Habilitation à diriger des recherches
Théorie des représentations et algèbre homologique

Estanislao HERSCOVICH

Université Grenoble Alpes
Institut Fourier, Gières, FRANCE

1er décembre 2017

Le point de départ : les algèbres de Yang-Mills

(i) Les *algèbres de Yang-Mills* $\mathrm{YM}(n)$ ont été introduites par A. Connes et M. Dubois-Violette en 2002.

Le point de départ : les algèbres de Yang-Mills

(i) Les algèbres de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ ont été introduites par A. Connes et M. Dubois-Violette en 2002. $\rightsquigarrow$ Elles modèlent les éq. de Euler-Lagrange de la théorie de jauge en physique.

Le point de départ : les algèbres de Yang-Mills

(i) Les algèbres de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ ont été introduites par A. Connes et M. Dubois-Violette en 2002.

(ii) Dans mon Doctorat ('06-'08), j'ai étudié les propriétés algébriques et homologiques de $\mathrm{YM}(n)$.

Le point de départ : les algèbres de Yang-Mills

(i) Les algèbres de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ ont été introduites par A. Connes et M. Dubois-Violette en 2002.

(ii) Dans mon Doctorat ('06-'08), j'ai étudié les propriétés algébriques et homologiques de $\mathrm{YM}(n)$. $\rightsquigarrow$ L'application de Dixmier-Duflo des alg. de Lie nilpotentes.

Le point de départ : les algèbres de Yang-Mills

(i) Les algèbres de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ ont été introduites par A. Connes et M. Dubois-Violette en 2002.

(ii) Dans mon Doctorat ('06-'08), j'ai étudié les propriétés algébriques et homologiques de $\mathrm{YM}(n)$. $\rightsquigarrow$ La théorie des algèbres de Koszul généralisées (R. Berger, '01 ; E. Green, E. Marcos, R. Martínez-Villa, P. Zhang, '04)

Le point de départ : les algèbres de Yang-Mills

(i) Les algèbres de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ ont été introduites par A. Connes et M. Dubois-Violette en 2002.

(ii) Dans mon Doctorat ('06-'08), j'ai étudié les propriétés algébriques et homologiques de $\mathrm{YM}(n)$.

(iii) Il existe une généralisation super symétrique de $\mathrm{YM}(n)$:

Le point de départ : les algèbres de Yang-Mills

(i) Les algèbres de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ ont été introduites par A. Connes et M. Dubois-Violette en 2002.

(ii) Dans mon Doctorat ('06-'08), j'ai étudié les propriétés algébriques et homologiques de $\mathrm{YM}(n)$.

(iii) Il existe une généralisation super symétrique de $\mathrm{YM}(n)$: les *algèbres de Yang-Mills super symétriques* $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma} = k\langle x_i, z_a : i = 1, \dots, n; a = 1, \dots, s\rangle / \langle R(n,s)^{\Gamma}\rangle$ (M. Movshev, A. Schwarz, '06).

Le point de départ : les algèbres de Yang-Mills

(i) Les algèbres de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ ont été introduites par A. Connes et M. Dubois-Violette en 2002.

(ii) Dans mon Doctorat ('06-'08), j'ai étudié les propriétés algébriques et homologiques de $\mathrm{YM}(n)$.

(iii) Il existe une généralisation super symétrique de $\mathrm{YM}(n)$: les algèbres de Yang-Mills super symétriques $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma} = k\langle x_i, z_a : i = 1, \dots, n; a = 1, \dots, s\rangle / \langle R(n,s)^{\Gamma}\rangle$ (M. Movshev, A. Schwarz, '06), où $R(n,s)^{\Gamma} \subseteq k\langle x_i, z_a : i = 1, \dots, n; a = 1, \dots, s\rangle$ est engendré par

$$r_{0,i} = \sum_{j=1}^{n} [x_j, [x_j, x_i]] - \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^{s} \Gamma^{i}_{a,b} [z_a, z_b],$$

$$r_{1,a} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{b=1}^{s} \Gamma^{i}_{a,b} [x_i, z_b].$$

Le point de départ : les algèbres de Yang-Mills

(i) Les algèbres de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ ont été introduites par A. Connes et M. Dubois-Violette en 2002.

(ii) Dans mon Doctorat ('06-'08), j'ai étudié les propriétés algébriques et homologiques de $\mathrm{YM}(n)$.

(iii) Il existe une généralisation super symétrique de $\mathrm{YM}(n)$: les algèbres de Yang-Mills super symétriques $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma} = k\langle x_i, z_a : i = 1, \dots, n; a = 1, \dots, s\rangle / \langle R(n,s)^{\Gamma}\rangle$ (M. Movshev, A. Schwarz, '06). $\rightsquigarrow$ Les propriétés algébriques et homologiques de $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$?

Le point de départ : les algèbres de Yang-Mills

(i) Les algèbres de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ ont été introduites par A. Connes et M. Dubois-Violette en 2002.

(ii) Dans mon Doctorat ('06-'08), j'ai étudié les propriétés algébriques et homologiques de $\mathrm{YM}(n)$.

(iii) Il existe une généralisation super symétrique de $\mathrm{YM}(n)$: les algèbres de Yang-Mills super symétriques $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma} = k\langle x_i, z_a : i = 1, \dots, n; a = 1, \dots, s\rangle / \langle R(n,s)^{\Gamma}\rangle$ (M. Movshev, A. Schwarz, '06).

$\rightsquigarrow$ Application de Dixmier-Duflo pour les super alg. de Lie nilpotentes ?

Le point de départ : les algèbres de Yang-Mills

(i) Les algèbres de Yang-Mills $\mathrm{YM}(n)$ ont été introduites par A. Connes et M. Dubois-Violette en 2002.

(ii) Dans mon Doctorat ('06-'08), j'ai étudié les propriétés algébriques et homologiques de $\mathrm{YM}(n)$.

(iii) Il existe une généralisation super symétrique de $\mathrm{YM}(n)$: les algèbres de Yang-Mills super symétriques $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma} = k\langle x_i, z_a : i = 1, \dots, n; a = 1, \dots, s\rangle / \langle R(n,s)^{\Gamma}\rangle$ (M. Movshev, A. Schwarz, '06).

$\leadsto$ Application de Dixmier-Duflo pour les super alg. de Lie nilpotentes ?

$\leadsto$ Théorie de Koszul des algèbres non homogènes ? (R. Berger, '11)

L'application de Dixmier-Duflo pour les super alg. de Lie nilpotentes et les algèbres de Yang-Mills super symétriques (I)

Proposition 1 (H.)

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ *une super algèbre de Lie nilpotente et* $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathfrak{g}} \simeq \mathfrak{g}_0^*$ *une fonctionnelle linéaire paire. Il existe une application bijective (explicite)*

$$I : \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}/\mathrm{Ad}_0 \to \mathrm{Prim}\big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\big).$$

L'application de Dixmier-Duflo pour les super alg. de Lie nilpotentes et les algèbres de Yang-Mills super symétriques (I)

Proposition 1 (H.)

Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ *une super algèbre de Lie nilpotente et* $\lambda \in \mathcal{L}_{\mathfrak{g}} \simeq \mathfrak{g}_0^*$ *une fonctionnelle linéaire paire. Il existe une application bijective (explicite)*

$$I : \mathcal{L}_{\mathfrak{g}}/\mathrm{Ad}_0 \to \mathrm{Prim}\big(\mathcal{U}(\mathfrak{g})\big).$$

En plus, $\mathcal{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda) \simeq \mathrm{Cliff}_q(k) \otimes A_p(k)$*, où* $(p,q) = \mathrm{sdim}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ *est la super dimension de* $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$*,* $\mathfrak{h}$ *est n'importe quelle polarisation de* $\mathfrak{g}$ *en* λ*,* $\mathrm{Cliff}_q(k)$ *dénote la super algèbre de Clifford et* $A_p(k)$ *est l'algèbre de Weyl.*

L'application de Dixmier-Duflo pour les super alg. de Lie nilpotentes et les algèbres de Yang-Mills super symétriques (II)

Théorème 1 (H.)

Soient $n, s, p, q \in \mathbb{N}$ *tels que* $n \geq 3$ *et* $s \geq 1$. *On suppose en plus que* $p \geq 3$, *ou* $p = 2$ *et* $q \geq 2$. *Alors, il existe un homomorphisme surjectif de super algèbres*

$$\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma} \twoheadrightarrow \mathrm{Cliff}_q(k) \otimes A_p(k).$$

L'application de Dixmier-Duflo pour les super alg. de Lie nilpotentes et les algèbres de Yang-Mills super symétriques (II)

Théorème 1 (H.)

Soient $n, s, p, q \in \mathbb{N}$ *tels que* $n \geq 3$ *et* $s \geq 1$. *On suppose en plus que* $p \geq 3$, *ou* $p = 2$ *et* $q \geq 2$. *Alors, il existe un homomorphisme surjectif de super algèbres*

$$\mathrm{YM}(n, s)^{\Gamma} \twoheadrightarrow \underbrace{\mathrm{Cliff}_q(k) \otimes A_p(k)}.$$

Alg. des op. diff. sur $\mathbb{A}(p|q')$, *si* $q = 2q'$.

Une généralisation de la propriété de Koszul (I)

Soient k un corps, $s \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, et $\phi_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\phi_s(2j) = sj$, $\phi_s(2j+1) = sj + 1$.

Une généralisation de la propriété de Koszul (I)

Soient k un corps, $s \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, et $\phi_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\phi_s(2j) = sj$, $\phi_s(2j+1) = sj + 1$. On rappelle qu'une algèbre s-homogène $A = T(V)/\langle R \rangle$ ($R \subseteq V^{\otimes s}$) est *de Koszul généralisée* si la résolution projective minimale

$$P_n \xrightarrow{d_n} P_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} {}_A k$$

Une généralisation de la propriété de Koszul (I)

Soient k un corps, $s \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, et $\phi_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\phi_s(2j) = sj$, $\phi_s(2j+1) = sj+1$. On rappelle qu'une algèbre s-homogène $A = T(V)/\langle R \rangle$ ($R \subseteq V^{\otimes s}$) est de Koszul généralisée si la résolution projective minimale

$$\underbrace{P_n}_{A \otimes J_n \hookrightarrow} \xrightarrow{d_n} \underbrace{P_{n-1}}_{A \otimes J_{n-1} \hookrightarrow} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} \underbrace{P_0}_{A \otimes J_0 \hookrightarrow} \xrightarrow{d_0} {}_A k$$

est telle que J_n soit concentré en degré $\phi_s(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une généralisation de la propriété de Koszul (I)

Soient k un corps, $s \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, et $\phi_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\phi_s(2j) = sj$, $\phi_s(2j+1) = sj+1$. On rappelle qu'une algèbre s-homogène $A = T(V)/\langle R \rangle$ ($R \subseteq V^{\otimes s}$) est de Koszul généralisée si la résolution projective minimale

$$\underbrace{P_n}_{A \otimes J_n \hookrightarrow} \xrightarrow{d_n} \underbrace{P_{n-1}}_{A \otimes J_{n-1} \hookrightarrow} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_1} \underbrace{P_0}_{A \otimes J_0 \hookrightarrow} \xrightarrow{d_0} {}_A k$$

est telle que J_n soit concentré en degré $\phi_s(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\leadsto$ En général on a considéré le degré de J_n pour étudier l'extension de cette propriété aux algèbres graduées qcq.

Une généralisation de la propriété de Koszul (I)

Soient k un corps, $s \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, et $\phi_s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ donnée par $\phi_s(2j) = sj$, $\phi_s(2j+1) = sj + 1$. On rappelle qu'une algèbre s-homogène $A = T(V)/\langle R \rangle$ ($R \subseteq V^{\otimes s}$) est de Koszul généralisée si la résolution projective minimale

$$\begin{tikzcd}
P_n \arrow[r, "d_n"] & P_{n-1} \arrow[r, "d_{n-1}"] & \dots \arrow[r, "d_1"] & P_0 \arrow[r, "d_0"] & {}_A k \\
A \otimes J_n \arrow[u, hook] & A \otimes J_{n-1} \arrow[u, hook] & & A \otimes J_0 \arrow[u, hook] &
\end{tikzcd}$$

est telle que J_n soit concentré en degré $\phi_s(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\rightsquigarrow$ En général on a considéré le degré de J_n pour étudier l'extension de cette propriété aux algèbres graduées qcq.

$\rightsquigarrow$ Problèmes !

Une généralisation de la propriété de Koszul (II)

Soient $B = k\langle x, y, z\rangle/\langle x^2y, z^2x\rangle$ et $C = k\langle u\rangle/\langle u^4\rangle$.

Une généralisation de la propriété de Koszul (II)

Soient $B = k\langle x, y, z\rangle/\langle x^2y, z^2x\rangle$ et $C = k\langle u\rangle/\langle u^4\rangle$.

$\rightsquigarrow$ C est 4-Koszul.

Une généralisation de la propriété de Koszul (II)

Soient $B = k\langle x, y, z\rangle/\langle x^2y, z^2x\rangle$ et $C = k\langle u\rangle/\langle u^4\rangle$.

Mais B n'est pas 3-Koszul, puisque

$$0 \to B \otimes W' \to B \otimes R' \to B \otimes V' \to B \to {}_B k \to 0,$$

avec $V' = k.x \oplus k.y \oplus k.z$, $R = k.x^2y \oplus k.z^2x$ et $W' = k.z^2x^2y$.

Une généralisation de la propriété de Koszul (II)

Soient $B = k\langle x, y, z\rangle/\langle x^2y, z^2x\rangle$ et $C = k\langle u\rangle/\langle u^4\rangle$.
Soit $A = B *_k C$, *i.e.* $A = k\langle x, y, z, u\rangle/\langle x^2y, z^2x, u^4\rangle$.

Une généralisation de la propriété de Koszul (II)

Soient $B = k\langle x, y, z\rangle/\langle x^2y, z^2x\rangle$ et $C = k\langle u\rangle/\langle u^4\rangle$.
Soit $A = B *_k C$, *i.e.* $A = k\langle x, y, z, u\rangle/\langle x^2y, z^2x, u^4\rangle$.
Alors,

$$\cdots \to \underbrace{A \otimes k.u^{\phi_4(i)}}_{P_i} \to \cdots \to \underbrace{A \otimes k.u^8}_{P_4} \to \underbrace{A \otimes W}_{P_3}$$
$$\to \underbrace{A \otimes R}_{P_2} \to \underbrace{A \otimes V}_{P_1} \to \underbrace{A}_{P_0} \to {}_A k \to 0,$$

où $V = k.x \oplus k.y \oplus k.z \oplus k.u$, $R = k.x^2y \oplus k.z^2x \oplus k.u^4$,
$W = k.z^2x^2y \oplus k.u^5$.

Une généralisation de la propriété de Koszul (II)

Soient $B = k\langle x,y,z\rangle/\langle x^2y, z^2x\rangle$ et $C = k\langle u\rangle/\langle u^4\rangle$.
Soit $A = B *_k C$, *i.e.* $A = k\langle x,y,z,u\rangle/\langle x^2y, z^2x, u^4\rangle$.
Alors,

$$\cdots \to \underbrace{A \otimes k.u^{\phi_4(i)}}_{P_i} \to \cdots \to \underbrace{A \otimes k.u^8}_{P_4} \to \underbrace{A \otimes W}_{P_3}$$
$$\to \underbrace{A \otimes R}_{P_2} \to \underbrace{A \otimes V}_{P_1} \to \underbrace{A}_{P_0} \to {}_A k \to 0.$$

Cela implique que J_n est engendré en degrés $\phi_3(n)$ et $\phi_4(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une généralisation de la propriété de Koszul (II)

Soient $B = k\langle x, y, z\rangle / \langle x^2 y, z^2 x\rangle$ et $C = k\langle u\rangle / \langle u^4\rangle$.
Soit $A = B *_k C$, *i.e.* $A = k\langle x, y, z, u\rangle / \langle x^2 y, z^2 x, u^4\rangle$.
Alors,

$$\cdots \to \underbrace{A \otimes k.u^{\phi_4(i)}}_{P_i} \to \cdots \to \underbrace{A \otimes k.u^8}_{P_4} \to \underbrace{A \otimes W}_{P_3}$$
$$\to \underbrace{A \otimes R}_{P_2} \to \underbrace{A \otimes V}_{P_1} \to \underbrace{A}_{P_0} \to {}_A k \to 0.$$

Cela implique que J_n est engendré en degrés $\phi_3(n)$ et $\phi_4(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\leadsto$ Mais A hérite les mauvaises propriétés de B !

Une généralisation de la propriété de Koszul (II)

Soient $B = k\langle x, y, z\rangle/\langle x^2y, z^2x\rangle$ et $C = k\langle u\rangle/\langle u^4\rangle$.
Soit $A = B *_k C$, *i.e.* $A = k\langle x, y, z, u\rangle/\langle x^2y, z^2x, u^4\rangle$.
Alors,

$$\cdots \to \underbrace{A \otimes k.u^{\phi_4(i)}}_{P_i} \to \cdots \to \underbrace{A \otimes k.u^8}_{P_4} \to \underbrace{A \otimes W}_{P_3}$$

$$\to \underbrace{A \otimes R}_{P_2} \to \underbrace{A \otimes V}_{P_1} \to \underbrace{A}_{P_0} \to {}_A k \to 0.$$

Cela implique que J_n est engendré en degrés $\phi_3(n)$ et $\phi_4(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
$\rightsquigarrow$ Idée : il faut contrôler les espaces gradués J_n !

Une généralisation de la propriété de Koszul (III)

Soit $A = T(V)/\langle R \rangle$ une alg. graduée positivement et connexe.

Une généralisation de la propriété de Koszul (III)

Soit $A = T(V)/\langle R\rangle$ une alg. graduée positivement et connexe.

(i) On pose $J_0 = k$ et $J_{2(i+1)}$ donné par

$$R^{(i+1)} \cap \left(\sum_{N \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{\substack{\bar{n} \in \mathrm{Par}(i) \\ \bar{m} \in \mathrm{Par}_{i+1}(N)}} V^{(m_1)}.J_{2n_1} \dots V^{(m_i)}.J_{2n_i}.V^{(m_{i+1})} \right) \right).$$

Une généralisation de la propriété de Koszul (III)

Soit $A = T(V)/\langle R \rangle$ une alg. graduée positivement et connexe.

(i) On pose $J_0 = k$ et $J_{2(i+1)}$ donné par

$$R^{(i+1)} \cap \left(\sum_{N \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{\substack{\bar{n} \in \mathrm{Par}(i) \\ \bar{m} \in \mathrm{Par}_{i+1}(N)}} V^{(m_1)}.J_{2n_1} \dots V^{(m_i)}.J_{2n_i}.V^{(m_{i+1})} \right) \right).$$

(ii) On définit

$$J_{2i+1} = \big(V.J_{2i}\big) \cap \big(J_{2i}.V\big).$$

Une généralisation de la propriété de Koszul (III)

Soit $A = T(V)/\langle R \rangle$ une alg. graduée positivement et connexe.

(i) On pose $J_0 = k$ et $J_{2(i+1)}$ donné par

$$R^{(i+1)} \cap \left(\sum_{N \in \mathbb{N}^*} \left(\bigcap_{\substack{\bar{n} \in \mathrm{Par}(i) \\ \bar{m} \in \mathrm{Par}_{i+1}(N)}} V^{(m_1)}.J_{2n_1} \dots V^{(m_i)}.J_{2n_i}.V^{(m_{i+1})} \right) \right).$$

(ii) On définit

$$J_{2i+1} = \big(V.J_{2i}\big) \cap \big(J_{2i}.V\big).$$

On dit que A est *multi-Koszul* si $\mathrm{Tor}_n^A(k,k) \simeq J_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Une généralisation de la propriété de Koszul (IV)

Propriétés des algèbres multi-Koszul A ([H.]) :

Une généralisation de la propriété de Koszul (IV)

Propriétés des algèbres multi-Koszul A ([H.]) :

(i) Une algèbre homogène est de Koszul généralisée si et seulement si elle est multi-Koszul ;

Une généralisation de la propriété de Koszul (IV)

Propriétés des algèbres multi-Koszul A ([H.]) :

(i) Une algèbre homogène est de Koszul généralisée si et seulement si elle est multi-Koszul ;

(ii) Les algèbres $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ sont multi-Koszul ;

Une généralisation de la propriété de Koszul (IV)

Propriétés des algèbres multi-Koszul A ([H.]) :

(i) Une algèbre homogène est de Koszul généralisée si et seulement si elle est multi-Koszul ;

(ii) Les algèbres $\mathrm{YM}(n, s)^\Gamma$ sont multi-Koszul ;

(iii) Il existe une description explicite de la rés. proj minimale de ${}_A k$, de k_A et de ${}_A A_A$;

Une généralisation de la propriété de Koszul (IV)

Propriétés des algèbres multi-Koszul A ([H.]) :

(i) Une algèbre homogène est de Koszul généralisée si et seulement si elle est multi-Koszul ;

(ii) Les algèbres $\mathrm{YM}(n,s)^{\Gamma}$ sont multi-Koszul ;

(iii) Il existe une description explicite de la rés. proj minimale de ${}_Ak$, de k_A et de ${}_AA_A$;

(iv) L'algèbre de Yoneda $\mathcal{E}xt^{\bullet}_A(k,k)$ est engendré en degré 1 et 2 ;

Une généralisation de la propriété de Koszul (IV)

Propriétés des algèbres multi-Koszul A ([H.]) :

(i) Une algèbre homogène est de Koszul généralisée si et seulement si elle est multi-Koszul ;

(ii) Les algèbres $\mathrm{YM}(n, s)^{\Gamma}$ sont multi-Koszul ;

(iii) Il existe une description explicite de la rés. proj minimale de ${}_{A}k$, de k_A et de ${}_{A}A_{A}$;

(iv) L'algèbre de Yoneda $\mathcal{E}xt^{\bullet}_{A}(k, k)$ est engendré en degré 1 et 2 ;

(v) Il existe une description explicite de la structure d'A_{∞}-algèbre de $\mathcal{E}xt^{\bullet}_{A}(k, k)$;

Une généralisation de la propriété de Koszul (IV)

Propriétés des algèbres multi-Koszul A ([H.]) :

(i) Une algèbre homogène est de Koszul généralisée si et seulement si elle est multi-Koszul ;

(ii) Les algèbres $\mathrm{YM}(n, s)^{\Gamma}$ sont multi-Koszul ;

(iii) Il existe une description explicite de la rés. proj minimale de ${}_Ak$, de k_A et de ${}_AA_A$;

(iv) L'algèbre de Yoneda $\mathcal{E}xt^{\bullet}_A(k, k)$ est engendré en degré 1 et 2 ;

(v) Il existe une description explicite de la structure d'A_∞-algèbre de $\mathcal{E}xt^{\bullet}_A(k, k)$;

$\rightsquigarrow$ Cela généralise des résultats de J.-W. He et D.-M. Lu.

Une généralisation de la propriété de Koszul (IV)

Propriétés des algèbres multi-Koszul A ([H.]) :

(i) Une algèbre homogène est de Koszul généralisée si et seulement si elle est multi-Koszul ;

(ii) Les algèbres $\mathrm{YM}(n, s)^{\Gamma}$ sont multi-Koszul ;

(iii) Il existe une description explicite de la rés. proj minimale de ${}_A k$, de k_A et de ${}_A A_A$;

(iv) L'algèbre de Yoneda $\mathcal{E}xt^{\bullet}_A(k, k)$ est engendré en degré 1 et 2 ;

(v) Il existe une description explicite de la structure d'A_{∞}-algèbre de $\mathcal{E}xt^{\bullet}_A(k, k)$;

$\rightsquigarrow$ Et la (co)homologie de Hochschild des alg. multi-Koszul ? (R. Buchweitz, '12)

La (co)homologie de Hochschild à partir de la théorie de la torsion (I)

Soit k un corps et (Λ, d_Λ) une alg. diff. graduée augm (adga).

(i) Un *élément de Maurer-Cartan* est $a \in \Lambda^1$ tel que $d_\Lambda(a) + a^2 = 0$.

La (co)homologie de Hochschild à partir de la théorie de la torsion (I)

Soit k un corps et (Λ, d_Λ) une alg. diff. graduée augm (adga).

(i) Un élément de Maurer-Cartan est $a \in \Lambda^1$ tel que $d_\Lambda(a) + a^2 = 0$.

(ii) L'adga *tordue* $(\Lambda, d_{\Lambda,a})$ est donnée par $d_{\Lambda,a} = d_\Lambda + \mathrm{ad}(a)$.

$\rightsquigarrow$ On ne change pas la structure algébrique.

La (co)homologie de Hochschild à partir de la théorie de la torsion (I)

Soit k un corps et (Λ, d_Λ) une alg. diff. graduée augm (adga).

(i) Un élément de Maurer-Cartan est $a \in \Lambda^1$ tel que $d_\Lambda(a) + a^2 = 0$.

(ii) L'adga *tordue* $(\Lambda, d_{\Lambda,a})$ est donnée par $d_{\Lambda,a} = d_\Lambda + \mathrm{ad}(a)$.

(iii) Étant donné une adga A et une cdgc C, on pose $\Lambda = \mathcal{H}om(C, A)$ l'adga avec le produit de convolution.

La (co)homologie de Hochschild à partir de la théorie de la torsion (I)

Soit k un corps et (Λ, d_Λ) une alg. diff. graduée augm (adga).

(i) Un élément de Maurer-Cartan est $a \in \Lambda^1$ tel que $d_\Lambda(a) + a^2 = 0$.

(ii) L'adga *tordue* $(\Lambda, d_{\Lambda,a})$ est donnée par $d_{\Lambda,a} = d_\Lambda + \mathrm{ad}(a)$.

(iii) Étant donné une adga A et une cdgc C, on pose $\Lambda = \mathcal{H}om(C, A)$ l'adga avec le produit de convolution. Une *cochaine tordante* τ est un élément de M-C de Λ qui satisfait que $\epsilon_A \circ \tau = \tau \circ \eta_C = 0$. On écrit $\Lambda_\tau = \mathcal{H}om^\tau(C, A)$.

La (co)homologie de Hochschild à partir de la théorie de la torsion (I)

Soit k un corps et (Λ, d_Λ) une alg. diff. graduée augm (adga).

(i) Un élément de Maurer-Cartan est $a \in \Lambda^1$ tel que $d_\Lambda(a) + a^2 = 0$.

(ii) L'adga *tordue* $(\Lambda, d_{\Lambda,a})$ est donnée par $d_{\Lambda,a} = d_\Lambda + \mathrm{ad}(a)$.

(iii) Étant donné une adga A et une cdgc C, on pose $\Lambda = \mathcal{H}om(C, A)$ l'adga avec le produit de convolution.

(iv) Si M est un A-bimodule dg, $M \otimes C$ est un bimodule dg sur Λ :

$$\phi \cdot (m \otimes c) \cdot \psi = \pm \phi(c_{(3)}).m.\psi(c_{(1)}) \otimes c_{(2)}.$$

La (co)homologie de Hochschild à partir de la théorie de la torsion (I)

Soit k un corps et (Λ, d_Λ) une alg. diff. graduée augm (adga).

(i) Un élément de Maurer-Cartan est $a \in \Lambda^1$ tel que $d_\Lambda(a) + a^2 = 0$.

(ii) L'adga *tordue* $(\Lambda, d_{\Lambda,a})$ est donnée par $d_{\Lambda,a} = d_\Lambda + \mathrm{ad}(a)$.

(iii) Étant donné une adga A et une cdgc C, on pose $\Lambda = \mathcal{H}om(C, A)$ l'adga avec le produit de convolution.

(iv) Si M est un A-bimodule dg, $M \otimes C$ est un bimodule dg sur Λ :

$$\phi \cdot (m \otimes c) \cdot \psi = \pm \phi(c_{(3)}).m.\psi(c_{(1)}) \otimes c_{(2)}.$$

$\rightsquigarrow$ La torsion du $M \otimes C$ sera dénotée par $M \otimes_\tau C$.

La (co)homologie de Hochschild à partir de la théorie de la torsion (I)

Soit k un corps et (Λ, d_Λ) une alg. diff. graduée augm (adga).

(i) Un élément de Maurer-Cartan est $a \in \Lambda^1$ tel que $d_\Lambda(a) + a^2 = 0$.

(ii) L'adga *tordue* $(\Lambda, d_{\Lambda,a})$ est donnée par $d_{\Lambda,a} = d_\Lambda + \mathrm{ad}(a)$.

(iii) Étant donné une adga A et une cdgc C, on pose $\Lambda = \mathcal{H}om(C, A)$ l'adga avec le produit de convolution.

(iv) Si M est un A-bimodule dg, $M \otimes C$ est un bimodule dg sur Λ :

$$\phi \cdot (m \otimes c) \cdot \psi = \pm \phi(c_{(3)}).m.\psi(c_{(1)}) \otimes c_{(2)}.$$

(v) Étant donné une adga A, il existe une cdgc $B^+(A) = T(I_A[1])$ $(I_A = \mathrm{Ker}(\epsilon_A))$ et une cochaine tordante $\tau_A : B^+(A) \to A$ *universelle*.

La (co)homologie de Hochschild à partir de la théorie de la torsion (I)

Soit k un corps et (Λ, d_Λ) une alg. diff. graduée augm (adga).

(i) Un élément de Maurer-Cartan est $a \in \Lambda^1$ tel que $d_\Lambda(a) + a^2 = 0$.

(ii) L'adga *tordue* $(\Lambda, d_{\Lambda,a})$ est donnée par $d_{\Lambda,a} = d_\Lambda + \mathrm{ad}(a)$.

(iii) Étant donné une adga A et une cdgc C, on pose $\Lambda = \mathcal{H}om(C, A)$ l'adga avec le produit de convolution.

(iv) Si M est un A-bimodule dg, $M \otimes C$ est un bimodule dg sur Λ :

$$\phi \cdot (m \otimes c) \cdot \psi = \pm \phi(c_{(3)}).m.\psi(c_{(1)}) \otimes c_{(2)}.$$

(v) Étant donné une adga A, il existe une cdgc $B^+(A) = T(I_A[1])$ et une cochaine tordante $\tau_A : B^+(A) \to A$ universelle.
Le dual (gradué) de $B^+(A)$ est appelé le *dual de Koszul* $E(A)$ de A. (B. Keller, '94)

La (co)homologie de Hochschild à partir de la théorie de la torsion (II)

Fait 2 (H.)

(i) $\mathcal{H}om_{A^e}(\overline{\mathrm{Bar}}(A), A) \simeq \mathcal{H}om^{\tau_A}(B^+(A), A)$.

(ii) $M \otimes_{A^e} \overline{\mathrm{Bar}}(A) \simeq M \otimes_{\tau_A} B^+(A)$.

La (co)homologie de Hochschild à partir de la théorie de la torsion (II)

Fait 2 (H.)

(i) $\mathcal{H}om_{A^e}(\overline{\mathrm{Bar}}(A), A) \simeq \mathcal{H}om^{\tau_A}(B^+(A), A)$.

(ii) $M \otimes_{A^e} \overline{\mathrm{Bar}}(A) \simeq M \otimes_{\tau_A} B^+(A)$.

Proposition 2 (H.)

Soient A une alg. de Koszul sur un corps k, M un A-bimodule et $C = \mathrm{Tor}_\bullet^A(k,k)$ la cdgc standard. Soit $f : C \to B^+(A)$ le q.-iso. standard et $\tau = \tau_A \circ f$. Alors, on a le q.-iso. $\mathcal{H}om^{\tau_A}(B^+(A), A) \simeq \mathcal{H}om^{\tau}(C, A)$ d'adga et le q.-iso. de $M \otimes_\tau C \simeq M \otimes_{\tau_A} B^+(A)$ des bimodules dg sur $\mathcal{H}om^{\tau_A}(B^+(A), A)$.

La (co)homologie de Hochschild à partir de la théorie de la torsion (II)

Fait 2 (H.)

(i) $\mathcal{H}om_{A^e}(\overline{\mathrm{Bar}}(A), A) \simeq \mathcal{H}om^{\tau_A}(B^+(A), A)$.

(ii) $M \otimes_{A^e} \overline{\mathrm{Bar}}(A) \simeq M \otimes_{\tau_A} B^+(A)$.

Proposition 2 (H.)

Soient A une alg. de Koszul sur un corps k, M un A-bimodule et $C = \mathrm{Tor}^A_\bullet(k,k)$ la cdgc standard. Soit $f : C \to B^+(A)$ le q.-iso. standard et $\tau = \tau_A \circ f$. Alors, on a le q.-iso. $\mathcal{H}om^{\tau_A}(B^+(A), A) \simeq \mathcal{H}om^{\tau}(C, A)$ d'adga et le q.-iso. de $M \otimes_\tau C \simeq M \otimes_{\tau_A} B^+(A)$ des bimodules dg sur $\mathcal{H}om^{\tau_A}(B^+(A), A)$.

Cela démontre (et généralise) des résultats de R. Buchweitz, E. Green, N. Snashall et Ø. Solberg, '08.

La (co)homologie de Hochschild des algèbres graduées (I)

Théorème 3 (H.)

Soit A une algèbre graduée positivement et connexe, C une A_∞-cogèbre coaugmentée minimale (i.e. $\Delta_1 = 0$) telle qu'il existe un q-iso. d'A_∞-alg. augmentées

$$\mathcal{E}xt_A^\bullet(k,k) \to C^\#,$$

et soit τ la cochaine tordante induite par le théorème de Keller.

La (co)homologie de Hochschild des algèbres graduées (I)

Théorème 3 (H.)

Soit A une algèbre graduée positivement et connexe, C une A_∞-cogèbre coaugmentée minimale telle qu'il existe un q-iso. d'A_∞-alg. augmentées

$$\mathcal{E}xt^\bullet_A(k,k) \to C^\#,$$

et soit τ la cochaine tordante induite par le théorème de Keller. Alors, il existe un q-iso. $\mathcal{H}om_{A^e}(\overline{\mathrm{Bar}}(A), A) \simeq \mathcal{H}om^\tau(C, A)$ d'A_∞-alg. augmentées, et donc un isomorphisme $HH^\bullet(A) \simeq H^\bullet(\mathcal{H}om^\tau(C, A))$ d'algèbres graduées.

La (co)homologie de Hochschild des algèbres graduées (II)

Théorème 4 (H.)

Soit M un A-bimodule gradué et le q-iso. d'A_∞-algèbres augmentées précédent, il existe un q-iso. $M \otimes_\tau C \simeq M \otimes_{A^e} \overline{\mathrm{Bar}}(A)$ d'A_∞-bimodules sur $\mathcal{H}om_{A^e}(\overline{\mathrm{Bar}}(A), A)$. Il induit en particulier un isomorphisme $H_\bullet(A \otimes_\tau C) \simeq H_\bullet(A, M)$ de bimodules gradués sur $HH^\bullet(A)$.

La (co)homologie de Hochschild des algèbres graduées (II)

Théorème 4 (H.)

Soit M un A-bimodule gradué et le q-iso. d'A_∞-algèbres augmentées précédent, il existe un q-iso. $M \otimes_\tau C \simeq M \otimes_{A^e} \overline{\mathrm{Bar}}(A)$ d'A_∞-bimodules sur $\mathcal{H}om_{A^e}(\overline{\mathrm{Bar}}(A), A)$. Il induit en particulier un isomorphisme $H_\bullet(A \otimes_\tau C) \simeq H_\bullet(A, M)$ de bimodules gradués sur $HH^\bullet(A)$.

$\rightsquigarrow$ Les expressions des produits cup et cap sont absolument explicites si la structure de C est explicite ! !

La (co)homologie de Hochschild des algèbres graduées (II)

Théorème 4 (H.)

Soit M un A-bimodule gradué et le q-iso. d'A_∞-algèbres augmentées précédent, il existe un q-iso. $M \otimes_\tau C \simeq M \otimes_{A^e} \overline{\mathrm{Bar}}(A)$ d'A_∞-bimodules sur $\mathcal{H}om_{A^e}(\overline{\mathrm{Bar}}(A), A)$. Il induit en particulier un isomorphisme $H_\bullet(A \otimes_\tau C) \simeq H_\bullet(A, M)$ de bimodules gradués sur $HH^\bullet(A)$.

⇝ Les expressions des produits cup et cap sont absolument explicites si la structure de C est explicite ! !

⇝ Cela démontre (et généralise) des résultats de Y. Xu et H. Xiang, '11.

La (co)homologie de Hochschild des adga et la dualité de Koszul

Un calcul de Tamarkin-Tsygan $(\tilde{H}^\bullet, \tilde{H}_\bullet, \tilde{d})$ est *dual* à un autre calcul de Tamarkin-Tsygan $(H^\bullet, H_\bullet, d)$ s'il existe une paire (f, g) où

La (co)homologie de Hochschild des adga et la dualité de Koszul

Un calcul de Tamarkin-Tsygan $(\tilde{H}^\bullet, \tilde{H}_\bullet, \tilde{d})$ est dual à un autre calcul de Tamarkin-Tsygan $(H^\bullet, H_\bullet, d)$ s'il existe une paire (f, g) où

(i) $f : \tilde{H}^\bullet \to H^\bullet$ est un iso. d'alg. de Gerstenhaber,

La (co)homologie de Hochschild des adga et la dualité de Koszul

Un calcul de Tamarkin-Tsygan $(\tilde{H}^{\bullet}, \tilde{H}_{\bullet}, \tilde{d})$ est dual à un autre calcul de Tamarkin-Tsygan $(H^{\bullet}, H_{\bullet}, d)$ s'il existe une paire (f, g) où

(i) $f : \tilde{H}^{\bullet} \to H^{\bullet}$ est un iso. d'alg. de Gerstenhaber,

(ii) $g : H_{\bullet}^{\#} \to \tilde{H}_{\bullet}$ est un iso. de modules de Gerstenhaber sur $\tilde{H}^{\bullet}$, tel que $\tilde{d} \circ g = -g \circ d^{\#}$, où $H_{\bullet}$ est un module de Gerstenhaber sur $\tilde{H}^{\bullet}$ via f.

La (co)homologie de Hochschild des adga et la dualité de Koszul

Un calcul de Tamarkin-Tsygan $(\tilde{H}^{\bullet}, \tilde{H}_{\bullet}, \tilde{d})$ est dual à un autre calcul de Tamarkin-Tsygan $(H^{\bullet}, H_{\bullet}, d)$ s'il existe une paire (f, g) où

(i) $f : \tilde{H}^{\bullet} \to H^{\bullet}$ est un iso. d'alg. de Gerstenhaber,

(ii) $g : H_{\bullet}^{\#} \to \tilde{H}_{\bullet}$ est un iso. de modules de Gerstenhaber sur $\tilde{H}^{\bullet}$, tel que $\tilde{d} \circ g = -g \circ d^{\#}$, où $H_{\bullet}$ est un module de Gerstenhaber sur $\tilde{H}^{\bullet}$ via f.

Théorème 5 (H.)

Soit A une algèbre différentielle graduée augmentée sur un corps k et Adams connexe. Alors, le calcul de Tamarkin-Tsygan de $E(A)$ est dual à celui de A.