_0 + n$ avec $b_0 \in \llbracket 0, q_1 \rrbracket$ et $n \in \mathcal{B}$, auquel cas

$$\{m\alpha\} = \{n\alpha\} + i\alpha + j \quad \text{avec } 0 \leq i \leq q_1 \text{ and } -2 \leq j \leq 1,$$

donc

$$\{f^{\{m\alpha\}}, m \in \mathbb{N}\} \subset \bigcup_{\substack{0 \leq i \leq q_1 \\ -2 \leq j \leq 1}} \{f^{i\alpha+j} \circ f^{\{n\alpha\}}, n \in \mathcal{B}\}$$

et chaque composante de l'union finie de droite est C^r -bornée si $\{f^{\{n\alpha\}}, n \in \mathcal{B}\}$ l'est, par composition. Maintenant, ce caractère borné découle directement du corollaire 3.17, du lemme 3.24 et du fait que $\prod_s (1 + q_s^{-\delta})$ converge.

3.4 Perspectives

Énoncés optimaux en régularité finie. À l'aide des propositions 3.8 et 3.10, on peut montrer que si les temps 1 et α d'un champ de vecteurs C^1 sur un intervalle de \mathbb{R} sont C^k , alors le champ est C^r -conjugué à un champ C^r pour tout $r \in \mathbb{N}$ strictement inférieur à $\frac{k}{2+\nu}$. Mais comme expliqué dans la remarque 3.12, cette borne est loin d'être optimale. Il serait intéressant de déterminer la perte de différentiabilité « minimale » $k - k'$ entre la régularité des temps 1 et α (C^k) et celle du champ (C^r -conjugué à un champ C^r pour tout $r < k'$), en effectuant l'intégralité du bootstrap. Pour prouver sa minimalité, il s'agirait alors de construire un champ de vecteurs non $C^{k'}$ -conjugué à un champ $C^{k'}$, dont les temps 1 et α sont C^k . Il faudrait pour cela encore perfectionner les techniques du chapitre 2.

Chapitre 4

Déformation d'actions lisses sur l'intervalle

Motivation. Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction de ce mémoire, étant donné un feuilletage transverse aux fibres d'un fibré en fibres F sur une variété base B , on peut définir sa représentation d'holonomie qui est une action du groupe fondamental de B sur F . Inversement, à une telle action est associé, par *suspension*, un feuilletage transverse aux fibres d'un fibré en fibres F sur B . Ainsi, déformations de feuilletages et déformations d'actions de groupes fondamentaux sur des variétés sont intimement liées. Il s'agit d'une des motivations clefs (parmi d'autres) de l'étude de telles actions et de leurs déformations.

Ce sujet très vaste a notamment été largement exploré en ce qui concerne les actions de groupes de surfaces de genre $g \geq 2$ sur le cercle. Citons notamment les travaux de Goldman [Gol98] pour les actions par transformations de Möbius et ceux de Bowden et Mann [Bo16, Man15] qui donnent une borne inférieure sur le nombre de composantes connexes par arcs de l'espace des actions C^∞ et C^0 . On ne sait pas en revanche, quelle que soit la régularité r considérée, si l'espace des actions C^r a un nombre fini de composantes connexes. On ne sait pas non plus si les actions dont la classe d'Euler est nulle (ce qui équivaut au fait que le fibré qu'elles définissent par suspension est trivial) forment un espace connexe.

Dans le cas du tore ($g = 1$), des idées d'Herman [He79] permettent de montrer la connexité par arcs de l'espace des actions *continues* de $\pi_1(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}^2$ sur le cercle (cf. Proposition 1.1 dans [Ey–Na21] pour une preuve élémentaire), tandis que le cas des actions continues sur le segment a été traité en exercice dans l'introduction de ce mémoire. Navas prouve dans [Na11] le résultat analogue pour les actions C^1 de \mathbb{Z}^2 sur l'intervalle et le cercle. Dans le chapitre 5, nous nous intéressons aux actions C^2 mais n'obtenons qu'un résultat partiel. La régularité est un point clef dans ce genre de problèmes, et la question de la connexité par arcs demeure ouverte en régularité supérieure. Cette question (ou plutôt celle de la locale connexité) a été posée par Rosenberg dès les années 80 et a motivé des travaux profonds de Yoccoz [Yo95] sur ces actions.

Ici, nous nous intéresserons en priorité aux actions sur le segment et non le cercle,

en lien avec le problème de classification de feuilletages évoqué dans l'introduction de ce mémoire, mais nos résultats auront aussi des conséquences sur le cercle. Nous parvenons avec C. Bonatti dans [Bo–Ey16] (Theorem A) à un résultat de connexité pour les actions C^∞ , mais la connexité par arcs demeure hors de portée, pour des raisons qui apparaîtront au cours du chapitre.

Théorème A. *L'espace des représentations de \mathbb{Z}^n dans $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ est connexe.*

Le but principal de ce chapitre est de présenter les ingrédients de la preuve de ce résultat (cf. **section 4.1**). Nous l'étendons ensuite aux groupes à croissance polynomiale dans la **section 4.2**.

Préliminaires : topologie sur l'espace des actions lisses d'un groupe sur une variété F . Étant donné un groupe Γ finiment engendré, on notera simplement

$$\{\Gamma \rightarrow \text{Diff}^\infty(F)\}$$

l'ensemble des représentations de Γ dans $\text{Diff}^\infty(F)$, ou encore des actions lisses de Γ sur F . On munit cet ensemble de la topologie naturelle suivante. On commence par se donner un ensemble $\{a_1, \dots, a_k\}$ de générateurs, et on identifie $\{\Gamma \rightarrow \text{Diff}^\infty(F)\}$ à son image par l'application injective $\varphi \mapsto (\varphi(a_1), \dots, \varphi(a_k))$, que l'on munit elle-même de la topologie induite par celle de $(\text{Diff}^\infty(F))^k$. Il s'avère que la topologie induite sur $\{\Gamma \rightarrow \text{Diff}^\infty(F)\}$ ne dépend pas du choix de générateurs. Par exemple, l'espace $\{\mathbb{Z}^2 \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]\}$ muni de cette topologie s'identifie simplement au sous-espace de $(\text{Diff}_+^\infty[0, 1])^2$ constitué des paires de difféomorphismes qui commutent, muni de la topologie induite.

4.1 Actions de \mathbb{Z}^n

4.1.1 Grandes lignes

Dans cette partie, on s'intéresse à la connexité (par arcs) de l'espace des représentations de \mathbb{Z}^2 dans $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ (cf. théorème A). Nous avons vu dans l'introduction du mémoire que la régularité des actions considérées était à la fois un problème (on montre facilement que l'espace des actions C^0 est, lui, contractile) et un atout, grâce au résultat de rigidité suivant découlant des travaux de Szekeres, Kopell et Takens présentés au chapitre 1 (pour une preuve, voir par exemple Corollary 2.8 dans [Bo–Ey16]).

Proposition 4.1. *Soient f et g deux difféomorphismes commutant de $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ et F l'ensemble des points fixes communs à f et g où ils sont tous deux infiniment tangents à l'identité. Alors pour toute composante connexe I de $[0, 1] \setminus F$, sur l'adhérence \bar{I} , f et g sont soit les itérés d'un même difféomorphisme lisse h , soit les temps 1 et α irrationnel d'un champ de vecteurs C^1 (mais pas nécessairement plus) sur \bar{I} et C^∞ sur I .*

Si les champs en question étaient lisses, pour relier (f, g) à la paire triviale parmi les paires de difféomorphismes qui commutent, et ainsi prouver la connexité par arcs,

une stratégie serait, pour chaque I , soit de déformer le générateur h en l'identité, soit de déformer le champ de vecteurs en le champ identiquement nul, et de déformer f et g en conséquence. Sur chaque \bar{I} , on aurait bien un chemin continu dans $\text{Diff}_+^\infty(\bar{I})$. Bien sûr, il faudrait vérifier que tout se recolle bien, y compris dans le cas d'une infinité de composantes connexes de $[0, 1] \setminus F$! Mais nous n'irons même pas jusque là puisque, comme nous l'avons amplement vu au chapitre 2, en général, les champs ne sont pas C^2 , donc cette stratégie échoue. L'idéal serait alors d'être capable de faire une déformation C^1 du champ en un champ lisse de sorte que la déformation résultant sur f et g soit continue dans $\text{Diff}_+^\infty(\bar{I})$. Nous ne sommes malheureusement pas parvenus à ce résultat, pour des raisons qui apparaîtront dans la suite. Outre la question du recollement, c'est pour cela que, dans le théorème A, nous obtenons la connexité et non la connexité *par arcs*. En effet, voici le résultat central que nous obtenons dans [Bo–Ey16] (Proposition 2.13) :

Théorème 4.2. *Soient f et g deux difféomorphismes lisses commutant de $[0, 1]$ infiniment tangents à l'identité seulement éventuellement au bord, correspondant aux temps 1 et α d'un champ de vecteurs X de classe C^1 sur $[0, 1]$ (et nécessairement lisse sur $]0, 1[$). Alors (f, g) est approchable en topologie C^∞ par des couples de temps 1 et α de champs de vecteurs C^∞ (qui, eux, appartiennent à la composante connexe par arcs du couple trivial (Id, Id)).*

Grâce à cet énoncé clef, on montre la densité de la composante connexe par arcs du couple trivial dans l'espace total des paires commutantes de $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$, et on en déduit la connexité de cet espace. Nous ne parlerons pas ici de cet argument élémentaire, effectué dans le §2.3 de [Bo–Ey16].

Ce que nous parvenons à faire est donc une approximation d'un couple donné, au lieu d'une déformation continue (nous allons voir dans un instant pourquoi nous parvenons à l'un et pas à l'autre). Insistons sur le fait qu'un lissage arbitraire de X (avec les notations du théorème 4.2) au bord ne fera pas l'affaire en général, car le flot obtenu ne serait pas mieux que C^1 -proche de celui de X . Donc on doit d'abord obtenir des estimées sympathiques sur X à partir du fait que certains des temps de son flot sont lisses. Plus précisément, si X n'est pas C^∞ en un point du bord, disons 0, d'après Takens (cf. théorème 1.5), f et g sont ITI en ce point. Ce que l'on montre dans ce cas est que, même si les dérivées de X aux ordres supérieurs à 2 peuvent diverger globalement quand on approche 0, on peut trouver, arbitrairement près de 0, des intervalles fondamentaux entiers de f (et g) sur lesquels ces dérivées sont arbitrairement petites (cf. proposition 4.3).

Ensuite, l'idée pour construire les champs lisses du théorème 4.2 est simplement de remplacer X entre 0 et un « intervalle sympathique » (*i.e.* un intervalle où les dérivées de X sont petites) par quelque chose de lisse et de « C^∞ -petit » (ce dernier point étant rendu possible précisément par les estimées sur X dans les intervalles sympathiques), et de le laisser inchangé en dehors de cette petite région (cf. proposition 4.5). Les temps 1 et α du nouveau champ de vecteurs coïncident avec f et g en dehors d'un voisinage de 0 et sont très proches de l'identité dans ce voisinage, comme le sont f et g . On voit bien pourquoi cette approche produit une suite d'approximations de (f, g) et pas un chemin continu.

Voici les énoncés précis correspondant aux précédentes affirmations (cf. Propositions 2.17 et 2.15 dans [Bo–Ey16]) :

Proposition 4.3. *Soit $f \in \text{Diff}_+^\infty[0, 1[$ ITI seulement en 0 et temps 1 d'un champ de vecteurs X de classe C^1 sur $]0, 1[$ (qui est nécessairement C^∞ sur $]0, 1[$ d'après le théorème 1.5). Alors pour tout $\delta > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_0 \neq f(x_0)$ arbitrairement proche de 0 tel que*

$$\|X\|_{k, [f^{\mp 2}(x_0), f^{\pm 2}(x_0)]} \leq |f(x_0) - x_0|^{1-\delta}.$$

Ici, $f^{\pm 2}(x_0)$ (resp. $f^{\mp 2}(x_0)$) désigne le max (resp. le min) de $f^{-2}(x_0)$ et $f^2(x_0)$.

Ces estimées, qui constituent le cœur de la preuve du théorème 4.2 (et donc du théorème A), sont une généralisation de celles obtenues par Sergeraert dans [Se77] pour des difféomorphismes sans point fixe dans $]0, 1[$ (nous reviendrons sur l'obtention de ces estimées en fin de section); en effet, nous avons besoin d'une version uniforme des estimées de Sergeraert pour traiter les difféomorphismes ayant potentiellement une infinité de points fixes (non ITI) s'accumulant au bord du segment.

Remarque 4.4. On pourrait être tenté d'appliquer les estimées de Sergeraert à $f|_{[a,b]}$ pour toute composante connexe $]a, b[$ de $[0, 1] \setminus \text{Fix}(f)$. Mais cela ne fonctionne pas tel quel pour les raisons suivantes. Tout d'abord, en toute rigueur, les résultats de [Se77] ne s'appliquent qu'aux difféomorphismes qui sont ITI au bord de l'intervalle en question, ce qui n'est pas le cas de $f|_{[a,b]}$ sauf pour $a = 0$. Mais surtout, on a besoin d'une version *uniforme* des estimées de Sergeraert (uniforme en la composante de $[0, 1] \setminus \text{Fix}(f)$ à laquelle on les applique), ce qui est rendu d'autant plus pénible que l'expression du champ de Szekeres de $f|_{[a,b]}$ dépend du signe de $f - \text{Id}$ sur $]a, b[$. Ainsi, on est en fait obligé dans [Bo–Ey16] de reprendre et de préciser toutes les étapes menant aux estimées de Sergeraert.

On utilise la proposition 4.3 pour prouver :

Proposition 4.5. *Soit f un difféomorphisme lisse de $[0, 1[$, sans point fixe ITI dans $]0, 1[$ et temps 1 du flot d'un champ de vecteurs X de classe C^1 sur $]0, 1[$ (notons que X est nécessairement lisse sur $]0, 1[$).*

Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, tout $a \in]0, 1[$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_0 \in]0, a[$ et un champ de vecteurs sur $]0, 1[$ coïncidant avec X sur $[x_0, 1]$, C^∞ sur $]0, 1[$, infiniment plat en 0, et ε - C^k -petit sur $[0, f^{\pm 2}(x_0)]$.

Cette proposition permet notamment de montrer :

Corollaire 4.6. *Toute paire de contractions/dilatations lisses de la demi-droite qui commutent peut être approchée arbitrairement C^∞ -près par une autre paire coïncidant avec la première en dehors d'un voisinage arbitrairement petit de 0 et se plongeant dans un flot C^∞ .*

Notons un parallèle entre cet énoncé et le suivant dû à Yoccoz [Yo95] :

Théorème 4.7 (Yoccoz [Yo95]). *Tout difféomorphisme du cercle de nombre de rotation irrationnel est C^∞ -approchable par des difféomorphismes de même nombre de rotation qui sont C^∞ -conjugués à la rotation correspondante.*

Le lien est le suivant. Comme vu dans le chapitre précédent, à un tel difféomorphisme g du cercle correspond une paire (T_1, G) de difféomorphismes commutants de \mathbb{R} , le premier étant la translation unité et le second un relevé de g . L'énoncé ci-dessus est équivalent au fait que ce couple soit approchable par des couples C^∞ -conjugués au couple (T_1, T_α) et donc se plongeant dans un flot C^∞ -conjugué à celui des translations. Le parallèle s'arrête à notre connaissance ici : d'une part la question de la lissité se pose seulement au point fixe dans le corollaire 4.6 alors qu'elle se pose partout dans le cas du cercle, et les techniques employées n'ont *a priori* pas grand chose à voir. Nous reviendrons sur le théorème 4.7 dans la section 4.1.3.

4.1.2 Quelques éléments sur les estimées

Nous souhaitons donner ici une idée de l'origine de l'estimée de la proposition 4.3. Celle-ci se déduit de façon élémentaire de l'estimée clef suivante, prouvée par Sergeraert dans le cas où f a 0 pour seul point fixe (cf. Lemme 3.6 de [Se77]) :

Lemme 4.8. *Soient f et X comme dans la proposition 4.3. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\eta > 0$,*

$$(X(x))^{n-1} D^n X(x) \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}}{=} O\left(\|f - \text{Id}\|_{0,[0,x]}^{n-\eta}\right).$$

En effet, le caractère ITI de f en 0 entraîne que $X(x) \sim f(x) - x$ en 0, et, étant donné $k \in \mathbb{N}^*$ et $\eta > 0$, on déduit alors facilement du lemme ci-dessus l'existence d'une constante C telle que, au voisinage de 0,

$$\|X\|_{k,[f^{\mp 2}(x), f^{\pm 2}(x)]} \leq C \frac{\|f - \text{Id}\|_{0,[0,x]}^{k-\eta}}{|f(x) - x|^{n-1}}.$$

En prenant x_0 tel que $\|f - \text{Id}\|_{0,[0,x_0]} = |f(x_0) - x_0|$, on obtient, à une constante près, l'estimée de la proposition 4.3. Si f est de la forme de la figure 2.1 au voisinage de 0 (ce qui est nécessaire pour que X ne soit pas C^∞ d'après 1.7), les x_0 où le champ est « gentil » correspondent aux endroits où f est relativement loin de l'identité, alors que le champ peut être « méchant » vers les « presque points fixes », exactement comme dans les constructions du chapitre 2.

Disons quelques mots des estimées du lemme 4.8, dans le cas de Sergeraert où 0 est le seul point fixe, et où, disons, f est une contraction. Dans ce cas, (rappelons que l'on confond le champ de vecteurs $u\partial_x$ avec la fonction u), au cours de la preuve du théorème de Szekeres, on obtient :

$$DX = - \sum_{i=0}^{+\infty} (Lf \times X) \circ f^i, \quad (4.1)$$

où Lf désigne ici et dans la suite $D \log Df$. Or

$$|(Lf \times X)(x)| \leq |X(x)| \times \|Lf\|_{0,[0,x]} \underset{x \rightarrow 0}{=} O\left(|X(x)| \times \|f - \text{Id}\|_{0,[0,x]}^{1-\eta}\right). \quad (4.2)$$

Cette dernière estimée provient d'un corollaire des inégalités de convexité de Hadamard (cf. chap. 3), que l'on peut exprimer sous la forme suivante :

Lemme 4.9 (cf. 3.3 dans [Se77]). *Soit $u \in C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$, infiniment plat en 0. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\eta > 0$,*

$$\|u\|_{n,[0,x]} \underset{x \rightarrow 0}{=} O(\|u\|_{0,[0,x]}^{1-\eta}).$$

Maintenant, comme $|X(f^i(x))| \leq C(f^i(x) - f^{i+1}(x))$ (avec C indépendant de i), et que ce second membre est le terme général d'une série convergente, on déduit simplement de (4.1) et (4.2) que

$$DX(x) = O\left(\|f - \text{Id}\|_{0,[0,x]}^{1-\eta}\right),$$

c'est-à-dire l'estimée du lemme 4.8 pour $n = 1$.

L'estimée pour tout n est obtenue par récurrence. On obtient une formule analogue à (4.1) pour $X^{n-1} \cdot D^n X$:

$$X^{n-1} \cdot D^n X = P_n(DX, XD^2X, \dots, X^{n-2}D^{n-1}X) - \sum_{i=0}^{+\infty} \varphi_n \circ f^i \quad (4.3)$$

avec

$$\varphi_n = - \sum_{q=0}^{n-1} D^q Lf \times X^{q+1} \times Q_{n,q}(DX, XD^2X, \dots, X^{n-1}D^{n-1}X) \quad \text{sur }]0, 1[\quad (4.4)$$

où P_n et $Q_{n,q}$ sont des polynômes de $n - 1$ variables, *indépendants de f* , à coefficients entiers positifs, satisfaisant

$$P_n(X, \dots, X^{n-1}) = \alpha_n X^n \quad \text{et} \quad Q_{n,q}(X, \dots, X^{n-1}) = \beta_{n,q} X^{n-1-q} \quad (*_n)$$

pour des $\alpha_n, \beta_{n,q} \in \mathbb{N}$.

Cela fait partie de la récurrence de montrer, grâce aux propriétés de $Q_{n,q}$, que

$$|\varphi_n(x)| \underset{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}}{=} O\left(|X(x)| \times \|f - \text{Id}\|_{0,[0,x]}^{n-\eta}\right)$$

ce qui permet de montrer que la somme infinie ci-avant a bien un sens, et la forme de P_n et l'hypothèse de récurrence permettent alors d'obtenir l'estimée du Lemme 4.8.

4.1.3 Concernant les actions sur le cercle

Le théorème A permet également de montrer que toute action lisse et préservant l'orientation de \mathbb{Z}^2 sur le cercle dont deux éléments quelconques ont des nombres de rotation rationnellement liés peut être C^∞ -approchée par une action lisse isotope à l'action triviale.

Examinons maintenant ce qu'il reste à faire pour prouver la connexité de l'espace de toutes les actions lisses de \mathbb{Z}^2 sur le cercle. Quitte à quotienter, on peut supposer cette action fidèle. On identifie toujours une telle action à un couple (f, g) de difféomorphismes

du cercle. Il s'agit donc de considérer un tel couple dont les nombres de rotations sont rationnellement indépendants. Ainsi, l'un au moins des éléments a un nombre de rotation irrationnel, et est donc C^0 -conjugué à une rotation irrationnelle d'après le théorème de Denjoy. Et puisque le centralisateur C^0 d'une rotation irrationnelle est le groupe des rotations, l'action entière est C^0 -conjuguée à une action par rotations, sans torsion puisque l'action est supposée fidèle. Ce que l'on peut dire dans cette situation dépend de si les nombres de rotations $\rho(f)$ et $\rho(g)$ sont conjointement diophantiens ou non (cf. section 2.3 du chap. 2 pour le sens précis de cette condition).

- Si c'est le cas, Fayad et Khanin ont prouvé dans [Fa–Kh09] que f et g étaient simultanément C^∞ -conjugués aux rotations d'angle $\rho(f)$ et $\rho(g)$, $R_{\rho(f)}$ et $R_{\rho(g)}$. Si φ est la conjugante en question, (f, g) est alors connecté à (Id, Id) par le chemin

$$t \in [0, 1] \mapsto (\varphi^{-1} \circ R_{t\rho(f)} \circ \varphi, \varphi^{-1} \circ R_{t\rho(g)} \circ \varphi)$$

de paires de difféomorphismes commutants.

- Sinon, (f, g) n'est pas nécessairement C^∞ -conjugué à $(R_{\rho(f)}, R_{\rho(g)})$. Néanmoins, d'après Benhenda [Be12], il existe un sous-ensemble Baire-dense B de \mathbb{T}^1 tel que, si $\rho(f)$ ou $\rho(g)$ appartient à B , (f, g) peut être approché par des paires qui, elles, sont C^∞ -conjuguées à $(R_{\rho(f)}, R_{\rho(g)})$. Ainsi, (f, g) appartient à l'adhérence de la composante connexe par arcs de (Id, Id) .

On ne sait pas, en revanche, si ce fait est vérifié par toute paire $(\rho(f), \rho(g)) \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$. Une réponse positive donnerait la connexité de l'espace des actions lisses de \mathbb{Z}^2 sur le cercle. La connexité par arcs et la locale connexité sont encore une autre histoire...

Remarque 4.10. Dans ce cas général, ce qu'on sait d'après [Yo95] est que f et g peuvent être approchés séparément par des difféomorphismes C^∞ -conjugués à $R_{\rho(f)}$ et $R_{\rho(g)}$ respectivement. Ce que l'on ignore, c'est si la même conjugante peut être utilisée pour f et g .

4.2 Actions de groupes à croissance polynomiale

On note ici un corollaire immédiat de la connexité de l'espace des actions lisses de \mathbb{Z}^n sur $[0, 1]$ évoquée ci-dessus et du théorème suivant de Plante et Thurston :

Théorème 4.11 ([Pl–Th76]). *Tout sous-groupe finiment engendré G de $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ à croissance polynomiale est en fait abélien sans torsion.*

Remarque 4.12. On donnera à la fin une preuve élémentaire (basée sur les résultats de Szekeres et K opell du chapitre 1) de ce fait pour G nilpotent.

Corollaire 4.13. *Pour tout groupe finiment engendré Γ à croissance polynomiale, l'ensemble des représentations de Γ dans $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ est connexe.*

C'est en particulier vrai pour Γ nilpotent.

Preuve du corollaire. Soit φ une représentation de Γ dans $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$. D'après le théorème 4.11, $G = \text{Im}(\varphi)$ est isomorphe à \mathbb{Z}^n pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On va déduire le corollaire des deux affirmations suivantes, que l'on prouvera ensuite :

Affirmation 4.14. On peut factoriser φ par une représentation de \mathbb{Z}^n dans $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ (cf. détails ci-après) : il existe des morphismes $\pi : \Gamma \rightarrow \mathbb{Z}^n$ et $\rho : \mathbb{Z}^n \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]$ tels que $\varphi = \rho \circ \pi$.

Affirmation 4.15. L'application $\circ\pi : \rho \in \{\mathbb{Z}^n \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]\} \mapsto \rho \circ \pi \in \{\Gamma \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]\}$ est continue.

L'image du connexe $\{\mathbb{Z}^n \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]\}$ par $\circ\pi$ est donc connexe. Or elle contient φ et la représentation triviale. On a donc en fin de compte montré que la composante connexe dans $\{\Gamma \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]\}$ de la représentation triviale est $\{\Gamma \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]\}$ tout entier, *i.e.* que $\{\Gamma \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]\}$ est connexe. \square

Preuve de l'affirmation 4.14. Immédiat : prendre un isomorphisme ψ de $\text{Im}(\varphi)$ sur \mathbb{Z}^n donné par le théorème 4.11 et prendre $\pi = \psi \circ \varphi$ et $\rho = (i \circ) \psi^{-1}$ (où i désigne l'inclusion de $\text{Im}(\varphi)$ dans $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$). \square

Preuve de l'affirmation 4.15. Immédiat : l'espace $\{\mathbb{Z}^n \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]\}$ est métrisable, donc il suffit de montrer que si $(\rho_k)_k$ est une suite convergeant vers ρ dans $\{\mathbb{Z}^n \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]\}$, $(\rho_k \circ \pi)_k$ converge vers $\rho \circ \pi$ dans $\{\Gamma \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]\}$. Pour cela, par définition de la topologie sur $\{\Gamma \rightarrow \text{Diff}_+^\infty[0, 1]\}$, il suffit de montrer que, si $\{a_j\}_{j \in [1, m]}$ est une famille génératrice de Γ , $((\rho_k \circ \pi)(a_j))_k = (\rho_k(\pi(a_j)))_k$ converge vers $\rho(\pi(a_j))$ pour tout j . Mais la convergence de $(\rho_k)_k$ implique que $(\rho_k(b))_k$ converge vers $\rho(b)$ pour tout $b \in \mathbb{Z}^n$, ce qui conclut. \square

Preuve du théorème 4.11 dans le cas nilpotent. Rappelons que, étant donné un groupe G d'élément neutre e , pour tous sous-groupes A et B de G , on note $[A, B]$ le sous-groupe engendré par les commutateurs de la forme $[x, y]$ avec $x \in A$ et $y \in B$. On définit alors par récurrence une suite de sous-groupes de G , notés $C^n(G)$, par $C^1(G) = G$ et $C^{n+1}(G) = [G, C^n(G)]$. On dit que G est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $C^{n+1}(G) = \{e\}$, et on appelle ordre de nilpotence de G le plus petit entier n tel que cela soit le cas. Un groupe est abélien si et seulement si il est nilpotent d'ordre 1.

Soit G un sous-groupe nilpotent de $\text{Diff}_+^\infty[0, 1]$, et soit n son ordre. Si $n \leq 1$, G est abélien. Supposons maintenant que $n \geq 2$. Alors $C^n(G)$ est non trivial. Soit f un élément de $C^n(G)$ différent de l'identité. Soit $[a, b]$ l'adhérence d'une composante connexe de $[0, 1] \setminus \text{Fix}(f)$. Comme $[G, C^n(G)] = \{\text{Id}\}$, tous les éléments de G commutent avec f . On affirme que $[a, b]$ est fixé par tout élément de G .

En effet, soit g un tel élément, et supposons par l'absurde que $g(a) \neq a$. Quitte à remplacer g par g^{-1} , on peut supposer que $g(a) > a$. Alors l'orbite de a par g converge dans le futur et dans le passé vers deux points fixes de g que l'on notera $c \leq d$, satisfaisant $]c, d[\cap \text{Fix}(g) = \emptyset$. La commutativité entraîne que tout point de l'orbite de a par g est, comme a , un point fixe de f . Les limites c et d sont donc également fixées par f . Ainsi f et g sont deux difféomorphismes commutant de $[c, d]$, où g n'a pas de point fixe intérieur. Puisque f a un point fixe intérieur (a), le lemme de Kopell 1.1 affirme alors que $f = \text{Id}$ sur

$[c, d]$. Mais $c \leq a$ et puisque $]a, b[$ ne contient pas de point fixe de f , le point fixe $g(a)$ est nécessairement supérieur ou égal à b , et a fortiori $d \geq b$. Ainsi, f vaut l'identité sur $[a, b]$, ce qui contredit l'hypothèse initiale.

Ainsi, $[a, b]$ est bien fixé par tout élément de G . La restriction d'un difféomorphisme g de G à $[a, b]$ est donc un élément du centralisateur de $f|_{[a,b]}$, qui est abélien d'après les résultats de Szekeres et Kopell. Mais alors le commutateur de deux éléments de G est nécessairement trivial sur $[a, b]$, ce qui contredit la non-trivialité de f sur $[a, b]$. L'hypothèse initiale ($n \geq 2$) ne peut donc pas se produire, ce qui conclut la preuve. \square

4.3 Perspectives

La première question naturelle à l'issue de ce chapitre est bien sûr celle de la connexité *par arcs* (et de la locale connexité) de l'espace des actions C^∞ de \mathbb{Z}^2 sur l'intervalle. Malheureusement, il est clair que la méthode employée ici pour démontrer la connexité ne permettra pas de répondre à cette question, pour laquelle il faut donc trouver une autre stratégie. Une première étape pourrait être de déterminer si l'approximation du corollaire 4.6 peut être remplacée par un chemin continu.

Un problème nettement plus ambitieux concerne la question analogue pour les actions sur le cercle. Dans ce cas-là, on peut commencer par s'interroger sur la connexité (pas par arcs), qui demeure une question ouverte potentiellement plus accessible. On a vu dans la section 4.1.3 qu'il ne reste plus qu'à déterminer si une paire (f, g) de difféomorphismes commutants telle que f a un nombre de rotation irrationnel appartient toujours à la composante connexe de la paire de rotations $(R_{\rho(f)}, R_{\rho(g)})$. Pour cela, deux pistes s'offrent à nous.

Tout d'abord, Yoccoz montre dans [Yo84] (cf. 4.7) qu'un difféomorphisme lisse f de nombre de rotation irrationnel appartient à l'adhérence de la classe de conjugaison lisse de la rotation $R_{\rho(f)}$. On peut se demander si ce résultat se généralise à deux difféomorphismes commutants (f, g) , auquel cas (f, g) appartiendrait à l'adhérence de la classe de conjugaison lisse de $(R_{\rho(f)}, R_{\rho(g)})$, qui est connexe par arcs, donc d'adhérence connexe, et on aurait gagné. Outre la preuve de Yoccoz, il faudrait commencer par étudier les travaux de Benhenda [Be12] qui a des résultats partiels dans cette direction.

Dans « l'autre sens », Avila et Krikorian ont démontré récemment, dans un travail non encore publié, que l'adhérence de la classe de conjugaison lisse d'un tel f contient la rotation $R_{\rho(f)}$ (on dit que f est C^∞ -réductible). On peut là encore se demander si leur argument se généralise aux paires de difféomorphismes commutants, auquel cas cette fois-ci ce serait $(R_{\rho(f)}, R_{\rho(g)})$ qui appartiendrait à l'adhérence de la composante connexe par arcs, et donc à la composante connexe, de (f, g) .

Ces pistes visent une réponse positive à la question de la connexité. Mais on peut se demander au contraire s'il existe des paires commutantes *stables*, c'est-à-dire telles que toute paire voisine lui est C^∞ -conjuguée. D'après le théorème de [Fa–Kh09], les candidats sont à chercher parmi les paires de difféos de nombres de rotation non conjointement diophantiens non C^∞ -conjuguées à une paire de rotations (si les nombres de rotations sont conjointement diophantiens, la paire est C^∞ -conjuguée à une paire de rotations et on

peut trouver une paire voisine non conjuguée à la paire initiale simplement en modifiant légèrement les nombres de rotation). Malheureusement, les exemples de telles paires que l'on connaît sont, par construction, instables (elles s'obtiennent comme limite de paires C^∞ -conjuguée à une paire de rotations).

Une autre piste ambitieuse concerne les actions des groupes fondamentaux Γ_g des autres surfaces fermées (de genre $g \geq 2$) sur l'intervalle et sur le cercle. À ma connaissance, quel que soit $r \geq 1$, il n'y a pas de résultat sur la connexité de l'espace des actions C^r de Γ_g sur $[0, 1]$ ou sur le cercle en classe d'Euler nulle.

Chapitre 5

Actions sur l'intervalle et le cercle en régularité intermédiaire

Dans ce chapitre, tous les difféomorphismes et plus généralement toutes les actions sur l'intervalle et sur le cercle sont supposés préserver l'orientation, et on appellera parfois abusivement « difféomorphisme du cercle » un difféomorphisme de \mathbb{R} qui commute avec la translation unité.

Dans le chapitre précédent, pour déformer une action lisse de \mathbb{Z}^2 sur $[0, 1]$, nous avons utilisé la très grande rigidité de la relation de commutativité en régularité C^∞ , qui restreint la forme de telles actions. Dans l'introduction du mémoire, nous avons suggéré une autre méthode : la déformation par conjugaison. Cette idée joue un rôle clef dans la preuve par Navas de la connexité par arcs des actions C^1 de \mathbb{Z}^d sur $[0, 1]$ ou \mathbb{S}^1 [Na14]. Dans cet article, il montre notamment que si une telle action n'a pas de point fixe hyperbolique, elle est reliable à une action par isométries (l'action triviale dans le cas de l'intervalle) par un chemin continu d'actions C^1 -conjuguées deux-à-deux (sauf l'action finale par isométries), et réciproquement. Dans ce chapitre, on dira qu'une telle action est *continûment C^1 -réductible*. Plus généralement :

Définition 5.1. Une action sur $[0, 1]$ ou \mathbb{S}^1 est dite *C^r -réductible* (si elle est de classe C^r et) s'il existe une suite de conjugantes C^r telles que la suite des actions conjuguées converge en topologie C^r vers une action par isométries (triviale dans le cas de l'intervalle).

Elle est en outre dite *continûment C^r -réductible* si on peut la relier à une action par isométries par un chemin continu (en topologie C^r) d'actions deux-à-deux C^r -conjuguées (sauf l'action finale par isométries).

Il est naturel de commencer par se demander à quelle condition un seul difféomorphisme est C^r -réductible (au sens où l'action de \mathbb{Z} qu'il engendre l'est). Nous reviendrons en détail sur cette question dans le paragraphe 5.1.1, où nous définirons notamment la *variation asymptotique* $\text{var}_\infty(f)$ d'un difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+^{1+bv}(V)$, où V désigne l'intervalle ou le cercle, notion introduite par Navas dans [Na18] et dont il montre que l'annulation est une condition nécessaire et suffisante de C^{1+bv} -réductibilité.

Dans le but d'étudier non plus les difféomorphismes seuls mais les actions, il se demande alors (cf. Question 6 de [Na18]) si des difféomorphismes commutants peuvent avoir l'un une variation asymptotique nulle et l'autre une non nulle (on suppose dans cette question que les difféomorphismes sont sans point fixe intérieur, sinon il est facile de trouver un exemple en prenant des difféomorphismes à supports disjoints).

C'est cette question initiale qui a mené à l'article [Ey–Na19]. Nous y répondons par la négative en reliant la non-trivialité de la variation asymptotique d'un difféomorphisme f sans point fixe intérieur à une autre obstruction plus connue : la non-trivialité de son invariant de Mather M_f (cf. chap. 1), dont nous étendons la définition aux difféomorphismes C^{1+bv} dans [Ey–Na21], puis nous généralisons ce résultat aux difféomorphismes avec points fixes intérieurs (cf. théorème G de l'introduction). Nous exploitons ensuite ce lien pour démontrer des propriétés de la variation asymptotique analogues à celles de l'invariant de Mather. Enfin, nous nous intéressons à la C^2 -réductibilité. Nous présentons ces résultats dans la **section 5.1**, après avoir exposé les résultats antérieurs de Navas sur le lien entre variation asymptotique et réductibilité. Comme expliqué au début de cette introduction, la question de la réductibilité des actions est naturelle lorsqu'on essaie de démontrer un résultat de connexité sur de telles actions. C'est justement ce que nous faisons dans [Ey–Na21] pour les actions C^2 en nous appuyant sur les résultats de [Na18] et [Ey–Na19]. Le résultat en question (théorème H) est présenté dans la **section 5.2**.

5.1 Réductibilité, variation asymptotique et invariant de Mather

5.1.1 Réductibilité et variation asymptotique

Commençons par nous intéresser à la question de la C^r -réductibilité pour un seul homéomorphisme. Comme nous allons le voir, la réponse est alors connue pour $r = 0$ (cf [He79], chapitre VII), $r = 1$ (cf [Na14]), $r = 1 + bv$ et $1 + ac$ (cf [Na18]) et $r = \infty$ pour un difféomorphisme du cercle de nombre de rotation irrationnel.

Dans le cas C^0 , il n'y a pas d'obstruction : tout homéomorphisme de l'intervalle ou du cercle est C^0 -réductible. C'est un exercice facile pour l'intervalle, basé sur l'observation que deux homéomorphismes f et g du segment sans point fixe intérieur et préservant l'orientation sont conjugués dans $\text{Homéo}_+[0, 1]$ si et seulement si on a $f > \text{Id}$ et $g > \text{Id}$ sur $]0, 1[$ ou $f < \text{Id}$ et $g < \text{Id}$ sur $]0, 1[$.

Pour un homéomorphisme f du cercle (ou plutôt de \mathbb{R} commutant à la translation unité), on peut, suivant Herman, poser pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k$$

et observer que

$$h_n \circ f \circ h_n^{-1} = \text{Id} + \frac{f^n - \text{Id}}{n} \circ h_n^{-1},$$

qui converge uniformément vers $\text{Id} + \rho(f)$.

Dans le cas C^1 , la C^1 -tangence à l'identité en leurs points fixes des difféomorphismes f^k est clairement nécessaire (car les dérivées aux points fixes sont des invariants de conjugaison C^1). Pour montrer que cette condition est suffisante, Navas construit explicitement des conjuguantes h_n à partir de leur dérivée en posant :

$$Dh_n = \frac{\left(\prod_{k=0}^{n-1} Df^k\right)^{1/n}}{\int_0^1 \left(\prod_{k=0}^{n-1} Df^k\right)^{1/n}},$$

de sorte que

$$\log D(h_n \circ f \circ h_n^{-1}) = \frac{1}{n}(\log Df^n) \circ h_n^{-1}, \quad (5.1)$$

dont il montre la convergence uniforme vers 0 sous l'hypothèse de parabolicité des points fixes, ce qui entraîne la C^1 -réductibilité.

Cette dernière égalité lui inspire par ailleurs dans [Na18] une condition suffisante de C^{1+bv} -réductibilité qui l'amène à introduire la notion suivante :

Définition 5.2. Étant donné $f \in \text{Diff}_+^{1+bv}(V)$, avec $V = [0, 1]$ ou \mathbb{S}^1 , on définit la *variation asymptotique*¹ de f par

$$\text{var}_\infty(f) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \text{var}(\log Df^n)$$

(qui est toujours finie, par sous-additivité de $n \mapsto \text{var}(\log Df^n)$).

D'après l'égalité (5.1), si $\text{var}_\infty(f) = 0$, $\text{var} \log D(h_n \circ f \circ h_n^{-1})$ tend vers 0, ce qui entraîne la C^{1+bv} -réductibilité de f , les h_n ayant la même régularité que f . Mais Navas montre en fait que pour tout $f \in \text{Diff}_+^{1+bv}(V)$,

$$\text{var}_\infty(f) = \inf_{h \in \text{Diff}_+^{1+bv}(V)} \text{var}(\log D(hfh^{-1})), \quad (5.2)$$

ce qui fait de l'annulation de $\text{var}_\infty(f)$ une condition nécessaire et suffisante de C^{1+bv} -réductibilité (et en fait de *continue* C^{1+bv} -réductibilité, cf [Na18]). L'inégalité « \geq » découle de ce qui précède avec les h_n . L'autre inégalité découle facilement du fait que $\text{var}_\infty(g) \leq \text{var}(\log Dg)$ pour tout g et de l'invariance par C^{1+bv} -conjugaison de var_∞ , qui découlent toutes deux de la règle de dérivation de Leibniz :

$$\log D(g \circ h) = (\log Dg) \circ h + \log Dh.$$

Navas étend ensuite son résultat aux actions de groupes abéliens (cf. [Na18], Theorem B et [Ey–Na21], Proposition 2.1) :

1. Il l'appelle en fait *distorsion asymptotique*, mais nous verrons dans la section 5.3 que ce nom s'avère mal choisi dans certaines situations, c'est pourquoi il l'a depuis rebaptisée *variation asymptotique*

Proposition 5.3. *Soient f_1, \dots, f_d des $C^{1+\text{bv}}$ -difféomorphismes commutants d'une 1-variété compacte. Si la variation asymptotique de chaque f_i est nulle, alors il existe un chemin continu (pour la $C^{1+\text{bv}}$ -topologie) de conjugués simultanés $h_t f_i h_t^{-1}$ qui commence aux f_i donnés et finit en des isométries. De plus, le long de ce chemin, chaque fonction $t \mapsto \text{var}(\log D(h_t f_i t_t^{-1}))$ est majorée par $\text{var}(\log Df_i)$. Enfin, si f_1, \dots, f_d sont $C^{1+\text{ac}}$, alors le chemin est continu pour la $C^{1+\text{ac}}$ -topologie.*

(Le contrôle sur le chemin nous servira dans la section 5.2). En adaptant simplement la preuve de l'énoncé ci-dessus, on le généralise dans [Ey–Na21] (Proposition 2.2) au cas où la variation asymptotique n'est pas nulle, ce qui servira dans la section 5.2 :

Proposition 5.4. *Étant donnée une famille de $C^{1+\text{bv}}$ - (resp. $C^{1+\text{ac}}$ -) difféomorphismes commutants f_1, \dots, f_d d'une 1-variété compacte et $\varepsilon > 0$, il existe un chemin $C^{1+\text{bv}}$ -continu (resp. $C^{1+\text{ac}}$ -continu) de conjugués simultanés $h_t f_i h_t^{-1}$ qui commence aux f_i donnés et finit en des difféomorphismes commutants \tilde{f}_i tels que $\text{var}(\log D\tilde{f}_i) \leq \text{var}_\infty(f_i) + \varepsilon$. De plus, le long du chemin, chaque fonction $t \mapsto \text{var}(\log D(h_t f_i t_t^{-1}))$ est majorée par $\text{var}(\log Df_i)$.*

Dans la suite, on note $\text{Diff}_+^{r,\Delta}[0, 1]$ l'ensemble des difféomorphismes C^r de $[0, 1]$ sans point fixe intérieur (la lettre Δ fait référence à cette dernière propriété).

5.1.2 Invariant de Mather, réductibilité et réponse à la question initiale

L'invariant de Mather, que l'on a présenté au chapitre 1 comme une obstruction, pour un difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}[0, 1]$, à être plongeable dans un flot C^1 , est aussi, pour de tels difféomorphismes, un invariant de conjugaison C^1 . En outre, Yoccoz a démontré dans [Yo95] la continuité de l'invariant de Mather M_f par rapport au difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}[0, 1]$ dans un sens très large. Notamment, si (f_n) est une suite convergente dans $\text{Diff}_+^{2,\Delta}[0, 1]$ vers l'identité, $(M_{f_n}^{1/2,1/2})$ converge vers l'identité en topologie C^2 . Ainsi, si un difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}[0, 1]$ est C^2 -réductible, son invariant de Mather est nécessairement trivial.

Vu le lien entre variation asymptotique et réductibilité, cette observation suggère un lien entre invariant de Mather et variation asymptotique, ce que nous avons confirmé dans le premier énoncé de [Ey–Na19] ci-dessous, dont nous donnerons une idée de la preuve dans la section suivante, et que nous retrouverons dans la section 5.1.4 comme conséquence de l'énoncé plus fort 5.9 :

Théorème 5.5. *La variation asymptotique d'un élément $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}([0, 1])$ s'annule si et seulement si ses points fixes sont paraboliques et son invariant de Mather est trivial.*

En particulier, si $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}[0, 1]$ a une variation asymptotique nulle, il est parabolique au bord, donc ses champs de Szekeres à gauche et à droite sont C^1 -plats en 0 et 1 respectivement, et son invariant de Mather est trivial, donc ses champs de Szekeres coïncident. Or si $g \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}[0, 1]$ commute avec f , g appartient au flot du champ de Szekeres de f (cf. chap. 1), donc est parabolique au bord et a lui aussi un invariant de Mather trivial puisqu'il se plonge dans un flot C^1 . Ainsi, sa variation asymptotique est nulle, ce qui répond bien,

dans le cas C^2 , à la question mentionnée dans l'introduction du chapitre comme point de départ de l'article [Ey–Na19].

Par ailleurs, on obtient comme conséquence directe des travaux antérieurs de Navas et du théorème 5.5 (et du chapitre 1) :

Corollaire 5.6. *Étant donné un difféomorphisme $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}([0,1])$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. f est C^{1+bv} -réductible ;
2. f est parabolique au bord et son invariant de Mather est trivial ;
3. f appartient au flot d'un champ de vecteurs C^1 plat au bord.

On montre en fait dans [Ey–Na19] que l'équivalence 1. \Leftrightarrow 3. est valable pour tout difféomorphisme C^2 , avec ou sans points fixes intérieurs (théorème G de l'introduction et Corollary 2 dans [Ey–Na19]). On généralise par ailleurs dans [Ey–Na21] la définition de l'invariant de Mather aux difféomorphismes C^{1+bv} , et on prouve l'équivalence 1. \Leftrightarrow 2. dans ce cadre.

Il est naturel de se demander si la condition 2. (ou 3.) n'entraîne pas en fait la C^2 -réductibilité. Cette question est explicitement formulée dans la Question 3 de [Ey–Na19], et nous n'avons pour l'instant que des réponses partielles :

Proposition 5.7. *Si $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}([0,1])$ appartient au flot d'un champ C^2 qui est C^1 -plat au bord, f est C^2 -réductible.*

Ceci constitue l'une des étapes de la preuve du résultat plus fort :

Théorème 5.8 (cf. [Ey–Na19], Theorem E). *Si $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}([0,1])$ a ses points fixes paraboliques et un C^2 -centralisateur non cyclique, f est C^2 -réductible.*

L'hypothèse sur le centralisateur implique la trivialité de l'invariant de Mather, mais est strictement plus forte, comme on peut le montrer à l'aide de la construction de Sergeraert présentée en 2.2. « Malheureusement », tout C^2 -difféomorphisme de $[0,1]$ d'invariant de Mather trivial construit à partir de l'exemple de Sergeraert est C^2 -réductible, quoiqu'ayant un centralisateur C^2 cyclique, donc si l'on veut trouver un exemple de C^2 -difféomorphisme satisfaisant 3. mais non C^2 -réductible, il faudra encore aller chercher ailleurs...

5.1.3 Une preuve du théorème 5.5

Nous verrons dans la section suivante que le théorème 5.5 découle du lien plus général (5.8) entre variation asymptotique et invariant de Mather, mais nous voulons donner ici une idée de preuve plus intuitive. Soit donc $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}[0,1]$.

Première implication. Pour la preuve qui suit, il suffit de supposer $f \in \text{Diff}_+^{1+bv,\Delta}[0,1]$. Supposons que $\text{var}_\infty(f) = 0$. Tout d'abord (et ceci est valable plus généralement pour $f \in \text{Diff}_+^{1+bv,\Delta}([0,1])$),

$$\text{var}(\log Df^n) \geq |\log Df^n(1) - \log Df^n(0)| = n |\log Df(1) - \log Df(0)|$$

et puisque $\log Df(0)$ et $\log Df(1)$ ont des signes opposés (s'ils sont tous deux non nuls), on a :

$$0 = \text{var}_\infty(f) \geq |\log Df(0)| + |\log Df(1)|, \quad (5.3)$$

donc les points fixes sont bien paraboliques.

En outre, d'après (5.2), f est C^{1+bv} -réductible. Soit (h_n) une suite de conjuguanes C^{1+bv} telle que $h_n \circ f \circ h_n^{-1}$ tend vers Id au sens C^{1+bv} . L'invariant de Mather, étendu aux difféomorphismes C^{1+bv} , a la même propriété de « continuité » (due à Yoccoz) que dans le cas C^2 , et est encore un invariant de conjugaison C^1 , donc l'invariant de Mather de f est nécessairement trivial. (Toute la difficulté technique de la preuve se cache ici dans le fameux « résultat de continuité ». Avec la preuve du théorème 5.9, nous verrons une autre idée d'argument se passant de ce résultat).

Deuxième implication. On utilise ici la régularité C^2 de f , mais on donne dans [Ey–Na21] une preuve valable en régularité C^{1+bv} . Supposons que f est parabolique au bord et que son invariant de Mather est trivial (de sorte que f est le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs X de classe C^1 plat au bord) et démontrons que f est C^{1+bv} -réductible, ce qui entraînera la nullité de $\text{var}_\infty(f)$ d'après (5.2). Pour cela, nous allons construire une suite explicite de difféomorphismes $h_n \in \text{Diff}_+^2[0, 1]$ tels que $\text{var} \log D(h_n f h_n^{-1})$ tend vers 0. On suppose, sans perte de généralité, que $f(x) > x$ pour tout $x \in]0, 1[$. Étant donné $a \in]0, 1[$, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = f^{-n}(a)$ et $z_n = f^n(a)$, de sorte que les suites (y_n) et (z_n) convergent vers 0 et 1 respectivement. On définit h_n par sa dérivée (continue) :

$$Dh_n(x) = \begin{cases} \frac{c_n}{X(y_n)} & \text{si } x \in [0, y_n], \\ \frac{c_n}{X(x)} & \text{si } x \in [y_n, z_n], \\ \frac{c_n}{X(z_n)} & \text{si } x \in [z_n, 1], \end{cases} \quad (5.4)$$

où la constante c_n est déterminée par la contrainte $\int_0^1 Dh_n = 1$. Observons que pour tout $x \in [y_n, f^{-1}(z_n)]$,

$$h_n(f(x)) - h_n(x) = \int_x^{f(x)} Dh_n(y) dy = c_n \int_x^{f(x)} \frac{dy}{X(y)} = c_n \quad (5.5)$$

donc h_n conjugue la restriction de f à $[y_n, f^{-1}(z_n)]$ (qui contient $2n - 1$ intervalles fondamentaux de f) à la translation de c_n sur $h_n([y_n, f^{-1}(z_n)])$. En particulier $(2n - 1)c_n \leq 1$ donc c_n tend vers 0. Moralement, la construction est faite pour que h_n conjugue f à des translations de plus en plus petites sur des intervalles de plus en plus grands de $]0, 1[$.

Il nous faut maintenant montrer que $\text{var} \log D(h_n f h_n^{-1})$ tend vers 0. Pour cela, posons $f_n = h_n f h_n^{-1}$ et notons $\text{var}(u, I)$ la variation totale sur $I \subset [0, 1]$ d'une fonction $u \in BV([0, 1])$. Alors

$$\begin{aligned} \text{var} \log Df_n &= \text{var}(\log Df_n, h_n([0, f^{-1}(y_n)] \cup [z_n, 1])) + \text{var}(\log Df_n, h_n([f^{-1}(y_n), y_n])) \\ &\quad + \text{var}(\log Df_n, h_n([f^{-1}(z_n), z_n])) + \text{var}(\log Df_n, h_n([y_n, f^{-1}(z_n)])). \end{aligned}$$

D'après (5.5), le dernier terme est nul (f_n est une translation sur l'intervalle considéré). D'autre part, h_n^{-1} et h_n étant des homothéties sur $h_n([0, f^{-1}(y_n)] \cup [z_n, 1])$ et $f([0, f^{-1}(y_n)] \cup [z_n, 1])$ respectivement, par la formule de dérivation en chaîne (« chain rule »), le premier terme du membre de droite est égal à $\text{var}(\log Df, [0, f^{-1}(y_n)] \cup [z_n, 1])$, qui tend vers 0 puisque $\log Df$ est continue. Reste à estimer les termes centraux du membre de droite de l'inégalité. Par la *chain rule* et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \text{var}(\log Df_n, h_n([f^{-1}(y_n), y_n])) &\leq \text{var}(\log Dh_n^{-1}, h_n([f^{-1}(y_n), y_n])) \\ &\quad + \text{var}(\log Df, [f^{-1}(y_n), y_n]) + \text{var}(\log Dh_n, [y_n, f(y_n)]) \\ &= \text{var}(\log Dh_n, [f^{-1}(y_n), y_n]) \\ &\quad + \text{var}(\log Df, [f^{-1}(y_n), y_n]) + \text{var}(\log Dh_n, [y_n, f(y_n)]) \\ &= \text{var}(\log Df, [f^{-1}(y_n), y_n]) + \text{var}(\log X, [y_n, f(y_n)]) \end{aligned}$$

($\text{var}(\log Dh_n, [f^{-1}(y_n), y_n])$ est nul car h_n est une homothétie sur l'intervalle concerné). Le premier terme du membre de droite final tend vers 0 car $\log Df$ est continu sur $[0, 1]$. Quant au second, $\log X$ étant C^1 sur $[y_n, f(y_n)]$, il vaut $\int_{y_n}^{f(y_n)} \left| \frac{DX}{X} \right|$. Or $\sup_{[y_n, f(y_n)]} |DX|$ tend vers 0 car DX est continu sur $[0, 1]$ et nul en 0, et $\int_b^{f(b)} \frac{1}{X} = 1$ pour tout $b \in [0, 1]$ car f est le temps 1 de X . Ainsi, $\text{var}(\log X, [y_n, f(y_n)])$ tend vers 0 et on conclut que $\text{var}(\log Df_n, h_n([f^{-1}(y_n), y_n]))$ tend vers 0. On traite $\text{var}(\log Df_n, h_n([f^{-1}(z_n), z_n]))$ de la même façon, ce qui conclut la preuve de la convergence de $\text{var} \log Df_n$ vers 0 et donc du théorème 5.5. \square

Vers le théorème 5.9 (cf section suivante). Notons bien le rôle crucial du caractère C^1 de X aux deux extrémités dans l'argument ci-dessus. Dans le cas d'un invariant de Mather non trivial et de points fixes non nécessairement paraboliques, en notant X et Y les champ de Szekeres à gauche et à droite de f , tout ce qui précède est valable jusqu'aux deux premières phrases du dernier paragraphe (incluses). Maintenant, $\sup_{[y_n, f(y_n)]} |DX|$ tend vers $|DX(0)| = |\log Df(0)|$ et on déduit que $\text{var}(\log Df_n, h_n([f^{-1}(y_n), y_n]))$ tend vers $|\log Df(0)|$. Mais cette fois-ci, on ne peut pas traiter le terme restant (où y_n est remplacé par z_n) de la même façon, car on n'a plus la continuité de DX en 1. On a, de façon similaire à ce qui précède,

$$\text{var}(\log Df_n, h_n([f^{-1}(z_n), z_n])) \leq \text{var}(\log X, [f^{-1}(z_n), z_n]) + \text{var}(\log Df, [f^{-1}(z_n), z_n]),$$

et le dernier terme tend là encore vers 0. En revanche, cette fois-ci, on peut seulement dire :

$$\text{var}(\log X, [f^{-1}(z_n), z_n]) \leq \text{var}(\log \frac{X}{Y}, [f^{-1}(z_n), z_n]) + \text{var}(\log Y, [f^{-1}(z_n), z_n]).$$

Comme précédemment, le caractère C^1 de Y en 1 implique que $\text{var}(\log Y, [f^{-1}(z_n), z_n])$ tend vers $|\log Df(1)|$. Quant au terme restant, nous allons voir qu'il est précisément égal à $\text{var} \log DM_f$ (bien que l'invariant de Mather ne soit défini qu'à pré- et post-composition par des rotations près, la variation totale du logarithme de sa dérivée est bien définie), ou encore à $\text{var} \log (DM_f^{a,a}, [0, 1])$, où $M_f^{a,a}$ est vu comme un difféomorphisme de \mathbb{R} commutant

avec la translation unité, que l'on notera simplement M_f dans ce qui suit. En effet, notons (f_t) le flot de X , définissons le difféomorphisme $\psi_X : t \in \mathbb{R} \mapsto f_t(a) \in]0, 1[$, et rappelons l'égalité (1.2) du chapitre 1 :

$$DM_f = \frac{X}{Y}(\psi_X(t)).$$

Celle-ci entraîne directement que

$$\text{var log } DM_f = \text{var}(\log \frac{X}{Y}, [a, f(a)]) \quad (5.6)$$

et ceci est vrai pour tout $a \in]0, 1[$, ce qui donne bien l'égalité voulue. De tout ceci, on conclut que

$$\text{var}_\infty(f) \leq |\log Df(0)| + |\log Df(1)| + \text{var log } DM_f, \quad (5.7)$$

ce qui prouve la moitié du théorème 5.9 de la section suivante.

5.1.4 Inégalité fondamentale et « conséquences » pour la variation asymptotique

Le travail présenté dans [Ey–Na19] a commencé par la preuve du théorème 5.5, mais nous avons ensuite retrouvé celui-ci comme conséquence du lien plus précis entre variation asymptotique et invariant de Mather exposé dans l'énoncé suivant (Theorem B dans [Ey–Na19]) :

Théorème 5.9. *Pour tout $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}([0, 1])$, on a*

$$|\text{var}_\infty(f) - \text{var}(\log DM_f)| \leq |\log Df(0)| + |\log Df(1)|. \quad (5.8)$$

Dans cet énoncé, observons à nouveau que, bien que l'invariant de Mather ne soit défini qu'à pré- et post-composition par des rotations près, la variation totale du logarithme de sa dérivée est bien définie.

Cet énoncé, comme le théorème 5.5, est un peu bancal en ce que l'invariant de Mather est a priori associé aux difféomorphismes C^2 alors que la variation asymptotique concerne les difféomorphismes C^{1+bv} . Nous avons comblé cet écart dans [Ey–Na21] en étendant (dans l'Appendix I) la définition des champs de Szekeres et de l'invariant de Mather aux difféomorphismes C^{1+bv} , et en généralisant le résultat ci-dessus à ceux-ci (cf. Theorem 2.4 de [Ey–Na21]).

Une conséquence directe du théorème 5.9 est que si $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}([0, 1])$ est tangent à l'identité au bord,

$$\text{var}_\infty(f) = \text{var}(\log DM_f). \quad (5.9)$$

Cette égalité implique le théorème 5.5. Mais la version C^{1+bv} du théorème 5.9 implique aussi la continuité de la variation asymptotique de $\text{Diff}_+^{1+bv,\Delta}([0, 1])$ dans \mathbb{R} en chaque f tangent à l'identité au bord. En effet, Yoccoz a montré dans [Yo95] que l'application envoyant $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}([0, 1])$ sur son invariant de Mather est continue en topologie C^2 , et ses arguments s'étendent en régularité C^{1+bv} . De plus, $Df(0)$ et $Df(1)$ dépendent continûment de f .

Par une tout autre méthode, on prouve plus généralement (cf. [Ey–Na19], Theorem C) :

Théorème 5.10. *La variation asymptotique est continue de $\text{Diff}_+^{1+\text{bv},\Delta}([0,1])$ dans \mathbb{R}_+ . Cependant, elle n'est pas continue sur $\text{Diff}_+^{1+\text{bv}}([0,1])$ (bien qu'elle soit semi-continue supérieure). En fait, elle n'est même pas continue sur $\text{Diff}_+^\infty([0,1])$.*

Enfin, l'égalité (5.9) entraîne aussi que, comme M_f , var_∞ est un invariant de conjugaison C^1 sur l'espace des C^2 -difféomorphismes de $[0,1]$ sans point fixe intérieurs et paraboliques au bord. On prouve beaucoup plus généralement dans [Ey–Na19] (Theorem D) :

Théorème 5.11. *Si f, g sont des C^2 -difféomorphismes d'une 1-variété compacte tels qu'il existe un C^1 -difféomorphisme h tel que $f = hgh^{-1}$, alors $\text{var}_\infty(f) = \text{var}_\infty(g)$.*

5.1.5 Deux preuves de l'inégalité fondamentale

Soit $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}([0,1])$. En vue des deux preuves ci-dessous, nous allons établir un lien entre invariant de Mather et grandes puissances de f .

On suppose sans perte de généralité que $f(x) > x$ pour tout $x \in]0,1[$, et on note X et Y les champs de Szekeres à gauche et à droite de f et (f_t) et (f^t) leurs flots respectifs. On fixe $a \in]0,1[$ et on définit $\psi_X : t \mapsto f_t(a)$ et $\psi_Y : t \mapsto f^t(a)$. En particulier, $\psi_X([n,m]) = [f^n(a), f^m(a)]$ pour tous entiers $n \leq m$, $D\psi_X = X \circ \psi_X$ et par suite $D\psi_X^{-1} = 1/X$ (et la même chose pour Y). On identifie l'invariant de Mather M_f de f avec son représentant $M_f^{a,a} := \psi_Y^{-1} \circ \psi_X$. Rappelons que les applications ψ_X et ψ_Y satisfont $\psi \circ T = f \circ \psi$ où $T := T_1$ désigne la translation de 1 sur \mathbb{R} . Par suite, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$M_f = T_{-m} \circ (\psi_Y)^{-1} \circ f^{2m} \circ \psi_X \circ T_{-m}. \quad (5.10)$$

Preuve « élémentaire » du théorème 5.9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \text{var}(\log DM_f, [0,1]) &= \frac{1}{2n} \text{var}(\log DM_f, [-n,n]) \\ &= \frac{1}{2n} \text{var}(\log D(T_{-2n} \circ \psi_Y^{-1} \circ f^{2n} \circ f^{2n} \circ \psi_X \circ T_{-2n}), [-n,n]) \\ &\quad \text{d'après (5.10) appliquée à } m = 2n, \\ &\leq \frac{1}{2n} (\text{var}(\log Y, [f^n(a), f^{3n}(a)]) + \text{var}(\log Df^{2n}, [f^{-n}(a), f^n(a)]) \\ &\quad + \text{var}(\log Df^{2n}, [f^{-3n}(a), f^{-n}(a)]) + \text{var}(\log X, [f^{-3n}(a), f^{-n}(a)])) \\ &= \frac{1}{2n} \left(\int_{f^n(a)}^{f^{3n}(a)} \left| \frac{DY}{Y} \right| + \int_{f^{-3n}(a)}^{f^{-n}(a)} \left| \frac{DX}{X} \right| \right) \\ &\quad + \frac{1}{2n} \text{var}(\log Df^{2n}, [f^{-3n}(a), f^n(a)]). \end{aligned}$$

Le fait que X et Y soient de signe constant, que $\int_p^{f(p)} \frac{1}{X} = \int_p^{f(p)} \frac{1}{Y} = 1$ pour tout $p \in]0,1[$ et que $\sup_{[f^{-3n}(a), f^{-n}(a)]} |DX - DX(0)|$ et $\sup_{[f^n(a), f^{3n}(a)]} |DY - DY(1)|$ tendent vers 0 entraînent que le premier terme du dernier membre de l'inégalité ci-dessus tend vers

$|DY(1)| + |DX(0)| = |\log Df(0)| + |\log Df(1)|$. Quant au second terme, observons que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \text{var}(\log Df^{2n}) &= \frac{1}{2n} \text{var}(\log Df^{2n}, [f^{-3n}(a), f^n(a)]) \\ &\quad + \frac{1}{2n} \text{var}(\log Df^{2n}, [0, f^{-3n}(a)]) + \frac{1}{2n} \text{var}(\log Df^{2n}, [f^n(a), 1]). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \text{var}(\log Df^{2n}, [0, f^{-3n}(a)]) &\leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \text{var}(\log Df, [0, f^{-3n+k}(a)]) \\ &\leq \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \text{var}(\log Df, [0, f^{-n}(a)]) \\ &= \text{var}(\log Df, [0, f^{-n}(a)]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

et de même pour $\frac{1}{2n} \text{var}(\log Df^{2n}, [f^n(a), 1])$, donc

$$\frac{1}{2n} \text{var}(\log Df^{2n}, [f^{-3n}(a), f^n(a)]) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \text{var}_\infty(f),$$

et on obtient finalement l'inégalité

$$\text{var}(\log DM_f, [0, 1]) \leq |\log Df(0)| + |\log Df(1)| + \text{var}_\infty(f),$$

ce qui, avec l'inégalité (5.7), conclut la première preuve du théorème 5.9. \square

Preuve utilisant une nouvelle caractérisation de var_∞ . Dans la preuve précédente du théorème 5.9, on a utilisé à la fois la définition de la variation asymptotique et sa caractérisation en terme de conjugaison. Ici, on utilise une nouvelle caractérisation : en l'absence de points fixes intérieurs, la variation asymptotique peut être approchée par la localisation de la variation d'un itéré fini.

Proposition 5.12. *Soit $f \in \text{Diff}_+^{1+\text{bv}, \Delta}([0, 1])$ tel que $f(x) > x$ pour tout $x \in]0, 1[$, et soit $p \in]0, 1[$. Alors*

$$\text{var}_\infty(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{var}(\log Df^{2n}; [f^{-n}(p), f^{-n+1}(p)]). \quad (5.11)$$

Nous renvoyons à [Ey–Na19, Prop. 5.1] pour la preuve élémentaire mais technique de ce résultat.

Le lien entre variation asymptotique donnée par (5.11) et invariant de Mather donné par (5.10) devient plus manifeste. Revenons donc à la preuve du théorème 5.9. De l'égalité (5.10) et de la formule de « dérivation en chaîne », on déduit :

$$\log DM_f(t) = \log D\psi_Y^{-1}(f_{t+m}(a)) + \log Df^{2m}(f_{t-m}(a)) + \log D\psi_X(t - m)$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \text{var}(\log DM_f - \log Df^{2m} \circ \psi_X \circ T_{-m}, [0, 1]) \\
&= \text{var}(\log D\psi_Y^{-1} \circ \psi_X \circ T_m + \log D\psi_X \circ T_{-m}, [0, 1]) \\
&\leq \text{var}(\log D\psi_Y^{-1} \circ \psi_X \circ T_m, [0, 1]) + \text{var}(\log D\psi_X^{-1} \circ \psi_X \circ T_{-m}, [0, 1]) \\
&= \text{var}(\log Y, [f^m(a), f^{m+1}(a)]) + \text{var}(\log X, [f^{-m}(a), f^{-m+1}(a)]) \\
&\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} |\log Df(1)| + |\log Df(0)|
\end{aligned}$$

comme on l'a déjà vu dans la preuve du théorème 5.5 en utilisant le fait que X est C^1 en 0, que $|DX(0)| = |\log Df(0)|$ et que $\int_p^{f(p)} \frac{1}{X} = 1$ pour tout $p \in]0, 1[$ (et les propriétés analogues pour Y). Or

$$\begin{aligned}
& \left| \text{var}(\log DM_f, [0, 1]) - \text{var}(\log Df^{2m}, [f^{-m}(a), f^{-m+1}(a)]) \right| \\
&= \left| \text{var}(\log DM_f, [0, 1]) - \text{var}(\log Df^{2m} \circ \psi_X \circ T_{-m}, [0, 1]) \right| \\
&\leq \text{var}(\log DM_f - \log Df^{2m} \circ \psi_X \circ T_{-m}, [0, 1]).
\end{aligned}$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ dans l'inégalité résultant des deux précédentes et en appliquant (5.11) on obtient bien

$$|\text{var}(\log DM_f, [0, 1]) - \text{var}_\infty(f)| \leq |\log Df(1)| + |\log Df(0)|,$$

ce qui conclut la deuxième preuve du théorème 5.9. \square

5.2 Connexité des actions C^2 de \mathbb{Z}^d sur $[0, 1]$

Les outils de [Na18] et [Ey–Na19] nous permettent dans [Ey–Na21] de démontrer l'énoncé suivant, où C^{1+ac} signifie C^1 avec une dérivée absolument continue :

Théorème H. *L'espace des actions C^2 de \mathbb{Z}^d sur une variété compacte de dimension 1 est C^{1+ac} -connexe par arcs.*

Autrement dit, toute action C^2 de \mathbb{Z}^d sur une variété compacte de dimension 1 peut être reliée à l'action triviale par un chemin continu d'actions C^{1+ac} .

Sur le cercle, le cas où l'un des générateurs agit avec un nombre de rotation irrationnel est traité dans [Na18, Theorem B]. Par ailleurs, le cas où tous les générateurs ont un nombre de rotation rationnel se ramène à celui de l'intervalle en passant à un sous-groupe d'indice fini (cette réduction n'est toutefois pas immédiate). Nous ne parlerons donc ici que du cas de l'intervalle $[0, 1]$, dont voici les idées principales de la preuve.

En subdivisant l'intervalle, on commence par s'intéresser aux actions sans point fixe commun intérieur. Il faut néanmoins prendre des précautions pour que les déformations ainsi construites se « recollent bien ».

En l'absence de point fixe commun intérieur, le Lemme de Kopell 1.1 assure que tous les difféomorphismes non triviaux de l'action appartiennent à $\text{Diff}_+^{2,\Delta}[0,1]$ et ont, à une constante près, les mêmes champs de Szekeres à gauche et à droite. Ainsi, soit ils ont tous un invariant de Mather trivial, soit ils ont tous un invariant de Mather non trivial (on dira donc simplement que *l'action* a un invariant de Mather trivial ou non).

Invariant de Mather trivial. Si 0 et 1 sont des points fixes paraboliques pour tous les générateurs de l'action, ceux-ci ont tous une variation asymptotique nulle et les idées de [Na18] permettent de déformer l'action en l'action triviale par conjugaison (autrement dit, l'action est continûment C^{1+ac} -réductible, cf. proposition 5.3).

Si 0 et/ou 1 est hyperbolique, on utilise le théorème de linéarisation de Sternberg (dans la version améliorée de Yoccoz) pour transformer l'action initiale en une action engendrée par un champ de vecteurs dont les éléments du flot sont affines près de l'extrémité en question. On déforme alors ce champ de vecteurs pour rendre son flot parabolique au bord, afin de pouvoir appliquer l'argument précédent. Cela fonctionne mais nécessite une stratégie subtile à cause du manque de contrôle sur les normes des conjugantes, qui ne sont pas C^1 mais préservent néanmoins la régularité C^2 de l'action (cette idée provient de [Na14]).

Observons que cet usage du théorème de Sternberg est le seul endroit où on utilise la régularité C^2 de l'action initiale, le résultat de Sternberg n'étant pas valable pour les difféomorphismes C^{1+ac} (voir Appendix II de [Ey–Na21]).

Invariant de Mather non trivial. Ce devrait être le cas « facile » : cette hypothèse entraîne que tous les difféomorphismes de l'action sont des itérés d'un même C^2 -difféomorphisme f , qu'il suffit de déformer en l'identité pour déformer toute l'action en l'action triviale. Le problème est que lorsqu'on passe du cas sans point fixe intérieur au cas général, on est potentiellement amené à recoller une infinité d'intervalles de ce type, et l'absence de contrôle sur le générateur f de l'action sur chaque sous-intervalle sans point fixe intérieur fait que l'action recollée n'est pas nécessairement régulière. Pour surmonter cette difficulté, l'idée clef est d'utiliser les propriétés de la variation asymptotique pour commencer par conjuguer l'action en une autre pour laquelle la norme C^{1+bv} du générateur est petite, et seulement ensuite de procéder à la déformation de celui-ci. On applique pour cela la proposition 5.4 à la famille constituée des images des générateurs de \mathbb{Z}^d à laquelle on a ajouté le générateur f de l'action.

5.3 Perspectives

Amélioration du théorème H. Un des objectifs naturels dans la lignée de ces travaux est d'améliorer le théorème H en un énoncé entièrement « C^{1+ac} ». Comme évoqué dans les idées de la preuve, il faut pour cela trouver une façon de traiter les points fixes hyperboliques autre que le théorème de linéarisation de Sternberg, non valide dans cette régularité. On

pourrait notamment se demander si la régularité des champs de Szekeres et de leurs flots en ces points n'est pas automatiquement meilleure qu'aux points fixes paraboliques.

D'un autre côté, pour un énoncé entièrement « C^2 », il faudra également de nouvelles idées car les arguments utilisés jusqu'à présent, liés à l'interprétation de la variation asymptotique en termes de réductibilité, ne fournissent *a priori* que des déformations dans $\text{Diff}_+^{1+ac}[0, 1]$.

Une question clef dans cette perspective est la suivante :

Question 5.13. *Tout $f \in \text{Diff}_+^{2,\Delta}[0, 1]$ ayant une variation asymptotique nulle (ou, de façon équivalente, parabolique au bord avec un invariant de Mather trivial) est-il (continûment) C^2 -réductible ?*

Et plus généralement : tout $f \in \text{Diff}_+^2[0, 1]$ ayant tous ses points fixes paraboliques et se plongeant dans le flot d'un champ de vecteurs C^1 est-il (continûment) C^2 -réductible ?

Nous n'avons jusqu'à maintenant que des résultats partiels (cf. proposition 5.7 et théorème 5.8), dans lesquels nous ne savons pas si « réductible » peut être remplacé par « continûment réductible ».

Éléments distordus. Une autre question concerne un corollaire « algébrique » du théorème 5.5 et de son corollaire 5.6. Rappelons qu'un élément f d'ordre infini d'un groupe finiment engendré est dit *distordu* si la longueur de f^n pour la métrique des mots croît sous-linéairement en n . (Ceci ne dépend pas du choix du système fini de générateurs par rapport auquel la métrique des mots est définie.) Plus généralement, un élément d'un groupe quelconque est *un élément distordu* s'il est distordu dans un sous-groupe finiment engendré du groupe. Cette notion a été introduite par Gromov [Gr93] et a été récemment étudiée dans différents contextes ; voir par exemple [Ca20, CFKP18].

Si un C^1 -difféomorphisme f de $[0, 1]$ est un élément distordu de $\text{Diff}_+^1([0, 1])$, alors les extrémités de $[0, 1]$ doivent être des points fixes paraboliques de f . En effet, si l'un de ces points était hyperbolique, alors la croissance du logarithme de la dérivée des itérés de f en ce point serait linéaire ; par suite, la longueur de f^n pour la métrique des mots ne pourrait pas croître sous-linéairement pour un système générateur fini d'un groupe de C^1 -difféomorphismes contenant f . Maintenant, pour un C^2 -difféomorphisme, être un élément distordu dans $\text{Diff}_+^{1+bv}([0, 1])$ nécessite d'avoir une variation asymptotique nulle² (ce qui implique à nouveau la parabolicité des extrémités). Cela découle directement de la *propriété de sous-additivité* de $\text{var}(\log D(\cdot))$, à savoir

$$\text{var}(\log D(gh)) \leq \text{var}(\log Dg) + \text{var}(\log Dh). \quad (5.12)$$

Ainsi, le théorème 5.5, le corollaire 5.6 et sa version avec points fixes intérieurs ont pour conséquence inattendue :

2. C'est précisément ici que le nom « distorsion asymptotique » s'avérerait perturbant, un élément distordu n'ayant justement pas de distorsion asymptotique.

Corollaire 5.14. *Si $f \in \text{Diff}_+^{2;\Delta}([0, 1])$ a un invariant de Mather non trivial, alors il ne peut pas être un élément distordu de $\text{Diff}_+^{1+\text{bv}}([0, 1])$. C'est vrai plus généralement si $f \in \text{Diff}_+^2([0, 1])$ n'est pas le temps 1 du flot d'un champ de vecteurs C^1 sur $[0, 1]$.*

Andrés Navas s'est depuis servi de ce résultat dans [Na20] pour construire un C^∞ -difféomorphisme de $[0, 1]$ qui est distordu dans $\text{Diff}_+^1([0, 1])$ mais pas dans $\text{Diff}_+^2([0, 1])$, résultat qui a été amélioré dans [Di-Es20] où le difféomorphisme est en outre distordu dans $\text{Diff}_+^{1+\alpha}([0, 1])$ pour tout $\alpha < 1$.

Nous ne savons pas en revanche dans quelle mesure la réciproque de l'énoncé 5.14 est vraie (en supposant en outre les points fixes paraboliques). Tout C^2 -difféomorphisme de $[0, 1]$ qui se plonge dans un flot C^1 sans point fixe hyperbolique est-il distordu dans $\text{Diff}_+^2([0, 1])$? Et si l'on commence par supposer le flot C^2 , voire C^∞ ?

Perfection du groupe des C^2 -difféomorphismes de \mathbb{R} à support compact. Originellement, Mather a introduit son fameux invariant pour traiter la question de la perfection du groupe des C^r -difféomorphismes de \mathbb{R} à support compact, avec r entier positif ou $r = +\infty$. Il a démontré cette propriété pour tout $r \neq 2$, le cas $r = 2$ restant ouvert à ce jour. Néanmoins, des progrès ont récemment été faits dans ce domaine, et il me semble qu'il est temps de se repencher sur cette question ambitieuse.

Bibliographie

- [An–Ka70] D. V. ANOSOV et A. B. KATOK — *New examples in smooth ergodic theory. Ergodic diffeomorphisms.* Trans. Moscow Math. Soc. **23** (1970), 1–35.
- [Av–Kr22] A. AVILA et R. KRIKORIAN — Preprint.
- [Be12] M. BENHENDA — *Circle diffeomorphisms : quasi-reducibility and commuting diffeomorphisms.* Nonlinearity **25** (2012), no. 7, 1981–1995.
- [Bo–Ey16] C. BONATTI et H. EYNARD-BONTEMPS *Connectedness of the space of smooth \mathbb{Z}^n actions on the interval,* Ergodic Theory and Dynam. Systems 36 (2016), no. 7, 2076–2106. Preprint arXiv:1209.1601 (2012).
- [Bo–Fa17] C. BONATTI et É. FARINELLI — Centralizers of C^1 -contractions of the half line. (English summary) Groups Geom. Dyn. **9** (2015), no. 3, 831–889.
- [Bo–Fi94] C. BONATTI et S. FIRMO — *Feuilles compactes d’un feuilletage générique en codimension 1.* (French. English, French summary) [Compact leaves of a generic foliation in codimension 1] Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27** (1994), no. 4, 407–462.
- [Bo–Ha90] C. BONATTI et A. HAEFLIGER — *Déformations de feuilletages.* (French) [Deformations of foliations] Topology **29** (1990), no. 2, 205–229.
- [BMNR17] C. BONATTI, I. MONTEVERDE, A. NAVAS et C. RIVAS — *Rigidity for C^1 actions on the interval arising from hyperbolicity I : solvable groups.* Math Z. **286** (2017), no 3-4, 929–949.
- [BEM15] M. S. BORMAN, Y. ELIASHBERG et E. MURPHY — *Existence and classification of overtwisted contact structures in all dimensions.* Acta Math. **215** (2015), 282–361.
- [Bo16] J. BOWDEN — *Contact structures, deformations and taut foliations.* Geom. Topol. **20** (2016), no. 2, 697–746.
- [Ca20] S. CANTAT et Y. DE CORNULIER — *Distortion in Cremona groups.* Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **20** (2020), no. 2, 827–858.
- [CFKP18] V. CYR, J. FRANKS, B. KRA et S. PETITE — *Distortion and the automorphism group of a shift.* J. Mod. Dyn. **13** (2018), 147–161.
- [Di–Es20] L. DINAMARCA et M. ESCAYOLA — *Some examples of distorted interval diffeomorphisms of intermediate regularity.* Preprint (2020), arXiv :2012.00181.
- [Do71] J. R. DORROH — *Local groups of differentiable transformations.* Math. Ann. **192** (1971), 243–249.

- [El89] Y. ELIASHBERG — *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*. Invent. Math. **98** (1989), 623–637.
- [El–Mi02] Y. ELIASHBERG et N. MISHACHEV — *Introduction to the h-Principle*. Graduate Studies in Math. **48** (2002).
- [El–Mi98] Y. ELIASHBERG et N. MISHACHEV — *Wrinkling of smooth mappings. III. Foliations of codimension greater than one*. Topol. Methods Nonlinear Anal. **11** no. 2 (1998), 321–350.
- [Ey09] H. EYNARD-BONTEMPS — *Sur deux questions de connexité concernant les feuilletages et leurs holonomies*. Thèse ENS Lyon 2009. <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00436304/fr/>
- [Ey11] H. EYNARD — *On the centralizer of diffeomorphisms of the half-line*. Comment. Math. Helv., **86** (2011), no.2, 415–435.
- [Ey11'] H. EYNARD-BONTEMPS — *A connectedness result for commuting diffeomorphisms of the interval*, Ergodic Theory and Dynam. Systems 31 (2011), no. 4, 1183–1191. Preprint : arXiv:0912.1464 (2009).
- [Ey-prep] H. EYNARD-BONTEMPS — *Arithmetic properties of centralizers of diffeomorphisms of the half-line*. ArXiv :1011.3454.
- [Ey16] H. EYNARD-BONTEMPS — *On the connectedness of the space of codimension one foliations on a closed 3-manifold*, Invent. Math. 204 (2016), no. 2, 605–670. Preprint : arXiv:1404.5884 (2014).
- [Ey19] H. EYNARD-BONTEMPS — *Smooth times of a flow in dimension one*, à paraître aux Annales scientifiques de l'ENS, Preprint : arxiv :1905.07582 (2019).
- [Ey–Na19] H. EYNARD-BONTEMPS et A. NAVAS — *Mather invariant, distortion, and conjugates for diffeomorphisms of the interval*, Journal of Functional Analysis, Volume 281, Issue 9 (2021). Preprint : arxiv:1912.09305 (2019).
- [Ey–Na21] H. EYNARD-BONTEMPS et A. NAVAS — *Arc-connectedness for the space of smooth \mathbb{Z}^d -actions on 1-dimensional manifolds*, arxiv :2103.06940 (2021).
- [Fa–Kh09] B. FAYAD et K. KHANIN — *Smooth linearization of commuting circle diffeomorphisms*. Ann. of Math. (2) **170** (2009), no. 2, 961–980.
- [Fa–Ka05] B. FAYAD et A. B. KATOK — *Constructions in elliptic dynamics*. Ergodic Theory Dynam. Systems **24** (2005), no. 5, 1477–1520.
- [Ge08] H. GEIGES — *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge studies in advanced mathematics **109** (2008).
- [Gol98] W. GOLDMAN — *Topological components of spaces of representations*. Invent. Math. **93** no 3 (1998), 557–607.
- [Goo75] S. GOODMAN — *Closed leaves in foliations of codimension one*. Comment. Math. Helvetici **50** (1975), 383–388.
- [Gr93] M. GROMOV — *Asymptotic invariants of infinite groups*, from Geometric group theory, Vol. 2, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **182**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993), 1–295.

- [Ha82] D. HART — *The generator of a C^r flow*. Dynamical systems, II (Gainesville, Fla., 1981), Academic Press, New York-London (1982), 547–553.
- [Ha83] D. HART — *On the smoothness of generators*. Topology **22** (1983), n. 3, 357–363
- [He71] M. R. HERMAN — *Simplicité du groupe des difféomorphismes de classe C^∞ , isotopes à l'identité, du tore de dimension n* . (French) C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **273** 1971 A232–A234. .
- [He79] M. R. HERMAN — *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **49** (1979), 5–233.
- [Ho76] L. HÖRMANDER — *The boundary problems of physical geodesy*. Arch. for rat. mec. and an. **62** (1976), 1–52.
- [Ko68] N. KOPELL — *Commuting diffeomorphisms*. In *Global Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math. XIV, Amer. Math. Soc. (1968), 165–184.
- [La07] A. LARCANCHÉ — *Topologie locale des espaces de feuilletages en surfaces des variétés fermées de dimension 3*. Comment. Math. Helvetici **82** (2007), 385–411.
- [Li65] W. B. R. LICKORISH — *A foliation for 3-manifolds*. Ann. of Math. (2) **82** (1965), 414–420.
- [Man15] K. MANN — *Spaces of surface group representations*. . Invent. Math. **201** (2015), no. 2, 669–710.
- [Mat85] J. N. MATHER — *Commutators of diffeomorphisms, III : a group which is not perfect*. Commentarii Mathematici Helvetici **60** (1985), 122–124.
- [Me17] G. MEIGNIEZ — *Regularization and minimization of codimension-one Haefliger structures*. J. Differential Geom. **107** (2017), no. 1, 157–202.
- [Na11] A. NAVAS — *Groups of circle diffeomorphisms* (chapter 4). Translation of the 2007 Spanish edition. Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 2011.
- [Na14] A. NAVAS — *Sur les rapprochements par conjugaison en dimension 1 et classe C^1* . Compositio Math. **150** (2014), 1183–1195.
- [Na18] A. NAVAS — *On conjugates and the asymptotic distortion of 1-dimensional C^{1+bv} diffeomorphisms*. Preprint (2018), arXiv :1811.06077.
- [Na-Po19] A. NAVAS et M. PONCE — *On the projective derivative cocycle and conjugates of C^2 circle diffeomorphisms*. Preprint (2019).
- [Na20] A. NAVAS — (Un)distorted diffeomorphisms in different regularities. To appear in *Israel J. of Math.*, arXiv :2004.07055.
- [No67] S. P. NOVIKOV — *Topology of foliations*. Trans. Moscow Math. Soc. **14** (1965), 248–278 (Russian), A.M.S Translation (1967), 268–304.
- [Ph67] A. PHILLIPS — *Submersions of open manifolds*. Topology **6** (1967), 171–206.
- [Pl-Th76] J. F. PLANTE et W. P. THURSTON — *Polynomial growth in holonomy groups of foliations*. Comm. Math. Helv. **51** (1976), no. 4, 567–584.

- [Re52] G. REEB — *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*. Actual. Sci. Ind. **1183**, Hermann, Paris (1952).
- [Sc95] P. SCHWEITZER — *Codimension one foliations without compact leaves*. Comm. Math. Helv. **70** (1995), 171–209.
- [Se77] F. SERGERAERT — *Feuilletages et difféomorphismes infiniment tangents à l'identité*. Invent. Math. **39** (1977), 253–275.
- [Sz58] G. SZEKERES — *Regular iteration of real and complex functions*. Acta Math. **100** (1958), 203–258.
- [Ta73] F. TAKENS — *Normal forms for certain singularities of vector fields*. Ann. Inst. Fourier **23** (1973), 163–195.
- [Th67] W. P. THURSTON — *Foliations of Three-Manifolds Which are Circle Bundles*. Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley (1967).
- [Th73] W. P. THURSTON — *A local construction of foliations for three-manifolds*. Differential topology (Proc. Sympos. Pure Math. **27**, Stanford Univ., California, 1973), Amer. Math. Soc. (1975), 315–319.
- [Th74] W. P. THURSTON — *The theory of foliations of codimension greater than one*. Comm. Math. Helv. **49** (1974), 214–231.
- [Th76] W. P. THURSTON — *Existence of codimension-one foliations*. Ann. of Math. (2) **104** (1976), no. 2, 249–268.
- [Vo16] T. VOGEL — *Uniqueness of the contact structure approximating a foliation*. Geom. Topol. **20** (2016), no. 5, 2439–2573.
- [Wo69] J. WOOD — *Foliations on 3-manifolds*. Ann. of Math. **89** (1969), 336–358.
- [Yo84] J-C. YOCCOZ — *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **17** (1984), 333–359.
- [Yo95] J-C. YOCCOZ — *Centralisateurs et conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle*. Astérisque 231.

Résumé

Les actions de \mathbb{Z}^2 sur l'intervalle jouent un rôle clef dans l'étude des feuilletages de codimension 1 sur les variétés de dimension 3 et de leurs déformations. L'intégralité de ce mémoire est motivée par la question de la connexité (par arcs) de l'espace des actions de \mathbb{Z}^2 sur le segment, en différentes régularités. On commence par construire des difféomorphismes aux centralisateurs « exotiques », qui sont de potentiels obstacles à la preuve de cette connexité. On montre ensuite qu'il existe toutefois des contraintes sur la forme que peut prendre un tel centralisateur. Toujours grâce à une étude fine des centralisateurs, on démontre la connexité (tout court) recherchée en régularité C^∞ , et on explique pourquoi la connexité par arcs demeure hors de portée. On s'intéresse ensuite à la régularité C^2 avec des méthodes fondamentalement différentes, basées sur la notion récente de *variation asymptotique*.