Théorème "edge of the wedge"

Mathis MARTIN

14 mai 2021

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Le cas à une variable **3**

3 Les cas des tubes **4**

4 Preuve de la version continue **8**

5 Théorème de Banach-Steinhaus sur les groupes **10**

6 Fonctions tests **12**

7 Lemme sur le rayon de convergence **14**

8 Preuve de la version des distributions **18**

9 Preuve du théorème de reflexion **20**

10 Application dans les polydisques **22**

11 Généralisation d'Epstein **25**

Chapitre 1

Introduction

Nous allons aborder dans la suite différentes versions du théorème "the edge of the wedge". Ce théorème est beaucoup utilisé en physique notamment en théorie des quantique champs pour construire des extensions de fonctions de Wightman.

Nous allons tout d'abord introduire un certain nombre de notations. Un élément de $\mathbb{C}^n$ sera écrit

$$z = (z_1, ..., z_n)$$

avec $z_i \in \mathbb{C}$, ou

$$z = x + iy, \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } y \in \mathbb{R}^n.$$

Nous allons maintenant définir la notion de cône ouvert avant de passer à l'énoncé des théorèmes : un cône ouvert de $\mathbb{R}^n$ S est un ouvert tel que, quelque soit $y \in$ S, on a $ty \in S$ pour tout $t > 0$.

Soit V l'intersection de S avec une boule ouverte bornée de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0. Soit maintenant E un ouvert non vide de $\mathbb{R}$. On définit

$$\mathbb{W}^+ = E + iV \text{ et } \mathbb{W}^- = E - iV.$$

Nous allons maintenant voir la première version du théorème qui est la version continue.

Théorème 1.1. *Pour E,$\mathbb{W}^+$ et $\mathbb{W}^-$ comme ci-dessus alors il existe Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient $\mathbb{W}^+ \cup E \cup \mathbb{W}^-$ et qui possède les propriétés suivantes : toute fonction complexe f continue sur $\mathbb{W}^+ \cup E \cup \mathbb{W}^-$ et holomorphe sur $\mathbb{W}^+ \cup \mathbb{W}^-$ possède une extension holomorphe F sur Ω (on a $f(z) = F(z)$ pour tout z dans $\mathbb{W}^+ \cup E \cup \mathbb{W}^-$) .*

Les deux autres versions du théorème que nous allons énoncer utilisent la théorie des distributions.

Théorème 1.2. *Soient E,$\mathbb{W}^+$,$\mathbb{W}^-$,Ω comme dans le Théorème 1.1. Supposons f holomorphe sur $\mathbb{W}^+ \cup \mathbb{W}^-$, et*

$$\lim_{y \to 0} \int_E f(x + iy)\phi(x)dx$$

existe pour toute fonction ϕ infiniment différentiable à support compact sur E. Alors f possède une extension holomorphe F sur Ω

Théorème 1.3. *Soient E,$\mathbb{W}^+$,Ω comme pour le Théorème 1.1. Supposons $f = u+iv$ holomorphe sur $\mathbb{W}^+$ avec u et v des fonctions réelles et*

$$\lim_{y \to 0} \int_E v(x + iy)\phi(x)dx = 0$$

pour toute fonction ϕ infiniment différentiable à support compact sur E. Alors f possède une extension holomorphe F sur Ω. Sur $\mathbb{W}^-$, F satisfait $\overline{F(z)} = f(\bar{z})$.

Le but dans la suite sera de donner une preuve de ces trois théorèmes principaux.

Chapitre 2

Le cas à une variable

Nous allons nous placer ici dans les cas où n=1. On peut donc prendre E comme un segment de R sans perte de généralités. $\mathbb{W}^-$ et $\mathbb{W}^+$ sont donc ici des rectangles ouverts avec E comme coté en commun. On va fait démontrer un théorème encore plus large qui va impliquer les théorèmes A,B,C. En effet on va remplacer E par n'importe quel arc paramétré.

Théorème 2.1. *Soit Ω un ouvert borné du plan et notons $\partial\Omega$ son bord (un lacet). Supposons que Ω soit divisé en deux régions Ω_1 et Ω_2 séparées par un arc paramétré inclus dans sauf en ses deux extrémités. Supposons maintenant f continue sur la fermeture de Ω et holomorphe sur $\Omega_1 \cup \Omega_2$. Alors f est holomorphe sur Ω.*

Preuve. Pour z dans Ω on définit

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega} \frac{f(w)}{w-z} dw.$$

F est évidemment holomorphe sur Ω. On sait par Cauchy que pour $z \in \Omega_1$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega_1} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

et

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega_1} \frac{f(w)}{w-z} dw$$

On a donc $F(z) = f(z)$, pour tout $z \in \Omega_1$, de même on obtient $F(z) = f(z)$ pour tout $z \in \Omega_2$. Or

$$\int_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega_1} + \int_{\partial\Omega_2} .$$

Donc on a bien $F(z) = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$, donc f holomorphe sur Ω On a donc démontré le théorème dans le cas ou E est un arc paramétré ce qui implique le Théorème 1.1. □

Chapitre 3

Les cas des tubes

On va se placer dans un cas où $E = \mathbb{R}^n$ on sera donc dans des espaces de la forme $\mathbb{R}^n + iV$ avec V un ouvert de $\mathbb{R}^n$ on appelle un tel espace un tube ouvert de $\mathbb{C}^n$. On va à présent énoncé un théorème analogue au Théorème 1.1 et que nous allons démontrer dans la suite.

Théorème 3.1. *Soient V_1 et V_2 deux ouverts bornés connectés de $\mathbb{R}$ contenant l'origine. On pose $V = V_1 \bigcup V_2$ et on suppose que*

(i) f holomorphe sur $\mathbb{R} + iV$

(ii) f est continue sur $\mathbb{R} + i\bar{V}$

(iii) il existe $A < \infty$ tel que :

$$\left|f(x+iy)\right| \leq \exp\left(A({x_1}^2 + ... + {x_n}^2)\right)$$

dans $\mathbb{R}^n + i\bar{V}$.

Alors f s'étend en une fonction holomorphe sur $\mathbb{R}^n + iW$ où W est l'enveloppe convexe de V, de plus cette extension est continue sur $\mathbb{R}^n + i\bar{W}$

Pour démontrer ce théorème nous allons d'abord énoncer un lemme :

Lemme 3.2. *Soit $u \in L^1$ et $y \mapsto ue_y$ continue sur un certain compact K de $\mathbb{R}^n$ alors (i) et (ii) sont vraies :*

(a) $y \mapsto ue_y$ est continue de K' dans L^1 où K' est l'enveloppe convexe de K.

(b) Si

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} u(t)e^{iz.t}dt\right| \leq b$$

pour tout $z \in K$ avec b fixé alors

$$|\int_{\mathbb{R}^n} u(t)e^{iz.t}dt| \leq b$$

pour tout $z \in K'$.

Preuve. Soit $\mathcal{E} > 0$, soit μ une mesure sur $\mathbb{R}$ telle que $d\mu = |\mu|$dx. Donc on a $y \to e_y$ est continue de K dans $L^1(\mu)$. Le fait que K soit compact implique qu'il y a un nombre fini de points $y_1, ..., y_m$ de K tels que $\forall y \in K$ il y ait au moins un y_i tel que $|| \; e_y - e_{y_i} \; || < \mathcal{E}$. Comme e_{y_i} est dans $L^1(\mu)$ alors il y a une boule compacte telle que

$$\int_{B^c} e_{y_i} d\mu < \mathcal{E}$$

$\forall i \leq m$ et B^c le complémentaire de B. Comme $\| e_y - e_{y_i} \| < \mathcal{E}$ on a

$$\int_{B^c} e_y d\mu < 2\mathcal{E}. \tag{3.1}$$

On pose Y l'ensemble des y dans $\mathbb{R}$ tels que (3.1) est vérifiée. Y est donc convexe, en effet si on prend y',y'' dans Y et $0 < \sigma < 1$ tels que $y = (1-\sigma)y' + \sigma y''$. On a alors

$$e_y = {e_{y'}}^{1-\sigma} {e_{y''}}^{\sigma}.$$

On peut ensuite appliquer l'inégalité de Holder avec les exposants conjugués $(1-\sigma){-1}$ et σ^{-1} on obtient donc

$$\int_{B^c} e_y d\mu = \int_{B^c} e_{y'}^{1-\sigma} e_{y''}^{\sigma} d\mu \leq (\int_{B^c} e_{y'} d\mu)^{1-\sigma} (\int_{B^c} e_{y''} d\mu)^{\sigma} < 2\mathcal{E}^{1-\sigma} 2\mathcal{E}^{\sigma} = 2\mathcal{E}$$

donc y est dans Y. On a donc Y convexe et K' l'enveloppe convexe de K est dans Y ce qui implique que (3.1) est verfiée pour tout y dans K'. Soient maintenant y et y' dans K, (3.1) implique que

$$||e_y - e'_y|| < 4\mathcal{E} + \int_B |e_y - e_{y'}| d\mu < 4\mathcal{E} + \mu(B) \sup_{t \in B} (|e_y(t) - e_{y'}(t)|).$$

Comme $\mu(B) < \infty$ et que $e_{y'}$ tend uniformément vers e_y quand y' tend vers y et donc $||e_{y'} - ey||$ tend vers 0 quand y' tend vers y. Ce qui prouve la continuité de K' dans L^1 et donc prouve (i)

Pour prouver (ii) on remarque d'abord que (i) implique que la fonction U definie sur $\mathbb{R}^n + iK'$ par

$$U(z) = \int_{\mathbb{R}^n} u(t) e^{iz.t} dt \tag{3.2}$$

est continue et bornée. Soit Y l'ensemble des y dans K' tel que

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{sup} |U(x+iy)| \leq b$$

Comme K est dans Y ar definition il suffit de montrer que Y est convexe. Soient y' et y'' dans Y et $0 < \sigma_0 < 1$ tel que $y = (1-\sigma_0)y' + \sigma_0 y''$. Soit x dans $\mathbb{R}^n$, on pose $z' = x + iy'$, $z'' = x + iy''$ et on definit

$$\gamma(s) = U((1-s)z' + sz''), s = \sigma + i\tau, 0 \leq \sigma \leq 1$$

On a $Im[(1-s)z' + sz''] = (1-\sigma)y' + \sigma y'' \in K'$, γ est bien définie sur la bande $[0,1] \times i\mathbb{R}^n$ et est bornée et continue ; (3.2) montre que elle est aussi holomorphe à l'interieur de la bande. D'après (3.2) et comme y', y'' sont dans Y on a

$$|\gamma(i\tau)| \leq b \; et \; |\gamma(1+i\tau)| \leq b$$

pour tout τ. Comme γ holomorphe sur la bande d'après le principe du maximum on a

$$|\gamma(s)| \leq \underset{\sigma \in 0,1}{sup} |\gamma(s)| \leq b \text{ pour tout s dans }]0,1[\times i\mathbb{R}^n$$

En particulier $|\gamma(\sigma_0)| \leq b$ or $\gamma(\sigma_0) = U(x+iy)$, ayant choisi x arbitrairement on a bien y dans Y ce qui termine la preuve du lemme. □

Preuve du théorème. Pour z dans $\mathbb{R}^n + i\bar{V}$ on definit

$$g(z) = f(z)\exp\Big(-(A+1)({z_1}^2 + ... + {z_n}^2)\Big)$$

Il est clair que si on démontre le resultat pour g il en va de même pour f. Par definition les hypothèses (ii) et (ii) sont vérifiées pour g et on a une meilleure estimation à la place de (iii)

$$|g(x+iy)| \leq c\exp\Big(({x_1}^2 + ... + {x_n}^2)\Big) \tag{3.3}$$

dans $\mathbb{R}^n + i\bar{V}$. Ici c est fini et dépend de A et V. On voit bien que g tend vers 0 quand x tend vers l'infini et donc d'après (ii) on a l'uniforme continuité de g sur $\mathbb{R}^n + i\bar{V}$. On note $g_y(x) = g(x+iy)$ On voit aussi que (3.3) implique que g_y est dans $L^1 \cap L^2$ On note G_y la transformée de Fourier de g_y par

$$G_y(t) = (\frac{1}{2\Pi})^n \int_{\mathbb{R}^n} g(x+iy)e^{-ix.t}dt \tag{3.4}$$

Notre prochain but est de démontrer la formule suivante

$$G_y(t) = e^{-y.t}G_0(t) \tag{3.5}$$

Pour montrer (3.5) on multilpie (3.4) par $e^{y.t}$ et on réecrie la partie de doite comme

$$\int ... \int g(z_1, ..., z_n)\exp(-i\sum t_k z_k)dz_1...dz_n$$

avec $z_k = x_k + y_k$ (les y_k sont fixés). Si y est dans V alors par le théorème de Cauchy et le fait que g tende vers 0 en module nous dit que on eut remplacer les y_k par des y'_k suffisamment proches. En effet, si on prend z dans $\mathbb{C}$, et γ le lacet parcourant le rectangle de longueur $2R$ et de largeur $y' - y$.On voit que $g(z)\exp(-itz)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ donc d'après Cauchy on a

$$\int_\gamma g(z)\exp(-itz)dz = 0$$

Donc

$$\begin{aligned}&\int_{[-R;R]} g(x+iy)\exp(-it(x+iy)dx + \int_{[y;y']} g(R+ik)\exp(-it(R+ik)dk\\ &-\int_{[-R;R]} g(x+iy')\exp(-it(x+iy')dx - \int_{[y;y']} g(-R+ik)\exp(-it(-R+ik)dk = 0.\end{aligned}$$

En faisant tendre R vers l'infini les termes où l'on intègre sur $[y; y']$ tendent vers 0 par hyothèse sur g, on obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}} g(x+iy)\exp(-it(x+iy)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x+iy')\exp(-it(x+iy')dx$$

Et donc en faisant la meme chose dans $\mathbb{C}^n$ on obtient qu'on peut remplacer les y_k par des y'_k assez proches . On peut donc conclure que pour chaque t dans $\mathbb{R}^n$ $G_y(t)e^{yt}$ est constante sur chaque composante connexe de V c'est-à-dire sur V_1 et V_2 Par (3.3) et le fait que g est uniformément continue on déduit que $y \mapsto g_y$ est continue de $\bar{V}$ dans L^1 donc $G_y(t)$ est une fonction continue de y sur $\bar{V}$. $G_y(t)$ étant constante sur chaque V_1 et V_2 on en déduit que $G_y(t)e^{yt}$ ne dépend pas de y est donc

$$G_y(t) = e^{-y.t}G_0(t)$$

On a donc prouvé (3.5). La transformation de Fourier-Plancherel définit un automorhisme sur L^2 ainsi G_y est dans L^2, cependant on ne sait pas encore si G_y est dans L^1. Pour montrer cela on pose $\Psi = \Psi_r$ une fonction positive qui s'annule en dehors de la boule de rayon r et dont l'integrale vaut sur celle-ci. On definit

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\xi) g(z-\xi) d\xi \tag{3.6}$$

On a donc $h = \Psi * g$ et on pose $h_y = \Psi * g_y$. On pose H_y et Ψ les tranformées de Fourrier respectives de h_y et ψ alors $H_y = \Psi G_y$. En effet $T_f(g_y * \psi) = G_y \Psi$. (3.5) devient donc

$$H_y(t) = e^{-y.t} H_0(t) \ (t \in \mathbb{R}^n, y \in \bar{V})$$

De plus, $y \mapsto g_y$ est continue de $\bar{V}$ dans L^2 donc par (3.3), l'uniforme continuité et le théorème de plancherel $y \mapsto G_y$ est continue de $\bar{V}$ dans L^2. Comme Ψ est dans L^2 l'inégalité de Schwarz implique que $y \mapsto H_y$ est continue de $\bar{V}$ dans L^1. On peut appliquer la formule d'inversion de Fourrier à h_y, on obtient

$$h(z) = \int_{\mathbb{R}^n} H_0(t) e^{iz.t} dt \ (z \in \mathbb{R}^n + i\bar{V}) \tag{3.7}$$

On peut maintenant appliquer notre lemme à H_0 à la place de u, $\bar{V}$ à la place de K, et on peut conclure de (i) que $y \mapsto H_y$ est continue de $\bar{W}$ dans L^1 où W est l'enveloppe convexe de V, ce qui montre que (3.7) définit h comme une fonction continue sur $\mathbb{R}^n + i\bar{W}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{R}^n + iW$. De (ii) de notre lemme on conclut que la borne superieure de $|h|$ sur $\mathbb{R}^n + i\bar{W}$ est la même que sur $\mathbb{R}^n + i\bar{V}$. On note h_r à la place de h pour montrer la dépendance de h à ψ, en faisant tendre r vers 0 on voit de (3.6) et de la continuité uniforme de g que h_r tend vers g uniformément sur $\mathbb{R}^n + i\bar{V}$. Il suit que $|h_{r1} - h_{r2}|$ à la même borne superieure sur $\mathbb{R}^n + i\bar{W}$ que sur $\mathbb{R}^n + i\bar{V}$ donc h_r est une suite de Cauchy uniforme sur $\mathbb{R}^n + i\bar{W}$. Et donc la limite de cette suite de Cauchy nous fournit l'exetnsion de g sur $\mathbb{R}^n + i\bar{W}$ désirée ce qui termine la preuve du théorème.

$\square$

Chapitre 4

Preuve de la version continue

Nous allons dans ce chapitre démontrer le Théorème 1.1 mais qui offre cependant une conclusion moins satisfaisante que le théorème vu dans le cas des tubes car il montre seulement l'existence d'un domaine et non quel est le domaine maximal d'extension. Pour montrer l'existence de Ω décrit dans le théorème 1.1 il est suffisant de montrer que tout point de E possède un voisinnage Ω_1 dans $\mathbb{C}^n$ tel que : pour tout f continue sur $\mathbb{W}^+ \cup E \cup \mathbb{W}^-$ et holomorphe sur $\mathbb{W}^+ \cup \mathbb{W}^-$ il correspond une fonction holomorphe dans Ω_1 telle que $f(z) = F(z)$ pour tout z dans $\Omega_1 \cap (\mathbb{W}^+ \cup E \cup \mathbb{W}^-)$ On va considérer dans lasuite que le point en question est l'origine de $\mathbb{C}^n$. On observe que tout le problème est invariant par transformation lineaire inversible de $\mathbb{C}^n$ (ces transformations corresondent à des matrices de taille $n \times n$ inversibles) et donc il existe des transformations lineaires qui envoient le cône ouvert S (qui determine V) dans un cone ouvert qui contient $\mathbb{R}^n_+$. Et il vient que le théorème 1.1 est une conséquence de la proposition suivante

Proposition 4.1. *Soit E et V des cubes ouverts de $\mathbb{R}^n$ definient comme ce qui suit :*

$$E = x : -6 < x_j < 6 \text{ et } V = x : 0 < y_j < 6$$

avec $1 \leq j \leq n$ On pose $W^+ = E + iV$, $W^- = E - iV$. Si f est continue sur $(\mathbb{W}^+ \cup E \cup \mathbb{W}^-)$ et holomorphe sur $\mathbb{W}^+ \cup \mathbb{W}^-$ alors il existe une fonction F holomorphe sur U^n telle que

$$F(z) = f(z) \text{ pour tout } z \text{ dans } U^n \cap (\mathbb{W}^+ \cup E \cup \mathbb{W}^-)$$

avec $U^n = z : |z_j| < 1$ pour $1 \leq j \leq n$

Preuve. On pose $c = \sqrt{2} - 1$,et on définit ϕ sur la fermeture de U^2 par

$$\phi(w, \lambda) = \frac{w + \frac{\lambda}{c}}{1 + c\lambda w}$$

On calcule que la partie imaginaire de ϕ vaut

$$Im\phi(w, \lambda) = \frac{(1 - |\lambda|^2)Im(cw) + (1 - |cw|^2)Im\lambda}{c|1 + c\lambda w|^2}$$

Alors ϕ à les propriétés sur $\bar{U}^2$:

1. $Im\phi$ à le même signe que $Im\lambda$ quand $|\lambda| = 1$
2. $Im\phi$ à le même signe que $Im\lambda$ quand w est réel
3. $\phi(w, 0) = w$
4. $|\phi(w, \lambda)| \leq \frac{(1+\frac{1}{c})}{(1-c)} = 3 + 2\sqrt{2} < 6$ (c minimise cette fraction)

Maintenant on définit :

$$\Phi(z,\lambda) = (\phi(z_1,\lambda), ..., \phi(z_n,\lambda)) \quad (z \in U^n, \lambda \in \bar{U}).$$

Les propriétés 1 et 4 $\Phi(z,e^{i\theta})$ est à valeur dans W^+ si $0 < \theta < \pi$, dans W^- si $\pi < \theta < 2\pi$ et dans E si $\theta = 0$ ou π, finalement on a que $\Phi(z,e^{i\theta})$ vit dans le domaine de définition de f, pour tout z dans U^n et pour tout θ réel. On définit

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi(z,e^{i\theta}))d\theta \qquad (z \in U^n)$$

On voit que si on fixe z l'intégrande est continue en θ. Il est facile de voir que F est continue sur U^n. L'integrande est aussi une fonction holomorphe de z pour tout θ donc en appliquant le théorème de Morera pour tous les z_j séparemment on voit que F est holomorphe sur U^n. Nous fixons $x = (x_1, ...x_n)$ dans $E \cap U^n$ et donc $|x_j| < 1$ pour tout j. Les propriétés 2 et 4 montrent que $f(\Phi(z,\lambda))$ vit dans le domaine de f pour tout λ dans $\bar{U}$, alors on peut définir

$$g_x(\lambda) = f(\Phi(x,\lambda))$$

On voit que g_x est continue sur $\bar{U}$ car c'est une composée de fonctions continues sur $\bar{U}$. Lorsque $Im(\lambda) > 0$ alors $\Phi(x,\lambda) \in W^+$ donc par définition de f, g_x est holomorphe sur la moitié supérieure de U. Lorsque $Im(\lambda) < 0$, $\Phi(x,\lambda) \in W^-$, g_x est holomorphe sur la moitié inférieure de U. Donc si on applique le théorème 1.1 dans le cas à une variable on obtient que g_x est holomorphe sur U. Une fois cela dit on peut donc établir l'égalité suivante :

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\Phi(x,e^{i\theta}))d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_x(e^{i\theta})d\theta = g_x(0)$$

En effet comme g_x est holomorphe sur U on peut appliquer le théorème de Cauchy qui dit

$$g_x(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial U} \frac{g_x(a)}{a}da = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{ie^{i\theta}g_x(e^{i\theta})}{e^{i\theta}}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g_x(e^{i\theta})d\theta$$

Or

$$g_x(0) = f(\Phi(x,0)) = f(x)$$

Donc on obtient finalement

$$F(x) = f(x) \quad sur\ E \cap\ U^n. \tag{4.1}$$

Maintenant on fixe $z = x + iy$, avec $|x_j| < \frac{1}{2}$ et $0 < y_j < \frac{1}{2}$ pour $1 \le j \le n$. On definit

$$h(\lambda) = f(x + \lambda y), \quad H(\lambda) = F(x + \lambda y) \quad (\lambda \in \bar{U})$$

Pour chaque λ dans $\bar{U}$ chaque composante de la partie imaginaire de $x+\lambda y$ est de module inferieur à $\frac{1}{2}$ et elles ont toutes le même signe. Donc h et H sont bien définies. Elles sont holomorphes sur $\bar{U}$ et coincident sur $E \cap U$ d'après (4.1). Et donc $h = H$ sur $\bar{U}$, en particulier $h(i) = H(i)$ et donc

$$F(z) = F(x + iy) = H(i) = h(i) = (f(x + iy) = f(z)$$

Donc F et f coincident sur un ouvert connexe non vide de $W^+ \cap U^n$ et donc comme elles sont holomorphiques sur $W^+ \cap U^n$ elles coincident sur $W^+ \cap U^n$, de même sur $W^- \cap U^n$ en prenant $-\frac{1}{2} < y_j < 0$. On obtient finalement que $F(z) = f(z)$pour tout z dans $U^n \cap (\mathbb{W}^+ \cup E \cup \mathbb{W}^-)$. $\square$

Ce qui termine la preuve de la proposition ainsi que la version continue.

Chapitre 5

Théorème de Banach-Steinhaus sur les groupes

Dans ce chapitre nous allons énoncer et démontrer un théorème très important qui va nous servir dans la suite : le théorème de Banach-Steinhaus Nous allons nous placer dans le cas des groupes commutatifs muni d'une metrique complète et invariante. Soit G un tel groupe et ρ une telle métrique, on dit qu'elle est complète si elle fait de G un espace complet (toutes les suites de Cauchy convergent), ρ est invariante signifie que

$$\rho(f,g) = \rho(f+h, g+h) \tag{5.1}$$

pour tout f,g,h dans G. L'opération de groupe est écrite comme l'addition et donc l'élément neutre est 0. Si on a f dans G et n et un entier positif, nf signifie la somme des n termes $f + ... + f$ et $0f = 0$. On obtient

$$nf = \sum_{k=1}^{n} (kf - (k-1)f)$$

l'inégalité triangulaire donne

$$\rho(nf, 0) \leq \sum_{k=1}^{n} \rho((kf - (k-1)f), 0) = \sum_{k=1}^{n} \rho((kf), (k-1)f)$$

Par (5.1) $\rho((kf), (k-1)f) = \rho(f, 0)$ on obtient donc

$$\rho(nf, 0) \leq n\rho(f, 0) \tag{5.2}$$

On appelle homomorphisme complexe de G (on l'appelle aussi fonctions additives) est une fonction à valeur complexe Λ sur G qui satisfait $\Lambda(f+g) = \Lambda(f) + \Lambda(g)$ pour toutes f,g dans G. Une famille Φ de fonctions additives de G est équicontinue si pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que $|\Lambda f| < \epsilon$ pour toute $\Lambda \in \Phi$ et pour tout f dans G avec $\rho(f, 0) < \delta$. On va maintenant énoncer le théorème de Banach-Steinhaus

Théorème 5.1. *Soit Φ une famille de fonctions additives continues de G et si*

$$\Psi(f) = \sup |\Lambda f| : \Lambda \in \Phi < \infty$$

pour tout f dans G, alors Φ est équicontinue

Preuve du Théorème. La continuité de la fonction $f \mapsto |\Lambda f|$ montre que pour tout entier n l'ensemble

$$E_n = \{f : \Psi(f) \leq n\} = \underset{\Lambda \in \Phi}{\cap} \{f : |\Lambda f| \leq n\}$$

est fermé. Aussi $G = \overset{\infty}{\underset{n=1}{\cup}} E_n$ comme $\Psi(f) < \infty$ pour tout f dans G. De plus comme G est complet on peut appliquer le Théorème de Baire, en effet ce théorème dit que tout espace métrique complet est de Baire et que donc si G est une union dénombrable de fermés d'interieur vide alors G est d'interieur vide ce qui n'est pas supposé être vrai et donc il existe au moins un E_n d'interieur non vide. En d'autres termes il existe g dans G, $R > 0$ et un entier positif m tels que

$$|\Lambda(g + h)| \leq m$$

lorsque $\rho(h, 0) < r$ et Λ dans Φ. Sous ces conditions

$$|\Lambda h| = |\Lambda(h + g) - \Lambda g| \leq 2m \tag{5.3}$$

Soit N un entier et δ tel que $\delta = r/2Nm$. Si $\rho(f, 0) < \delta$ (5.2) implique que

$$\rho(2Nmf, 0) \leq 2Nm\rho(f, 0) < r$$

Et donc (5.3) donne

$$|\Lambda(2Nmf)| \leq 2m \tag{5.4}$$

Comme Λ est additive et que $2Nm$ est un entier positif, $\Lambda(2Nmf) = 2Nm\Lambda(f)$. On conclut donc de (5.4) que $\Lambda \leq 1/N$ pour $\Lambda \in \Phi$ et $\rho(f, 0) < \delta$. Ceci conclut donc la preuve du théorème. □

On va maintenant énoncer un corollaire de ce théorème :

Corollaire 5.2. *Si* $\{\Lambda_i\}$ *est une suite de fonctions additive continues de G telle que*

$$\underset{i \to \infty}{\Lambda_i f} = \Lambda f$$

existe pour toute f dans G, et si K est un compact de G, alors

$$\max_{f \in K} |\Lambda_i f - \Lambda f| \overset{i \to \infty}{\to} 0$$

preuve. Soit $\epsilon > 0$. Par le Théorème de Banach-Steinhaus, il existe $\delta > 0$ tel que $|\Lambda_i(f - g)| < \epsilon$ pour tout i lorsque $\rho(f, g) < \delta$ Comme K est un compact il existe $g_1, ..., g_n$ dans K tels que pour tout f dans K $\rho(f, g_m) < \delta$ pour au moins un m. Il existe N tel que $|\Lambda_i g_m - \Lambda_j g_m| < \epsilon$ quand $i > N$ et $j > N$. Alors

$$|\Lambda_i f - \Lambda_j f| \leq |\Lambda_i(f - g_m)| + |\Lambda_i g_m - \Lambda_j g_m| + |\Lambda_j(g_m - f)| < 3\epsilon$$

si $i > N$, $j > N$ et f dans K. En faisant tendre j vers l'infini on obtient que $|\Lambda_i f - \Lambda f| \leq 3\epsilon$ pour tout f dans K,pour tout $i > N$.

□

Chapitre 6

Fonctions tests

Dans cette partie nous allons discuter de la fonction ϕ qui apparait dans le théorème 1.2. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et soit C_K^∞ l'espace des fonctions complexes infiniement différentiables à support compact K. Il est facile de voir que C_K^∞ est un groupe sous l'addition. On définit la métrique ρ sur C_K^∞ par la formule

$$\rho(\phi,\psi) = \sum_\alpha 2^{-|\alpha|} \frac{||D^\alpha(\phi-\psi)||_K}{1+||D^\alpha(\phi-\psi)||_K}$$

Avec α parcourant tous les multi-indices de la forme $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, Ici

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n,$$

$$D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1} ......(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n}$$

Et $||.||_K$ désigne la borne supérieure sur K. Comme $\sum 2^{-|\alpha|} < \infty$, ρ est bien définie. ρ est bien une distance sur C_K^∞, en effet elle est symétrique car $||D^\alpha(\psi-\phi)||_K = ||(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(\phi-\psi)||_K = ||D^\alpha(\phi-\psi)||_K$, la séparation est respectée car si $\rho(\phi,\psi) = 0$ alors comme on a une somme de termes positifs chacuns d'eux est nul, donc $||D^\alpha(\phi-\psi)||_K = 0$ et donc $\phi = \psi$. L'inégalité triangulaire est aussi respectée par propriété de la somme et de $||.||_K$ qui est une norme. Donc ρ définit bien une distance sur C_K^∞. Il est facile de voir qu'elle est invariante, de plus $\rho(\phi_i, 0) \to 0$ si et seulement si $||D^\alpha(\phi_i)||_K \to 0$ pour tout α. Ceci montre que $\{\phi_i\}$ est une suite de Cauchy dans C_K^∞ (relativement à ρ) si et seulement si $\{D^\alpha\phi_i\}$ en est une pour tout α relativement à $||.||_K$. Si on suppose que $\{\phi_i\}$ est de Cauchy (relativement à ρ) alors chaque $D^\alpha\phi_i$ converge uniformément. Il suit qu'il existe $\phi \in C_K^\infty$ telle que $||D^\alpha(\phi_i - \phi)||_K \to 0$ pour tout α, cela implique que $\rho(\phi_i, \phi) \to 0$. Et donc (C_K^∞, ρ) est bien un espace complet.

La continuité des fonctions additives sur C_K^∞ peut être exprimée d'une manière simple. Nous allons nous placer dans le cas $n = 1$, à la place de K nous allons prendre l'intervalle réel $I = [-\delta, \delta]$. Pour simplifier les formules à venir on va supposer que $2\delta \leq 1$. Soit Γ une collection équicontinue de fonctions additives sur C_I^∞. Par définition on a donc l'existence d'un $r > 0$ tel que $|\Lambda\phi| < 1$ pour toute $\phi \in \Gamma$ si $\rho(\phi, 0) < r$ c'est à dire si

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \frac{||D^m(\phi)||_I}{1+||D^m(\phi)||_I} < r \tag{6.1}$$

Soit $p \geq 1$ tel que $2^{-p} < r/4$. Comme toute ϕ dans C_I^∞ sont nulles en dehors de I, toutes ses dérivées sont nulle en $-\delta$ et δ alors

$$||D^{p-1}(\phi)||_I \leq \int_I |D^p\phi(s)|ds$$

aussi

$$||D^{p-2}(\phi)||_I \leq \int_I |D^{p-1}\phi(s)|ds \leq 2\delta||D^{p-1}(\phi)|| \leq \int_I |D^p\phi(s)|ds$$

On voit donc que

$$||D^m(\phi)||_I \leq \int_I |D^p\phi(s)|ds$$

pour tout m tel que $0 \leq m \leq p-1$ On va maintenant chercher une majoration pour les p premiers termes de la serie dans (6.1)

$$\sum_{m=0}^{p-1} 2^{-m} \frac{||D^m(\phi)||_I}{1+||D^m(\phi)||_I} \leq \sum_{m=0}^{p-1} 2^{-m} \int_I |D^p\phi(s)|ds \ \leq 2(1-(1/2)^p) \int_I |D^p\phi(s)|ds \ \leq 2 \int_I |D^p\phi(s)|$$

On peut ensuite majorer le reste de la serie par $\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} = 2^{1-p} < r/2$. On peut donc conclure que si $\int_I |D^p\phi(s)|ds < r/4$ alors on a bien (6.1). On a donc que $|\Lambda\phi| < 1$ si $\int_I |D^p\phi(s)|ds < r/4$ Si on prend $B = 4/r$ on obtient le résultat suivant

Proposition 6.1. *Si Γ est une collection équicontinue de fonctions additives sur C_I^{∞} alors il existe un entier p et une constante B finie tels que*

$$|\Lambda\phi| \leq B \int_I |D^p\phi(s)|ds$$

pour tout $\phi \in C_I^{\infty}$ et pour tout $\Lambda \in \Gamma$.

Chapitre 7

Lemme sur le rayon de convergence

Dans ce chapitre g désigne une fonction complexe infiniment différentiable définie sur un voisinnage de l'origine de $\mathbb{R}^n$. On pose

$$M_r(g) = \sup_\alpha \frac{|D^\alpha g(0)|}{\alpha!} r^{|\alpha|}$$

On definit

$$R(g) = \sup\{r \geq 0 : M_r(g) < \infty\}$$

Ici $\alpha! = \alpha_1!......\alpha_n!$.
On voit facilement que $R(g)$ est le plus grand nombre r tel que $\sum (D^\alpha g)(0) z^\alpha/\alpha!$ converge absolument sur rU^n. En effet le rayon de convergence de la serie étant

$$R = \sup\{r \geq 0 \ \ tq \ \ (\frac{(D^\alpha g)(0) r^\alpha}{\alpha!})_\alpha \ \ bornee\ \}$$

et on voit que $(\frac{(D^\alpha g)(0) r^\alpha}{\alpha!})_\alpha$ bornée si et seulement si $M_r(g) < \infty$ donc $R(g) = R$

Lemme 7.1. *Supposons que Eest un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Q et K des cubes compacts centrés en 0 tels que $Q + K \subset E$, g est une fonction complexe infiniment différentiable définie sur E et*

$$R(g * \phi) \geq R_0 \ \ pour\ tout\ \phi \in C_K^\infty \tag{7.1}$$

Alors $R(g) \geq R_0$. Avec

$$(g * \phi)(x) = \int_K g(x - \xi)\phi(\xi) d\xi$$

On pose $K = I^n$, o $I = [-\delta, \delta]$ et on suppose sans perte de généralité que $2\delta \leq 1$. L'hypothèse (7.1) sera utilisée pour les fonctions ϕ de la forme

$$\phi(x) = \phi_1(x_1)....\phi_n(x_n)$$

où chaque ϕ_i est dans C_I^∞. Pour une telle ϕ on introduit "convolution partielle" P_i par la formule

$$P_i(g, \phi)(x) = \int_I g(x_1, ...x_{i-1}, x_i - t, ...x_n)\phi_i(t) dt$$

Alors

$$(g * \phi) = P_1.....P_n(g, \phi)$$

(7.1) dit que

$$M_r(g * \phi) = M_r(P_1...P_n(g, \phi)) < \infty \ \ si \ \ r < R_0$$

Le démontre le lemme en appliquant n fois successivement la proposition suivante :

Lemme 7.2. *Avec g comme ci-dessus et ϕ dans C_I^∞ on definit*

$$g_\phi(x) = \int_I g(x_1, ..., x_n - t)\phi(t)dt \tag{7.2}$$

Si $M_r(g_\phi) < \infty$ pour tout ϕ dans C_I^∞ et pour tout $r < R_0$. Alors $M_r(g) < \infty$ pour tout $r < R_0$

Cette proposition implique le lemme car si on prend $h_1 = P_2 \dots P_n(g, \phi)$ on a $(g*\phi) = (h_1)_{\phi_1}$, par la proposition on obtient que $M_r(h_1) < \infty$, on pose ensuite $h_2 = P_3 \dots P_n(g, \phi)$, la proposition montre que $M_r(h_2) < \infty$. En itérant on obtient que $M_r(h_{n-1}) = M_r(P_n(g, \phi)) < \infty$ et donc par la proposition $M_r(g) < \infty$.

Preuve. On fixe r et s tels que $0 < r < s < R_0$. On définit

$$\Lambda_\alpha \phi = (D^\alpha g_\phi)(0)s^{|\alpha|}/\alpha! \quad (\phi \in C_I^\infty)$$

D'après (7.2) comme on intègre une fonction continue sur un compact on a $D^\alpha(g_\phi) = (D^\alpha g)_\phi$ On obtient donc que

$$|\Lambda_\alpha \phi| = |(D^\alpha g)_\phi(0)s^{|\alpha|}/\alpha!| \leq |\int_I (D^\alpha g)(0, ..., -t)\phi(t)dt| \leq k\sup_{t\in I}(\phi(t))$$

avec k une constante qui dépend de g et α. Il vient donc que Λ_α est continue sur C_I^∞. Par hypothèse comme $M_r(g_\phi) < \infty$ alors $\sup_\alpha|\Lambda_\alpha \phi| < \infty$ pour tout ϕ dans C_I^∞. Le théorème de Banach-Steinhaus démontré précédemment dit que $\{\Lambda_\alpha\}$ est une collection équicontinue. Et on a vu à la fin du chapitre 6 que cela impliquait l'existence d'un entier p positif et d'une constante $B' < \infty$ tels que

$$\sup_\alpha|\Lambda_\alpha \phi| = M_s(g_\phi) \leq B' \int_I |D^p \phi(t)|dt \tag{7.3}$$

On va maintenant essayer de se débarrasser de D^p ans l'inégalité au dessus, On réecrit (7.2) avec un simple changement de variable

$$g_\phi(x) = \int_I g(x_1, ..., t)\phi(x_n - t)dt \tag{7.4}$$

Soit ν le multi-indice $\nu = (0, ..., 1)$. Si $\phi \in C_I^\infty$ et $\psi \in D^p\phi$, alors $\psi \in C_I^\infty$, et (7.4) montre que

$$D^\alpha g_\psi = D^{\alpha+p\nu} g\phi$$

En effet

$$D^{\alpha+p\nu} g\phi = D^{\alpha+p\nu} \int_I g(x_1, ..., t)\phi(x_n - t)dt = D^\alpha \int_I g(x_1, ..., t)D^{p\nu}\phi(x_n - t)dt = D^\alpha g_\psi$$

On pose $\beta = \alpha + p\nu$ alors $|\beta| = |\alpha| + p$ et

$$D^\alpha g_\psi(0)\frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!} = D^\beta g_\phi(0)\frac{r^{|\alpha|}}{\alpha!} = D^\beta g_\phi(0)\frac{s^{|\beta|}}{\beta!}\frac{\beta!}{\alpha!}(\frac{r}{s})^{|\alpha|}s^{-p}$$

alors

$$M_r(g_\psi) \leq M_s(g_\phi)s^{-p}\sup_\alpha\{\frac{(\alpha + p\nu)!}{\alpha!}(\frac{r}{s})^{|\alpha|}\} \tag{7.5}$$

Si $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ alors

$$\frac{(\alpha + p\nu)!}{\alpha!} = \frac{(\alpha_1!...(\alpha_n + p)!}{\alpha_1!...\alpha_n!} = \frac{(\alpha_n + p)!}{\alpha_n!} \leq (\alpha_n + p)^p \leq (|\alpha| + p)^p$$

Comme on a supposé que $r < s$ on obtient que le sup dans (7.5) est fini. Et donc d'après (7.3) et (7.5)

$$M_r(g_\psi) \leq B' \int_I |D^p\phi(t)|dt.s^{-p}.\sup_\alpha\{\frac{(\alpha+p\nu)!}{\alpha!}(\frac{r}{s})^{|\alpha|}\} \leq B" \int_I |\psi(t)|dt \tag{7.6}$$

Où B" dépend de g,r,s,p mais pas de ψ et donc l'inégalité est valable pour toutes $\psi \in C_I^\infty$ (qui est la pième dérivée d'une fonction $\phi \in C_I^\infty$). Soit X l'espace de telles ψ, X contient donc les fonctions $\psi \in C_I^\infty$ dont la p-ième integrale a son support dans I. On peut aussi le voir comme l'intersection des espaces où les applications linéaires $S_1, ..., S_p$ s'annulent où

$$S_1\phi = \int_{-\delta}^{\delta} \phi, \quad S_2\phi = \int_{-\delta}^{\delta} dt \int_{-\delta}^{t} \phi$$

plus explicitement

$$(k-1)!S_k\phi = \int_{-\delta}^{\delta} (\delta - t)^{k-1}\phi(t)dt$$

Cela montre que $S1, ..., S_p$ sont linéairement indépendantes et que comme $\delta \leq 1/2$

$$|S_k\phi| = \frac{1}{(k-1)!}|\int_{-\delta}^{\delta}(\delta-t)^{k-1}\phi(t)dt| \leq |\int_I \phi(t)dt| \leq \int_I |\phi(t)|dt \tag{7.7}$$

L'indépendance des S_i montre qu'il y a des fonctions $\phi_1, ..., \phi_p$ dans C_I^∞ telles que $S_k\phi_j = \delta_{kj}$. Toute $\phi \in C_I^\infty$ à une unique représentation de la forme

$$\phi = (S_1\phi)\phi_1 + ... + (S_p\phi)\phi_p + \psi \tag{7.8}$$

où $\psi \in X$

En effet en définissant ψ comme $\phi - \sum_{i=1}^p S_i(\phi)\phi_i$, i.e. de sorte que (7.8) soit vrai. Il faut vérifier que ψ appartient à X. D'après la description de X , X est l'intersection $\cap_{i=1}^p \mathrm{Ker}(S_i)$, donc il suffit de prouver que $S_j(\psi) = 0$, pour tout $j = 1, \ldots, p$. Or,

$$S_j(\psi) = S_j(\phi) - \sum_{i=1}^p S_i(\phi)S_j(\phi_i) = 0$$

car $S_j(\phi_i) = \delta_{ij}$, d'après la définition de ϕ_i. Si

$$C = 1 + \int_I (|\phi_1| + ... + |\phi_p|),$$

D'après (7.7) et (7.8) on obtient que $\int |\psi| \leq C \int |\phi|$. En effet

$$|\psi| \leq |\phi| + \sum_{i=1}^p |S_i\phi|.|\phi_i| \leq |\phi| + \int_I |\phi|. \sum_{i=1}^p |\phi_i|$$

Et donc

$$\int_I |\psi| \leq \int_I |\phi| + \int_I |\phi|. \sum_{i=1}^p |\int_I \phi_i| = C \int_I |\phi|$$

par linéarité on a

$$g_\phi = \sum_{i=1}^p |S_i\phi|.g_{\phi_k} \ + \ g_\psi$$

Il suit de (7.6) et (7.7) que

$$M_r(g_\phi) \le \{\sum_{i=1}^{p} M_r(g_{\phi_k}) + CB"\} \int_I |\phi|$$

On peut réecrire cette inégalité sous la forme

$$M_r(g_\phi) \le B''' \int_I |\phi(t)|dt \tag{7.9}$$

pour toutes $\phi \in C_I^\infty$. Finalement on considère une suite de fonctions positives $(\phi_n)_n$ de C_I^∞ telles que leurs intégrales valent 1 et que les supports rétrecissent vers l'origine (de la forme $I_n = [-\delta/n, \delta/n]$. Alors pour tout α on a par continuité de $(D^\alpha g)$

$$D^\alpha(g_\phi)(0) = (D^\alpha g)_\phi(0) \to (D^\alpha g)(0)$$

Comme (7.9) est valable pour toute $\phi \in C_I^\infty$ on obtient

$$M_r(g) \le B'''$$

Or nous avons choisit $r < R_0$ arbitrairement donc c'est valable pour tout $r < R_0$ ce qui termine la preuve de la proposition et donc du lemme. □

Chapitre 8

Preuve de la version des distributions

Nous allons enfin démontrer le theorème 1.2 de l'introduction. On se donne f une fonction holomorphe sur $E + iV \cup E - iV$ (E,V comme dans l'énoncé du théorème) et que

$$\lim_{y \to 0} \int_E f(x+iy)\phi(x)dx \tag{8.1}$$

existe pour tout $\phi \in C_E^\infty$. On doit prouver que f s'étend en une fonction holomorphe sur Ω (qui apparait dans le théorème 1.1).

Soient Q et K des cubes compacts de $\mathbb{R}^n$ avec Q dans E, K centré en 0 et K assez petit tel que $Q + K \subset E$. Pour tout $\phi \in C_E^\infty$ on définit

$$(f * \phi)(z) = \int_K f(z-\xi)\phi(\xi)d\xi \tag{8.2}$$

avec x dans Q et y dans $(V \cup -V)$ et $z = x + iy$. On note Q^0 l'interieur de Q. Il est clair que $(f*\phi)$ est holomorphe sur $Q^0 + iV$ et sur $Q^0 - iV$ car f l'est sur E et $Q + K \subset E$. On prétend dans un premier temps que $(f * \phi)$ s'etend en une fonction continue sur $(Q^0 + iV) \cup Q^0 \cup (Q^0 - iV)$. Une fois ceci supposé on peut appliquer le théorème 1.1 (avec Q^0 à la place de E) qui nous dit qu'il existe Ω_Q dans $\mathbb{C}^n$ qui contient Q^0 où $f * \phi$ s'étend en une fonction holomorphe. On fixe x^0 dans Q^0, il existe y dans V si proche de 0 que si on pose $z^0 = x^0 + y$ il y a un polydisque $z^0 + rU^n$ qui est dans Ω_Q et qui contient donc x^0. On peut maintenant appliquer le lemme du chapitre 7, comme $f*g$ est développable en serie entiere sur $z^0 + rU^n$ elle a un rayon de convergence fini pour tout ϕ et donc on a la même affirmation pour f. En particulier on peut étendre l'holomorphie et donc la continuité de f en x^0.

En effet il existe f^+ dans Q^0 telle que pour y dans V on à $f(x^0 + iy) \to f^+(x^0)$ quand y tend vers 0. Comme on à choisit x^0 arbitrairement on à la convergence uniforme sur Q^0. On obtient de même la convergence vers $f^-(x^0)$ lorsque y est dans $-V$. Cependant d'après (8.1) on à la même limite pour y dans V ou -V, donc $f^+ = f^-$. On obtient donc bien une extension continue de f sur un ensemble Ω qui contient $(Q^0 + iV) \cup Q^0 \cup (Q^0 - iV)$. Comme on à choisit arbitrairement Q un cube inclus dans E, on à maintenant les hypothèses du théorème 1.1 sur f et donc on obtient bien l'extension holomorphique de f sur ω.

On va maintenant prouver ce que nous avons supposé plus haut c'est-à-dire que $f * \phi$ s'étend en une fonction continue sur $(Q^0 + iV) \cup Q^0 \cup (Q^0 - iV)$. On fixe $\phi \in C_K^\infty$. Pour chaque y dans $V \cup -V$ la fonction

$$\Lambda_y(\psi) = \int_E f(\xi + iy)\psi(\xi)d\xi$$

est une fonction linéaire et continue sur C^{∞}_{K+Q}. En effet

$$|\Lambda_y(\psi)| = |\int_E f(\xi+iy)\psi(\xi)d\xi| \leq \int_{supp(\psi)} f(\xi+iy)d\xi. \sup(\psi) \leq C. \sup(\psi)$$

D'après (8.1)

$$\Lambda\psi = \lim_{y\to 0} \Lambda_y(\psi)$$

existe pour tout $\phi \in C^{\infty}_{K+Q}$. On définit $\tau_x\phi$ par

$$(\tau_x\phi)(\xi) = \phi(x-\xi)$$

Comme ϕ est dans C^{∞}_K si $x \in Q$ on a $(\tau_x\phi) \in C^{\infty}_{K+Q}$ et (8.2) peut être mise sous la forme

$$(f * \phi)(z) = \Lambda_y(\tau_x\phi) \tag{8.3}$$

avec $x \in Q$ et $y \in V \cup (-V)$. En effet on fait un simple changement de variable (On pose $u = z - \xi - iy$ dans l'expression de $f * \phi$). Comme $x \mapsto \tau_x\phi$ est continue de Q dans C^{∞}_{K+Q}, pour une suite $(x_n)_n$ telle que $x_n \to x$, chaque dérivée $D^{\alpha}(\tau_{x_j}\phi)$ converge uniformément vers $D^{\alpha}(\tau_x\phi)$ Donc les fonctions $\tau_x\phi$ forment un espaces compacts de C^{∞}_{K+Q}. On peut donc appliquer le corollaire du théorème de Banach-Steinhaus qui implique que

$$\Lambda_y(\tau_x\phi) \to \Lambda(\tau_x\phi)$$

uniformément pour $\in Q$ quand $y \to 0$. Et donc par (8.3) on a convergence uniforme de $f * \phi$ sur Q lorsque $y \to 0$ et donc cela montre que l'on peut prolonger par continuité $f * \phi$ sur Q, ce qui termine la preuve du théorème.

Corollaire 8.1. *Supposons $W^+ = E + iV$ comme dans 1.1, f holomorphe sur W^+ et*

$$\lim_{y\to 0} \int_E f(x+iy)\phi(x)dx = 0$$

pour tout $\phi \in C^{\infty}_E$ alors f=0.

Démonstration. On prend $f(x+iy) = 0$ sur W^- et on applique le 1.2 et on obtient le résultat attendu. □

Chapitre 9

Preuve du théorème de reflexion

Le but de cette partie est de donner une preuve du théorème 1.3. Nous allons d'abord énoncer un lemme qui va nous servir dans la suite.

Lemme 9.1. *Si $f = u + iv$ est holomorphe sur $W^+ = E + iV$ et si*

$$\lim_{y \to 0} \int_E v(x+iy)\phi(x)dx \tag{9.1}$$

existe pour toute fonction ϕ à support compact dans E alors (9.1) *est aussi vraie pour u à la place de v.*

preuve. Choisissons K et Q comme dans le chapitre précédent. Si $\phi \in C_K^\infty$ et ϕ est réelle alors

$$f * \phi = (f * \phi)(z) = \int_K f(z-\xi)\phi(\xi)d\xi = u * \phi + i(v * \phi)$$

dans $Q + iV$. Si on utilise ce que nous avons fait dans la deuxième partie du chapitre précédent qui était une application du théorème de Banach-Steinhaus alors $v * \phi$ est continue et bornée sur Q (on remplace la fonction f par v). Deplus cela reste vraie pour des dérivées $\partial\phi/\partial x_j$ qui restent des fonctions à support compacts et à qui on peut appliquer Banach-Steinhaus. De plus, par propriété de la convolution on a

$$v * (\frac{\partial \phi}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial x_j}(v * phi)$$

Il suit que comme $f * \phi$ est holomorphe, par les équations de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(v * phi) - \frac{\partial}{\partial y_j}(u * phi)$$

. Et donc les dérivées par rapport à y de $u * \phi$ sont aussi continues et bornées sur Q, ce qui implique la même chose pour $u * \phi$ ainsi

$$\lim_{y \to 0} \int_E u(x+iy)\phi(x)dx$$

existe aussi et donc cela termine la preuve du lemme. □

Preuve du théorème 1.3. Par hypothèse on se place maintenant dans le cas où la limite dans (9.1) existe et vaut 0. Si on définie f sur W^- par

$$f(z) = u(\bar{z}) - iv(\bar{z})$$

alors en appliquant le lemme on obtient la conclusion du théorème 1.3. En effet par hypothèse u et v sont holomorphes sur W^+ et donc $z \mapsto u(\bar{z}) - iv(\bar{z})$ est holomorphe sur W^- (car $\bar{z} \in W^+$). Et donc on à bien d'après le lemme

$$\lim_{y \to 0} \int_E f(x+iy)\phi(x)dx$$

existe avec $y \to 0$ dans $V \cup (-V)$. On obtient donc F une extension de f telle que $f = F$ sur tout le domaine de f.

De plus avec f definie comme ce-dessus sur W^- on a

$$f(z) = F(z) = u(\bar{z}) - iv(\bar{z}) \Rightarrow F\bar{(}z) = u(\bar{z}) + iv(\bar{z}) = f(\bar{z}) \quad (pour\ z \in W^-)$$

On a donc bien la condition vérifiée par F sur W^-.

$\square$

Chapitre 10

Application dans les polydisques

La notation U^n désigne comme précédemment le polydisque unitaire avec $|z_n| < 1$. Pour toute fonction f sur U^n on lui associe $\tilde{f}$ sur $\mathbb{R}^n + i\mathbb{R}^n_+$ par

$$\tilde{f}(z_1, .., z_n) = f(e^{iz_1}, ..., e^{iz_n})$$

On peut aussi l'écrire sous la forme

$$\tilde{f}_y(x) = f_r(w) \quad ou \quad \tilde{f}(x + iy) = f(rw)$$

où

$$x = (x_1, .., x_n), \quad -\infty < x_j < \infty$$

$$y = (y_1, .., y_n), \quad y_j > 0$$

$$r = (r_1, .., r_n), \quad 0 < r_j < 1$$

$$w = (w_1, .., w_n), \quad |w_j| = 1$$

$$rw = (r_1 w_1, .., r_n w_n)$$

Dans ce chapitre r va donc toujours être un point d'un cube ouvert de $\mathbb{R}^n$ et w un point du tore unitaire $T^n = S^1 \times ... \times S^1$. Donc f_r est définie sur T^n. Le changement de variable $z \mapsto e^{iz}$ va de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$ et est localement une bijection. Donc toute extension holomorphe de $\tilde{f}$ va correspondre une extension pour f.
Soit $E \subset T^n$ et $0 < \delta < 1$, on va noter $[E, \delta]$ l'ensemble des rw avec $w \in E$ et $\delta, r_j < 1$. Si E est un ouvert et si f est défini dans un $[E, \delta]$, on dit que f possède une limite au sens des distributions si

$$lim \int_E f_r(w)\phi(w)dm_n(w)$$

existe pour tout $\phi \in C^\infty(T^n)$ lorsque $r_j \to 1$. Ici m_n est la mesure de Lebesgue normalisée sur T^n. Supposons que f est holomorphe sur U^n telle que

$$f(z) = \sum_\alpha c(\alpha) z^\alpha \tag{10.1}$$

On dit que f à des coefficients "polynomialement bornés" si il existe $M < \infty$ tel que $|c(\alpha)|.|\alpha| - M$ est borné lorsque $|\alpha| \to \infty$.

Théorème 10.1. *Les propositions suivantes pour une fonction f holomorphe sur U^n sont équivalentes :*

(i) f a des coefficients "polynomialement bornés".

(ii) f a une limite au sens des distributions sur T^n.

(iii) Il existe une suite de r tendant vers $(1,...1)$ telle que (10.1) converge pour tout $\phi \in C^\infty(T^n)$.

preuve. Si $f(z) = \sum\limits_\alpha c(\alpha) z^\alpha$ et $\phi \in C^\infty(T^n)$ a des coefficients de Fourier notés $\overset{\wedge}{\phi}$ alors

$$\int_{T^n} f_r(w)\phi(\bar{w})dm_n(w) = \sum_\alpha c(\alpha)\overset{\wedge}{\phi}(\alpha) r^\alpha$$

en effet

$$\int_{T^n} f_r(w)\phi(\bar{w})dm_n(w) = \int_{T^n} \sum_\alpha c(\alpha) r^\alpha w^\alpha \phi(\bar{w})dm_n(w) = \sum_\alpha c(\alpha) r^\alpha \int_{T^n} w^\alpha \phi(\bar{w}) dm_n(w)$$

on peut écrire w sous la forme $w = (e^{-i\theta_1}, ..., e^{-i\theta_n})$ ce qui donne

$$\int_{T^n} w^\alpha \phi(\bar{w})dm_n(w) = \int_{-\pi}^{\pi} \times .... \times \int_{-\pi}^{\pi} ((e^{-i\theta_1\alpha_1}, ..., e^{-i\theta_n\alpha_n})\phi(\bar{w}_1, ..., \bar{w}_n) dm(\theta_1)...dm(\theta_n)$$

Ici on a $dm(\theta_i) = 1/\sqrt{2\pi} d\theta_i$ et donc on a bien la définition des coefficients de Fourier et

$$\int_{T^n} w^\alpha \phi(\bar{w}) dm_n(w) = \overset{\wedge}{\phi}(\alpha)$$

Comme $\phi \in C^\infty(T^n)$ on sait par propriété des coefficients de Fourier que $|\overset{\wedge}{\phi}(\alpha)| \to 0$ plus rapidement que n'importe quelle puissance de $|\alpha|^{-1}$ Si on suppose que (i) est vraie alors il existe M et k finis tels que $|c(\alpha)| \leq k|\alpha|^M$ et donc $|c(\alpha)\overset{\wedge}{\phi}(\alpha)| \leq |k||\alpha|^M|\overset{\wedge}{\phi}(\alpha)| \to 0$ quand α tend vers l'infini et donc $\sum |c(\alpha)\overset{\wedge}{\phi}(\alpha)| < \infty$ ce qui clairement implique (ii) et (ii) implique (iii). Si (i) est fausse alors il existe des multi-indices $\alpha(s)$, pour $s = 1, 2, ...$, tels que $|c(\alpha(s))| > |\alpha(s)|^s$ On pose

$$\phi(w) = \sum_{s=1}^{\alpha} \theta_s |\alpha(s)|^{-s} \bar{w}^{\alpha(s)}$$

où $\theta_s c(\alpha(s)) = |c(\alpha(s))|$ On a bien $\phi \in C^\infty(T^n)$ et

$$\int_{T^n} f_r . \phi dm_n = \sum_{s=1}^{\infty} |c(\alpha(s))||\alpha(s)|^{-s} r^{\alpha(s)} > \sum_{s=1}^{\infty} r^{\alpha(s)} \quad (car\ |c(\alpha(s))| > |\alpha(s)|^s)$$

qui tend vers l'infini lorsque $r \to (1, ..., 1)$ et donc on a pas (iii), par négation on a bien (iii) implique (i) □

Nous allons maintenant voir un théorème d'extension holomorphique un peu différents où cette fois ci on travaille avec U^n et V^n avec V contient les z tels que $|z_j|$ pour tout j et E dans T^n.

Théorème 10.2. *Pour tout ouvert $E \subset T^n$ il existe un Ω dans $\mathbb{C}^n$ avec les propriétés suivantes*

(i) Ω contient $U^n \cup E \cup V^n$

(ii) si $f = u + iv$ est holomorphe sur U^n et v à une limite au sens des distributions qui vaut 0 sur E alors f s'étend en une fonction holomorphe sur Ω.

Preuve. Il est clair que c'est un simple corollaire du théorème 1.3 en effet si f verifie de telles conditions alors on peut appliquer le 1.3 à $\widetilde{f}$ et donc on peut étendre $\widetilde{f}$ holomorphiquement et comme il n'y qu'un changement de variable entre f et $\widetilde{f}$ on peut aussi trouver un extension holomorphe de f. □

Le théorème 10.1 implique que si f dans (ii) a ses coefficients "polynomialement bornés" alors l'hypothèse sur v peut être affaiblie et il est suffisant de supposer que $v_r \to 0$ au sens des distributions pour une certaine suite de r qui tend vers (1,...,1).

Chapitre 11

Généralisation d'Epstein

Dans ce chapitre nous allons nous placer dans cas plus général que ce que nous avons vu précédemment, en effet nous allons maintenant consiérer deux cônes ouverts de $\mathbb{R}^n$ S_1 et S_2 et nous appelons respectivement V_1 et V_2 leurs intersections avec des boules quelconques centrées à l'origine. Notons que V_1 n'a pas besoin d'intersecter $-V_2$.

Théorème 11.1. *Avec E,V_1 et V_2 comme ci-dessus il existe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ qui possède les propriétés suivantes*

(i) toute fonction f holomorphe sur

$$W = (E + iV_1) \cup (E + iV_2)$$

et continue sur $W \cup E$ s'étend en une fonction holomorphe sur Ω continue sur $\Omega \cup E$.

(ii) Tout point de E est le centre d'une boule B de $\mathbb{C}^n$ telle que Ω contienne l'intersection de B et de l'enveloppe convexe de W.

On à aussi une version de ce théorème au sens des distributions mais nous allons seulement considérer le cas continue. On peut se placer dans un cas special comme dans la démonstration du théorème 1.1, en effet le problème est invariant par transformation linéaire de $\mathbb{C}^n$. Nous allons nous placer dans le cas special suivant :

Théorème 11.2. *Soit t>1 et K est l'ensemble des points $x + iy$ de $\mathbb{C}^n$ tels que leurs coordonnée satisfont*

(i) $|x_j| \leq 1$ *pour* $1 \leq j \leq n$,

(ii) $|y_j| \leq y_1 \leq 1$ *pour*$2 \leq j \leq n$,

(iii) $y_1 \leq t|y_2|$.

De même on définit H l'ensemble des points qui vérifient

(iv) $|x_j| \leq 1/5$ *pour* $1 \leq j \leq n$,

(v) $|y_j| \leq y_1 \leq 1/5$ *pour* $2 \leq j \leq n$.

Supposons que f est continue sur K et holomorphe sur un ensemble qui contient K sauf peut être les points où y vaut 0. Alors il existe une fonction F continue sur H et holomorphe sur son interieur telle que $F(z) = f(z)$ sur $H \cap K$ et $\underset{z \in H}{max} |F(z)| \leq \underset{z \in K}{max} |f(z)|$.

Le théorème précédent est une donc une conséquence de celui-ci. Il y a assez peu de différences entre H et K sauf dans le plan (y_1, y_2) à cause de la condition (iv) ce qui rend l'inerieur de K non connexe. H ne possédant pas une telle condition est donc convexe. Pour démontrer le théorème nous allons utiliser une certaine fonction biholomorphe Φ dans $\mathbb{C}^n$ qui transforme f en une fonction

$g = f \circ \Phi^{-1}$, définie sur $\Phi(K)$. Les propriétés de Φ sont telles que la formule intégrale de Cauchy pourra être utilisée pour construire une extension continue G de g sur $\Phi(H)$ et et $F = G \circ \Phi$ sera l'extension voulue.
Nous allons maintenant construire Φ La transformation $w = \Phi(z)$ est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{lcl} w_1 & = & z_2^2 - iz_1 \\ w_j & = & z_j \end{array} \right. \tag{11.1}$$

pour $2 \leq j \leq n$ On obtient donc le système suivant pour z

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_1 & = & i(w_1 - w_2^2) \\ z_j & = & w_j \end{array} \right. \tag{11.2}$$

pour $2 \leq j \leq n$ On voit donc que Φ et Φ^{-1} amène $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}^n$. Si $z_j = x_j + iy_j$ et $w_j = u_j + iv_j$ alors (11.1) et (11.2) nous donnent

$$u_1 = x_2^2 - y_2^2 + y_1 \quad , \quad v_1 = 2x_2y_2 - x_1$$

et

$$y_1 = v_2^2 - u_2^2 + u_1 \quad , \quad x_1 = 2u_2v_2 - v_1 \tag{11.3}$$

On va maintenant introduire une famille de courbes planes $\Gamma(s,u)$ avec $1 \leq s \leq t$ et $0 \leq u \leq 1/4$. Et $\Gamma(s,u)$ paramétrisée par

$$\Gamma(s,u)(\theta) = \sqrt{u}\cos\theta + 2iu|\sin\theta|\sin\theta/(s + \sqrt{s^2 - 4u\sin^2\theta}),$$

avec $-\pi \leq \theta \leq \pi$. On voit que quand $u = 0$ on a juste l'origine et quand $u > 0$ on a de simple courbes fermées. On remarque cependant que si $w_2 = u_2 + iv_2$ est dans $\Gamma(s,u_1)$ alors il existe θ_0 tel que

$$w_2 = \Gamma(s,u)(\theta_0) = \sqrt{u_1}\cos\theta_0 + 2iu_1|\sin\theta_0|\sin\theta_0/(s + \sqrt{s^2 - 4u_1\sin^2\theta_0})$$

On obtient donc le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_2 & = & \sqrt{u_1}\cos\theta_0 \\ v_2 & = & 2u_1|\sin\theta_0|\sin\theta_0/(s + \sqrt{s^2 - 4u_1\sin^2\theta_0}) \end{array} \right.$$

On obtient finalement

$$v_2^2 - u_2^2 + u_1 = s|v_2|. \tag{11.4}$$

Si $w = \Phi(z)$ alors (11.3) et (11.4) montrent que $y_1 = s|y_2|$ De plus on voit que que si $r < s$ alors $\Gamma(s,u)$ vit dans l'interieur de $\Gamma(r,u)$ sauf pour $\theta = 0, \pi, -\pi$ On va maintenant définir trois ensembles A_1,A_2 et A_3. Le point $w = (w_1, .., w_n)$ appartient à A_1 si et seulement si

(i) $0 \leq u_1 \leq 1/4$,$|v_1| \leq 1/2$,

(ii) $|u_j| \leq 1$,$|v_j| \leq u_1 - u_2^2 + v_2^2$ pour $3 \leq j \leq n$,

(iii) w_2 vit dans l'union des courbes $\Gamma(s,u_1)$, $1 \leq s \leq t$.
Il appartient à A_2 si il verifie (i), (ii) et

(iv) w_2 vit dans l'interieur de $\Gamma(1,u_1)$ ou sur $\Gamma(1,u_1)$, Il appartient à A_3 si il verifie (i), (ii) et

(v) w_2 vit en dehors de $\Gamma(1,u_1)$.

Ces ensembles ont été définit de sortes que

$$A_1 \subset \Phi(K) \ \ et \ \ \Phi(H) \subset A_2$$

Si on suppose maintenant que $w = \Phi(z)$ est dans A_1, alors $|u_2| \leq 1/2$ et $|v_2| \leq 1/2$, par (iii). Deplus avec (i) et (11.3) on a $|x_1| \leq 1$ et $y_1 \leq 1/2$; (ii) nous dit que $|x_j| \leq 1$, $|y_j| \leq y_1$ pour $3 \leq j \leq n$. Aussi $|x_2| = |u_2| \leq 1/2$; (11.4) et (iii) montrent que $y_1 = s|y_2|$ et donc $z \in K$ On va maintenant montrer que $\Phi(H) \subset A_2$. Soit $z \in H$ et $w = \Phi(z)$ alors (iv) et (v) nous donnent

$$u_1 \leq x_2^2 + y_1 \leq 1/25 + 1/5 < 1/4,$$

$$u_1 \geq y_1 - y_2^2 \leq y_1 - |y_2| \geq 0,$$

$$|v_1| \leq 2|2|x_2 y_2| + |x_1| \leq 2/25 + 1/5 < 1/2$$

on a donc bien (i) qui est vérifiée ; (v) implique (ii) et $|y - 2| \leq y_1$ nous donne (iii). Et donc on à bien $w \in A_2$

On définie maintenant g de la manière suivante

$$g(\Phi(z)) = f(z)$$

pour tout z dans le domaine de définition de f, et donc d'après 11 g est continue sur A_1 et holomorhe sur son interieur. Le but maintenant est de trouver une extension pour g, on va considérer les integrales

$$G_2(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(1,u_1)} \frac{g(w_1, \xi, ..., w_n)}{\xi - w_2} d\xi \tag{11.5}$$

pour tout w dans l'interieur de A_2, et

$$G_3(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma(t,u_1)} \frac{g(w_1, \xi, ..., w_n)}{\xi - w_2} d\xi \tag{11.6}$$

pour tout w dans l'interieur de A_3 Dans l'interieur de A_2 et A_3 on a $u_1 > 0$, on voit que comme dans (11.5) et (11.6) les integrandes sont holomorphe (en leur deuxième variables ,w_2 n'appartient pas aux chemins en question alors sur l'intersection de A_2 et A_3 on peut appliquer la formule integrale de Cauchy et on obtient $g = G_2 - G_3$. Il est donc clair que G_2 est holomorphe en $(w_2, ..., w_n)$ mais on ne sait pas encore ce qu'il en est pour w_1 car $\Gamma(1, u_1)$ en dépend. Pour remédier à cela on pose

$$\psi(w_1, \xi) = \frac{g(w_1, \xi, ..., w_n)}{\xi - w_2}$$

$(w_3, ..., w_n)$ sont fixés et on écrit

$$\lambda(u_1, \theta) = \Gamma(1, u_1)(\theta) \tag{11.7}$$

on peut donc réecrire (11.5) en faisant un changement de variable

$$G_2(w) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(w_1, \lambda(u_1, \theta)).D_2\lambda(u_1, \theta) d\theta \tag{11.8}$$

où D_2 est la dérivation par rapport à la deuxième variable. ψ est bien une fonction holomorphe en ses deux variables et on se rappelle que à part pour $\theta = 0, \pi, -\pi$ il y avait holomorphie de l'integrande dans (11.5) et donc maintenant dans (11.8). A part pour un tel θ on peut appliquer l'opérateur de Cauchy-Riemann $(\partial/\partial u_1 + i\partial/\partial v_1)$ à l'integrande dans (11.8). La règle de la dérivation en chaine donne

$$D_2\psi.D_1\lambda.D_2\lambda + \psi.D_1 D_2\lambda = \frac{\partial}{\partial\theta}(\psi(w_1, \lambda(u_1, \theta)).D_1\lambda(u_1, \theta)) \tag{11.9}$$

Il suit de (11.7) que l'integrale entre $-\pi$ et $-\pi$ de l'expression (11.9) vaut 0. Et donc comme on peut appliquer la dérivation sous le signe integrale $(\partial/\partial u_1 + i\partial/\partial v_1)G_2 = 0$ et donc G_2 est holomorphe en w_1 et donc en toute ses variables. De la même manière on montre que G_3 est holomorphe. Soit maintenant w un point de l'interieur de A_3 tel que $|u_2| < |v_2|$ et $|v_j| < v_2^2 - u_2^2$ pour $3 \leq j \leq n$. On garde $v_1, w_2, ..., w_n$ fixés et on fait tendre u_1 vers 0. w reste dans l'interieur de A_3 aussi longtemps que $u_1 > 0$, la longueur de $\Gamma(t, u_1)$ va donc tendre vers 0. L'integrande dans (11.6) restant bornée on à que G_3 vue comme une fonction de w_1 seulement tend vers 0 sur un coté du rectangle dans (i) et donc G_3 étant holomorphe elle est donc nulle. Et donc G_2 est une extension holomorphe de g sur l'interieur de A_2, en combinant (11.5) avec le principe du maximum on voit que la borne supérieure de G_2 n'est pas plus grande que celle de g sur A_1. Si on pose maintenant $F(z) = G_2(\Phi(z)$ on obtient bien notre extension voulue de f. Il reste juste à montrer que F s'étend de façon continue sur les points réels de H. On prend $x = 0$ et on suppose sans perte de généralité que $f(x) = 0$, en appliquant le résultat précédant à un ensemble K' contenu dans K où $|f| < \epsilon$ et en appliquant le principe du maximum on obtient que $|F| < \epsilon$ sur l'interieur K'. Ceci prouve la continuité et termine la preuve du théorème.

Bibliographie

[1] Walter Rudin, *Lectures on the edge-of-the-wedge theorem*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1971. Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Mathematics, No. 6. MR0310288 ↑

[2] ———, *Functional analysis*, 2nd ed., International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991. MR1157815 ↑

[3] Michael Reed and Barry Simon, *Methods of modern mathematical physics. II. Fourier analysis, self-adjointness*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1975. MR0493420 ↑

[4] ———, *Methods of modern mathematical physics. I. Functional analysis*, Academic Press, New York-London, 1972. MR0493419 ↑