Université Grenoble Alpes

Rapport de Stage M2R

Catégories dérivées des modules différentiels gradués sur des algèbres différentielles graduées

---

Réalisé par
Najib Mazid

Sous la direction de
Estanislao Herscovich

Table des matières

Introduction

Avant même de présenter le sujet et le matériel traité dans ce mémoire, je voudrais transmettre les intentions de celui-ci. L'objectif de ce travail n'était pas d'établir de nouveaux résultats, mais plutôt de fournir une exposition basée sur le livre d'Amnon Yekutieli, *Derived Categories* ([8]). Dans mes recherches, j'ai suivi de près l'approche de Yekutieli, fournissant des preuves aux exercices qu'il présente et incorporant mes propres observations et remarques supplémentaires qui m'ont aidé à comprendre le sujet. J'ai cherché à améliorer la compréhension des catégories dérivées et des concepts connexes, dans l'espoir que ces modifications s'avéreront utiles pour d'autres personnes cherchant à saisir les subtilités du sujet. Je voudrais également donner quelques références qui m'ont été utiles ; [4],[2],[7] et [5] entre autres.

Les catégories dérivées ont été introduites par A. Grothendieck et J.-L. Verdier vers 1960. L'idée de base était la suivante. Ils s'étaient rendu compte que les foncteurs dérivés de l'algèbre homologique classique sont trop limités pour permettre plusieurs manipulations assez naturelles. Peut-être que l'opération la plus importante qui manquait était la composition des foncteurs dérivés ; la meilleure approximation en était la suite spectrale.

La solution du problème était d'inventer une nouvelle catégorie, à partir d'une catégorie abélienne donnée M, comme moyen d'avoir les informations homotopiques des complexes et de capturer les propriétés cohomologiques essentielles. Les objets de cette nouvelle catégorie sont les complexes d'objets de M. Ce sont les mêmes complexes qui jouent un rôle auxiliaire dans l'algèbre homologique classique, comme résolutions d'objets de M. Les complexes forment une catégorie $\mathbf{C}(\mathrm{M})$, mais cette catégorie n'est pas suffisamment complexe pour porter en elle l'information des foncteurs dérivés, elle doit donc être modifiée. La modification nécessaire est de rendre les, un certaine classe de morphismes, le quasi-isomorphismes, inversibles. Ceci est fait par une procédure formelle de localisation, et la catégorie résultante est la catégorie dérivée $\mathbf{D}(\mathrm{M})$.

L'étape suivante consiste à dire ce qu'est un foncteur dérivé à gauche ou à droite d'un foncteur additif $F\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$. Le foncteur F peut être étendu de manière évidente à un foncteur sur les complexes $F\colon \mathbf{C}(\mathrm{M}) \to \mathbf{C}(\mathrm{N})$. Un foncteur dérivé à droite de F est un foncteur $\mathrm{R}F\colon \mathbf{D}(\mathrm{M}) \to \mathbf{D}(\mathrm{N})$, ainsi qu'un morphisme de foncteurs $\eta^{\mathrm{R}}\colon Q_{\mathrm{N}} \circ F \to \mathrm{R}F \circ Q_{\mathrm{M}}$. La paire $(\mathrm{R}F, \eta^{\mathrm{R}})$ doit être initiale parmi toutes ces paires. L'unicité d'un tel foncteur, à isomorphisme unique près, est relativement facile à prouver. Quant à l'existence de $\mathrm{R}F$, elle repose sur l'existence de résolutions appropriées.

Voilà pour ce que sont les catégories dérivées et les foncteurs dérivés. Quant à l'importance des catégories dérivées, elle ne peut être surestimée, elle a eu des impacts significatifs dans la géométrie algébrique (non commutative), la théorie des représentations, la topologie algébrique, la géométrie analytique, l'analyse algébrique et la théorie des D-modules, la théorie des singularités, la physique mathématique, etc. menant à des résultats intéressants des domaines tels que l'étude des espaces de modules, la géométrie birationnelle, la symétrie miroir et le programme de Langlands entre de nombreux autres.

Dans ce texte on s'intéressera à l'étude des constructions fondamentales en algèbre homologique dans le cadre différentiel gradué. L'objectif principal étant d'explorer le langage général des catégories triangulées et le calcul des fractions à travers les localisations Ore dans le contexte catégoriel, dans le but de construire des catégories dérivées. Ces catégories dérivées jouent un rôle crucial dans la compréhension de la catégorie d'homotopie et de la catégorie dérivée des modules différentiels gradués sur une algèbre différentielle graduée d'objets dans une catégorie abélienne. De plus, on étudiera les foncteurs dérivés définis sur ces catégories et on examinera l'existence de résolutions K-projectives et K-injectives dans divers cas.

1. Rappels sur les Catégories

Dans ce chapitre on va revoir le matériel nécessaire et établir la notation qu'on utilisera dans la suite.

1.1. **Théorie des Ensembles.**

On ne va pas s'intéresser à préciser les problèmes découlant de la théorie des ensembles. L'hypothèse générale est qu'on se donne un *univers de Grothendieck* $\mathbf{U}$, c'est-à-dire un "grand" ensemble infini. Un *ensemble petit*, ou un ensemble $\mathbf{U}$-petit, est un ensemble S qui est un élément de $\mathbf{U}$. On veut que tout les produits $\prod_{i \in I} S_i$ ainsi que toutes les unions disjointes $\coprod_{i \in I} S_i$ avec I et S_i des ensembles petits, soient également des ensembles petits. On suppose que l'axiome du choix est vrai dans $\mathbf{U}$.

Une $\mathbf{U}$-*catégorie* est un catégorie C dont l'ensemble des objets $\mathrm{Ob}(\mathrm{C})$ est un sous-ensemble de $\mathbf{U}$, et pour tout $C, D \in \mathrm{Ob}(\mathrm{C})$ l'ensemble des morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(C, D)$ est petit. Si $\mathrm{Ob}(\mathrm{C})$ est aussi petit, alors C est une *catégorie petite*.

On note Set la catégorie des ensembles petits. Ainsi, $\mathrm{Ob}(\mathrm{Set}) = \mathbf{U}$, et Set est une $\mathbf{U}$-catégorie. Un groupe (ou un anneau, etc.) est dit petit si l'ensemble sous-jacent est petit. On note Grp, Ab, Rng et $\mathrm{Rng}_{\mathrm{c}}$ les catégories des groupes petits, des groupes abéliens petits, des anneaux petits et des anneaux commutatif petits respectivement. Pour un anneau A petit, on note $\mathrm{Mod}\, A$ la catégorie des petits A-modules à gauche.

Dans la suite on travaille avec des $\mathbf{U}$-catégories, et à partir de maintenant, $\mathbf{U}$ restera implicite. Il y aura certains moments ou on fera face à des problèmes relatifs à la théories des ensembles (concernant les catégories de foncteurs et la localisation des catégories), mais ces problèmes peuvent être résolus en introduisant un univers plus grand, $\mathbf{V}$ tel que $\mathbf{U} \in \mathbf{V}$.

1.2. **Notations et Conventions.**

Soit C une catégorie. On écrira souvent $C \in \mathrm{C}$ pour abréger $C \in \mathrm{Ob}(\mathrm{C})$. Pour un objet C, son automorphisme d'identité est noté id_C. Le foncteur identité de C est noté Id_{C}.

La catégorie opposée de C est C^{op}. Elle a les mêmes objets que C, mais les ensembles des morphismes sont $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}^{\mathrm{op}}}(C_0, C_1) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(C_0, C_1)$, et la composition est renversée. Le foncteur identité de C peut être vu comme un foncteur contravariant $\mathrm{Op}\colon \mathrm{C} \to \mathrm{C}^{\mathrm{op}}$, plus précisément, sur les objets, $\mathrm{Op}(C) := C$ et sur les morphismes, $\phi\colon C_0 \to C_1$ dans C on pose $\mathrm{Op}(\phi)\colon \mathrm{Op}(C_1) \to \mathrm{Op}(C_0)$ comme étant le morphisme $\mathrm{Op}(\phi) := \phi$ dans C^{op}. Le foncteur inverse $\mathrm{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{C}$ est également noté Op. On a alors $\mathrm{Op} \circ \mathrm{Op} = \mathrm{Id}$.

Définition 1.2.1. Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif. Par *anneau* $\mathbb{K}$*-central*, on veut dire un anneau A et un morphisme d'anneau $\mathbb{K} \to A$, appelé morphisme structurel, tel que l'image de $\mathbb{K}$ soit dans le centre de A.

La catégorie des anneaux $\mathbb{K}$-centraux, dont les morphismes sont les morphismes d'anneaux $f\colon A \to B$ respectant les morphismes structurels, est notée $\mathrm{Rng}/_c\mathbb{K}$

Traditionnellement, un anneau $\mathbb{K}$-central était appelé une "$\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire". Bien sûr, les anneaux et les morphismes d'anneaux sont unitaire. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, un anneau $\mathbb{K}$-central est tout simplement un anneau, et on utilise alors la notation Rng.

Exemple 1.2.2. Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif non nul, et n un entier positif. Alors $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$, l'anneau des matrices $n \times n$ à coefficient dans $\mathbb{K}$ est un anneau $\mathbb{K}$-central.

Définition 1.2.3. Soit A un anneau. On note $\mathrm{Mod}\, A$ ou $\mathbf{M}(A)$ la catégorie des A-modules à gauche.

Les anneaux et les modules vont jouer un rôle essentielle dans la suite, donc on va mettre en place certaines conventions.

Convention 1.2.4. Voici un liste des hypothèses implicites pour les structures et les opérations linéaires :

(1) Il y a un anneau commutative non nul de base $\mathbb{K}$ (e.g. l'anneau des entier $\mathbb{Z}$ ou un corps).

(2) Le symbole du produit tensoriel sans indice $\otimes$ correspond à $\otimes_{\mathbb{K}}$.

(3) Tout les anneaux sont $\mathbb{K}$-centraux (c.f. Définition 1.2.1), tout les morphismes d'anneau sont sur $\mathbb{K}$ et tout les bimodules sont $\mathbb{K}$-centraux.

(4) Généralisant (3), toute catégorie linéaire est $\mathbb{K}$-linéaire (c.f. Définition 2.1.1) et tout foncteur linéaire est $\mathbb{K}$-linéaire (c.f. Définition 2.5.1).

(5) Pour un anneau A, tout A-module est un A-module à gauche, sauf si précisé autrement.

Les A-modules à droite sont des modules à gauche sur l'anneau opposé A^{op}, et c'est de cette façon dont on va les traiter la plupart du temps. Morphismes dans la catégorie des groupes, anneaux, A-modules, etc. vont être appelés morphismes de groupe, d'anneau, de A-module, etc. respectivement.

Convention 1.2.5. On essaiera de suivre la convention suivante pour les lettres et la police :

- $f\colon C \to D$ est un morphisme entre des objets d'une catégorie.
- $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ est un foncteur entre des catégories.
- $\eta\colon F \to G$ est un morphisme de foncteurs (i.e. une transformation naturelle), entre des foncteurs $F, G\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$.
- $\phi, \psi, \phi_i\colon M \to N$ sont des morphismes entre des objets dans une catégorie abélienne M.
- $F\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est un foncteur linéaire entre des catégories abéliennes.
- La catégorie des complexes dans in catégorie abélienne M est $\mathbf{C}(\mathrm{C})$.
- Si M est une catégorie module, et $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{M})$, alors les éléments de M sont notés m, n, m_i, etc.

1.3. **Épimorphismes et Monomorphismes.**

Soit C une catégorie. On rappelle qu'un morphisme $f\colon C \to D$ dans C est un *isomorphisme* s'il y a un morphisme $g\colon D \to C$ tel que $f \circ g = \mathrm{id}_D$ et $g \circ f = \mathrm{id}_C$. Le morphisme g est appelé l'*inverse* de f, est unique (s'il existe) et est noté f^{-1}. Un isomorphisme est souvent noté par le type de flèche suivant : $f\colon C \xrightarrow{\simeq} D$.

Un morphisme $f\colon C \to D$ dans C est un *épimorphisme* s'il a la propriété d'être régulier à droite : pour tout $g, g'\colon D \to E$, $g \circ f = g' \circ f$ implique $g = g'$. Un épimorphisme est souvent représenté par une flèche du type : $f\colon C \twoheadrightarrow D$.

Un morphisme $f\colon C \to D$ dans C est un *monomorphisme* s'il a la propriété d'être régulier à gauche : pour tout $g, g'\colon D \to E$, $f \circ g = f \circ g'$ implique $g = g'$. Un épimorphisme est souvent représenté par une flèche du type : $f\colon C \hookrightarrow D$.

Exemple 1.3.1. Dans Set les monomorphismes sont exactement les injections et les épimorphismes sont exactement les surjections. Un morphisme $f\colon C \to D$ dans Set qui est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme est un isomorphisme. Le résultat est également vrai dans la catégorie $\mathrm{Mod}\,A$ des A-modules à gauche sur A.

Cependant, cet example peut être trompeur, puisque la propriété d'être un épimorphisme n'est souvent pas préservée par le foncteur d'oubli. En effet, si on ce place dans la catégorie des anneaux Rng, alors le foncteur d'oubli, Rng $\to$ Set, conserve clairement les monomorphismes. Mais si on considère l'inclusion $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$, qui est un épimorphisme dans Rng, n'est pas une surjection dans Set et donc le foncteur oubli ne préserve pas les épimorphismes. Remarquons au passage, qu'on a les épimorphismes ne coïncident pas au surjections d'anneaux dans Rng.

Par *sous-objet* d'un objet $C \in \mathrm{C}$, on veut dire un monomorphisme $f\colon C' \hookrightarrow C$ dans C. Dans ce cas, on écrit souvent $C' \subseteq C$, mais ce n'est qu'un notation et ne veut pas dire qu'il y a un inclusion en tant qu'ensembles. On dit que deux sous-objets $f_0\colon C'_0 \hookrightarrow C$ et $f_1\colon C'_1 \hookrightarrow C$ de C sont isomorphes, s'il existe un isomorphisme $g\colon C'_0 \to C'_1$ tel que $f_1 \circ g = f_0$.

De façon analogue, par *quotient* de C on veut dire un épimorphisme $g\colon C \twoheadrightarrow C''$ dans C. De la même façon, on a la notion de quotients isomorphes.

On a les résultats suivants qui sont faciles à voir :

Proposition 1.3.2. *Soit* C *un catégorie et C un objet de* C.

(1) Supposons avoir $f_0\colon C'_0 \hookrightarrow C$ et $f_1\colon C'_1 \hookrightarrow C$ des sous-objets de C. Alors, il y a au plus un morphisme $g\colon C'_0 \to C'_1$ tel que $f_1 \circ g = f_0$. De plus, si un tel morphisme existe, alors il est un monomorphisme.

(2) Être isomorphe est un relation d'équivalence sur l'ensemble des sous-objets de C. De plus, l'ensemble des classes d'équivalence des sous-objets de C est partiellement ordonné par "l'inclusion".

(3) On a des résultats analogues pour les quotients.

Un *objet initial* dans une catégorie C est un objet $C_0 \in \mathrm{C}$, tel que pour tout objet $C \in \mathrm{C}$ il existe exactement un morphisme $C_0 \to C$. Ainsi l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(C_0, C)$ est un singleton. Un *objet terminal* dans C est un objet $C_\infty \in \mathrm{C}$, tel que pour tout objet $C \in \mathrm{C}$ il existe exactement un morphisme $C \to C_\infty$.

Définition 1.3.3. Un *objet nul* dans une catégorie C est un objet qui est à la fois initial et terminal.

Les objets initiaux, terminaux et nuls sont uniques à isomorphisme unique près (mais ils n'existent pas nécessairement).

Exemple 1.3.4. Dans Set, $\emptyset$ est un objet initial et chaque singleton est un objet terminal. Il n'y a pas d'objet nul.

Exemple 1.3.5. Dans $\mathrm{Mod}\,A$, chaque module trivial (contenant uniquement l'élément nul) est un objet nul, et on le note 0. Ceci est autorisé, puisque tout autre module nul lui est isomorphe de façon unique.

1.4. **Produits et Coproduits.**

Soit C une catégorie. Par une *collection d'objets* de C indexée par un (petit) ensemble I, on entend une fonction $I \to \mathrm{Ob(C)}$, $i \mapsto C_i$. On dénote habituellement cette collection par : $\{C_i\}_{i\in I}$.

Étant donné une collection $\{C_i\}_{i\in I}$ d'objets de C, son *produit* est un couple $(C, \{p_i\}_{i\in I})$ constitué d'un objet $C \in \mathrm{C}$, et d'une collection $\{p_i\}_{i\in I}$ de morphismes $p_i\colon C \to C_i$, appelées projections. Le couple $(C, \{p_i\}_{i\in I})$ doit avoir la propriété universelle suivante : étant donné un objet D et des morphismes $f_i\colon D \to C_i$, il existe un unique morphisme $f\colon D \to C$ tel que $f_i = p_i \circ f$. Bien sûr, si un produit $(C, \{p_i\}_{i\in I})$ existe, alors il est unique à isomorphisme unique près ; et on écrit habituellement $\prod_{i\in I} C_i := C$, laissant les morphismes de projection implicites.

Exemple 1.4.1. Dans Set et Mod A tout les produits existent, et se sont les produits cartésiens usuels.

Pour une collection $\{C_i\}_{i\in I}$ d'objets de C, son *coproduit* est un couple $(C, \{e_i\}_{i\in I})$ constitué d'un objet $C \in \mathrm{C}$, et d'une collection $\{e_i\}_{i\in I}$ de morphismes $e_i\colon C \to C_i$, appelées immersions. Le couple $(C, \{e_i\}_{i\in I})$ doit avoir la propriété universelle suivante : étant donné un objet D et des morphismes $f_i\colon C\_i \to D$, il existe un unique morphisme $f\colon C \to D$ tel que $f_i = f \circ e_i$. Si un coproduit $(C, \{e_i\}_{i\in I})$ existe, alors il est unique à isomorphisme unique près ; et on écrit habituellement $\coprod_{i\in I} C_i := C$, laissant les immersions implicites.

Exemple 1.4.2. Dans Set le coproduit est l'union disjointe. Dans Mod A le coproduit est la somme directe.

Les produits et les coproduits sont des cas particuliers de limites et de colimites, respectivement. On n'aura pas besoin d'utiliser les limites et les colimites dans leur forme la plus générale. Tout ce dont on aura besoin, ce sont les limites inverse et les limites direct indexées par N ; et celles-ci seront rappelées plus tard.

Il est nécessaire de discuter les produits fibrés. Supposons que C soit une catégorie donnée. On rappelle qu'un diagramme commutatif

(1.4.3)
$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "g_1"'] & D_2 \arrow[d, "f_2"] \\ D_1 \arrow[r, "f_1"'] & C \end{tikzcd}$$

dans C est dit cartésien si pour tout objet $E' \in \mathrm{C}$, avec morphismes $g_1'\colon E' \to D_1$ et $g_2'\colon E' \to D_2$ tels que $f_1 \circ g_1' = f_2 \circ g_2'$, il existe un unique morphisme $h\colon E' \to E$ tel que $g_i' = g_i \circ h$. Voir le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{tikzcd} E' \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, dashed, bend left, "g_2'"] \arrow[ddr, dashed, bend right, "g_1'"'] & & \\ & E \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "g_1"'] & D_2 \arrow[d, "f_2"] \\ & D_1 \arrow[r, "f_1"'] & C \end{tikzcd}$$

Un diagramme cartésien est aussi appelé *diagramme de pullback*, et l'objet E est appelé le *produit fibré* de D_1 et D_2 sur C, avec la notation $D_1 \times_C D_2 := E$. Cette notation laisse les morphismes implicites. Bien sûr, si un produit fibré existe, alors il est unique à isomorphisme unique près qui commute avec les flèches données.

Il y a une notion duale : coproduit fibré. Il consiste en des morphismes $C \to D_1$ et $C \to D_2$ dans C, et le coproduit fibré $D_1 \amalg_C D_1$ dans C est juste le produit fibré dans la catégorie opposée C^{op}.

1.5. **Équivalence de Catégories.**

On rappelle qu'un foncteur $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ est une *équivalence* s'il existe un foncteur $G\colon \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ et des isomorphismes de foncteurs $G \circ F \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Id_C}$ et $F \circ G \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Id_D}$. Un tel fonceur G est appelé le *quasi-inverse* de F et il est unique à isomorphisme près (s'il existe).

Le foncteur $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ est dit *plein* (resp. *fidèle*) si pour tout $C_0, C_1 \in \mathrm{C}$, la fonction

$$F\colon \mathrm{Hom_C}(C_0, C_1) \to \mathrm{Hom_D}(F(C_0), F(C_1))$$

est surjective (resp. injective).

On sait que $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ est une équivalence si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1) F est essentiellement surjective sur les objets. C'est-à-dire que pour tout objet $D \in \mathrm{D}$ il y a un isomorphisme $F(C) \xrightarrow{\simeq} D$ pour un certain $C \in \mathrm{C}$.

(2) F est pleinement fidèle.

Un foncteur $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ est appelé un *isomorphisme de catégories* s'il est bijectif sur les ensembles d'objets et sur les ensembles de morphismes. Il est clair qu'un isomorphisme de catégories est une équivalence. Si F est un isomorphisme de catégories, alors il a un isomorphisme inverse $F^{-1}\colon \mathrm{D} \to \mathrm{C}$, qui est unique.

1.6. **Bifoncteurs.**
Soient C et D des catégories. Leur produit est la catégorie $\mathrm{C} \times \mathrm{D}$ défini comme suit : l'ensemble des objets est

$$\mathrm{Ob}(\mathrm{C} \times \mathrm{D}) \coloneqq \mathrm{Ob}(\mathrm{C}) \times \mathrm{Ob}(\mathrm{D}).$$

Les ensembles des morphismes sont

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}\times\mathrm{D}}((\mathrm{C}_0, \mathrm{D}_0), (\mathrm{C}_1, \mathrm{D}_1)) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(\mathrm{C}_0, \mathrm{D}_0) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(\mathrm{D}_0, \mathrm{D}_1).$$

La composition est

$$(f_1, g_1) \circ (f_0, g_0) \coloneqq (f_1 \circ f_0, g_1 \circ g_0),$$

et le morphisme identité d'un objet (C, D) est $(\mathrm{id}_C, \mathrm{id}_D)$.
Un *bifoncteur* de (C, D) vers E est un foncteur $F\colon \mathrm{C} \times \mathrm{D} \to \mathrm{E}$. L'information en plus qu'on se donne étant que la catégorie de départ $\mathrm{C} \times \mathrm{D}$ est un produit.

1.7. **Foncteurs Représentables.**
Soit C une catégorie. Un objet $C \in \mathrm{C}$ donne naissance à un foncteur

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{C}}(C)\colon \mathrm{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}, \mathrm{Y}_{\mathrm{C}}(C) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(-, C). \tag{1.7.1}$$

Plus précisément, le foncteur $\mathrm{Y}_{\mathrm{C}}(C)$ envoi un objet $D \in \mathrm{C}$ à l'ensemble $\mathrm{Y}_{\mathrm{C}}(C)(D) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(D, C)$, et un morphisme $\psi\colon D_0 \to D_1$ dans C à la fonction

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{C}}(C)(\psi) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(\psi, \mathrm{id}_C)\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(D_1, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(D_0, C).$$

Étant donné un morphisme $\phi\colon C_0 \to C_1$ dans C. Il y a un morphisme de foncteurs

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{C}}(\phi) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(-, \phi)\colon \mathrm{Y}_{\mathrm{C}}(C_0) \to \mathrm{Y}_{\mathrm{C}}(C_1). \tag{1.7.2}$$

Considérons la catégorie $\mathrm{Fun}(\mathrm{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$, dont les objets sont les foncteurs $F\colon \mathrm{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$, et dont les morphismes sont les morphismes des foncteurs $\eta\colon F_0 \to F_1$. Il y a ici une difficulté ensembliste : les ensembles d'objets et de morphismes de $\mathrm{Fun}(\mathrm{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$ sont trop grands (sauf si C est une petite catégorie), et ce n'est pas une **U**-catégorie. Par conséquent, nous devons élargir l'univers, comme mentionné dans la section 1.1.

Définition 1.7.3. Le *foncteur de Yoneda* de la catégorie C est le foncteur

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{C}}\colon \mathrm{C} \to \mathrm{Fun}(\mathrm{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$$

décrit dans les formules 1.7.1 et 1.7.2.

Théorème 1.7.4 (Lemme de Yoneda)**.** *Le foncteur de Yoneda* Y_{C} *est pleinement fidèle.*

Un foncteur $F\colon \mathrm{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$ est dit *représentable* s'il y a un isomorphisme de foncteurs $\eta\colon F \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Y}_{\mathrm{C}}(C)$ pour un certain objet $C \in \mathrm{C}$. Un tel objet C *représente* le foncteur F. Le Lemme de Yoneda dit que Y_{C} est un équivalence entre C et la catégorie des foncteurs représentables. Ainsi, le couple (C, η) est unique jusqu'à isomorphisme unique près (s'il existe). On remarque que l'isomorphisme d'ensembles $\eta_C\colon F(C) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Y}_{\mathrm{C}}(C)(C)$ donne un élément $\tilde{\eta} \in F(C)$ tel que $\eta_C(\tilde{\eta}) = \mathrm{id}_C$.
De façon duale, un objet $C \in \mathrm{C}$ donne naissance à un foncteur

$$\mathrm{Y}^{\vee}_{\mathrm{C}}(C)\colon \mathrm{C} \to \mathrm{Set}, \mathrm{Y}^{\vee}_{\mathrm{C}}(C) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(C, -). \tag{1.7.5}$$

Un morphisme $\phi\colon C_0 \to C_1$ dans C induit un morphisme de foncteurs

$$\mathrm{Y}^{\vee}_{\mathrm{C}}(\phi) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(\phi, -)\colon \mathrm{Y}^{\vee}_{\mathrm{C}}(C_1) \to \mathrm{Y}^{\vee}_{\mathrm{C}}(C_0). \tag{1.7.6}$$

Définition 1.7.7. Le *foncteur dual de Yoneda* de la catégorie C est le foncteur

$$\mathrm{Y}^{\vee}_{\mathrm{C}}\colon \mathrm{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\mathrm{C}, \mathrm{Set})$$

décrit dans les formules 1.7.5 et 1.7.6.

Théorème 1.7.8 (Lemme Dual de Yoneda)**.** *Le foncteur dual de Yoneda* $\mathrm{Y}^{\vee}_{\mathrm{C}}$ *est pleinement fidèle.*

Un foncteur $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{Set}$ est dit *coreprésentable* s'il y a un isomorphisme de foncteurs $\eta\colon F \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Y}^{\vee}_{\mathrm{C}}(C)$ pour un certain objet $C \in \mathrm{C}$. Un tel objet C *coreprésente* le foncteur F. Le Lemme Dual de Yoneda dit que $\mathrm{Y}^{\vee}_{\mathrm{C}}$ est un équivalence entre C^{op} et la catégorie des foncteurs coreprésentables. Le l'automorphisme d'identité id_C correspond à un élément particulier $\tilde{\eta} \in F(C)$.

1.8. **Limites Inverses et Directes.**

On ne s'intéresse qu'aux limites directes et inverses indexées par l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$.

Soit C une catégorie. On rappelle qu'un *système direct indexé par* $\mathbb{N}$ dans C est l'information

$$(\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}),$$

où C_k sont des objets de C et $\mu_k \colon C_k \to C_{k+1}$ sont des morphismes qu'on appelle *transitions.* Un *limite directe* de ce système est un couple $(C, \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ où $C \in \mathrm{C}$ et $\varepsilon_k \colon C_k \to C$ sont des morphismes tels que $\varepsilon_{k+1} \circ \mu_k = \varepsilon_k$ pour tout k. La propriété universelle vérifiée est la suivante : si $(C', \{\varepsilon'_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ est un autre couple tel que $\varepsilon'_{k+1} \circ \mu_k = \varepsilon'_k$, alors il existe un unique morphisme $\varepsilon \colon C \to C'$ tel que $\varepsilon'_k = \varepsilon \circ \varepsilon_k$. Si un limite directe C existe, alors elle est unique à isomorphisme unique près. On note alors $\varinjlim_n := C$ et on l'appelle la limite directe du système $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, laissant les morphismes implicites. On utilise parfois les morphismes

$$\mu_{k_0,k_1} := \mu_{k_1-1} \circ \cdots \circ \mu_{k_0} \colon C_{k_0} \to C_{k_1}$$

pour $k_0 < k_1$ et $\mu_{k,k} := \mathrm{id}_{C_k}$.

Par un *système inverse indexé par* $\mathbb{N}$ dans C on entend

$$(\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}),$$

où $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une collection d'objets et $\mu_k \colon C_{k+1} \to C_k$ sont des morphismes qu'on appelle également *transitions.* Un *limite inverse* de ce système est un couple $(C, \{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ où $C \in \mathrm{C}$ et $\varepsilon_k \colon C \to C_k$ sont des morphismes tels que $\mu_k \circ \varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k$ pour tout k. La propriété universelle vérifiée est analogue. Si un limite inverse C existe, alors elle est unique à isomorphisme unique près. On note alors $\varprojlim_n := C$ et on l'appelle la limite inverse du système $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, laissant les morphismes implicites. On défini les morphismes

$$\mu_{k_0,k_1} := \mu_{k_0} \circ \cdots \circ \mu_{k_1-1} \colon C_{k_1} \to C_{k_0}$$

pour $k_0 < k_1$ et $\mu_{k,k} := \mathrm{id}_{C_k}$.

Remarque. On peut voir l'ensemble ordonné $\mathbb{N}$ comme une catégorie, avec un seul morphisme $k \to l$ quand $k \leqslant l$, et aucun morphisme sinon. Alors on peut voir les systèmes directe et inverse indexés par $\mathbb{N}$ dans C comme des foncteurs $F \colon \mathbb{N} \to \mathrm{C}$ et $G \colon \mathbb{N}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{C}$ respectivement. De plus, avec $\bar{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, les limites directe et inverse de F et G sont des foncteurs $\bar{F} \colon \bar{\mathbb{N}} \to \mathrm{C}$ et $\bar{G} \colon \bar{\mathbb{N}}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{C}$ prolongeant F et G (avec des bonnes propriétés universelles).

Exemple 1.8.1. Dans Set et Mod A, pour n'importe quel anneau A, les limites directe et inverse indexés par $\mathbb{N}$ existent.

Exemple 1.8.2. Soit M la catégorie des groupes abéliens finis. Le système inverse $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, où $M_k := \mathbb{Z}/(2^k)$, et les transitions $\mu_k \colon M_{k+1} \to M_k$ sont les surjections canoniques, n'a pas de limite inverse dans M. On peut aussi faire de $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un système direct, dans lequel la transition $\nu_k \colon M_k \to M_{k+1}$ est multiplication par 2. La limite directe n'existe pas dans M.

Si $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est système direct dans C, et $D \in \mathrm{C}$ est n'importe quel objet, alors il y a un système inverse induit $\{\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(C_k, D)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans Set et il admet une limite. Si $C := \varinjlim C_k$ existe, alors les morphismes $\varepsilon_k \colon C_k \to C$ induisent des morphismes

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(C, D) \to \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(C_k, D) \tag{1.8.3}$$

dans Set.

De façon similaire, si $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est système inverse dans C, et $D \in \mathrm{C}$ est n'importe quel objet, alors il y a un système inverse induit $\{\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(D, C_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans Set et il admet une limite. Si $C := \varprojlim C_k$ existe, alors les morphismes $\varepsilon_k \colon C \to C_k$ induisent des morphismes

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(D, C) \to \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(D, C_k) \tag{1.8.4}$$

dans Set.

Proposition 1.8.5. *Soit* C *une catégorie.*

(1) Soit $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un système inverse dans C*, et C est une limite inverse. Alors, $C = \varprojlim C_k$ si et seulement si pour tout objet $D \in \mathrm{C}$, la fonction (1.8.4) est bijective.*

(2) Soit $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un système direct dans C*, et C est une limite directe. Alors, $C = \varinjlim C_k$ si et seulement si pour tout objet $D \in \mathrm{C}$, la fonction (1.8.3) est bijective.*

Preuve. On démontre seulement le premier point, le deuxième est analogue.

$(\Rightarrow)$: Soit $S \in \mathrm{Set}$ tel qu'on ait

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(D, C_{k+1}) \arrow[rr] & & \mathrm{Hom}(D, C_k) \\ & S \arrow[ul, "f_{k+1}"] \arrow[ur, "f_k"'] & \end{tikzcd}.$$

qui commute. Alors pour $s \in S$ on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} D \arrow[d, "f_k(s)"'] \arrow[dr, "\exists!\ u_s"] & \\ C_k & \varprojlim C_k = C \arrow[l] \end{tikzcd}.$$

On considère le morphisme unique $g\colon S \to \mathrm{Hom}(D, C),\ s \mapsto u_s$, alors on a

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "f_k"'] \arrow[dr, "g"] & \\ \mathrm{Hom}(D, C_{k+1}) & \mathrm{Hom}(D, C) \arrow[l] \end{tikzcd}.$$

Donc $\mathrm{Hom}(D, C) = \varprojlim \mathrm{Hom}(D, C_{k+1})$.

$(\Leftarrow)$: On note $\phi_D\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(D, C) \to \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(D, C_k)$, naturel en D. Alors on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(D, C) \xrightarrow[\phi_D]{\simeq} \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(D, C_k) \xrightarrow{p_{D_k}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(D, C_k)$ et donc, lorsqu'on fait varier D, on obtient un morphisme de foncteurs $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(-, C) \xrightarrow{(\chi_k)_*} \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(-, C_k)$ qui par le Lemme de Yoneda, provient d'un $\chi_k\colon C \to C_k$.

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(D, C_{k+1}) \arrow[rr, "(\mu_k)_*"] & & \mathrm{Hom}(D, C_k) \\ & \varprojlim \mathrm{Hom}(D, C_k) \arrow[ul, "p_{D_{k+1}}"] \arrow[ur, "p_{D_k}"'] & \end{tikzcd}.$$

Donc $(\mu_k)_* \circ p_{D_{k+1}} = p_{D_k}$ et en composant par ϕ_D à droite, on obtient $\chi_k = \mu_k \circ \chi_{k+1}$.

On va montrer que $C = \varprojlim C_k$. Considérons, (X, x_k) qui vérifie la propriété de la limite. On note $\mathbb{1} := \{*\}$ et on pose $h_k\colon \mathbb{1} \to \mathrm{Hom}(X, C_k),\ \{*\} \mapsto x_k$. Alors on a $h_k(*) = (\mu_k)_* \circ h_{k+1}(*)$ et donc $h_k = (\mu_k)_* \circ h_{k+1}$, donc on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}(X, C_{k+1}) \arrow[rr, "(\mu_k)_*"] & & \mathrm{Hom}(X, C_k) \\ & \mathbb{1} \arrow[ul, "h_{k+1}"] \arrow[ur, "h_k"'] & \end{tikzcd} \quad \text{donc} \quad \begin{tikzcd} \varprojlim \mathrm{Hom}(X, C_k) \arrow[rr, "p_{X_k}"] & & \mathrm{Hom}(X, C_k) \\ & \mathbb{1} \arrow[ul, dashed, "\exists!\ v"] \arrow[ur, "h_k"'] & \end{tikzcd}$$

Ainsi, $p_{X_k} \circ v = h_k$ i.e. $p_{X_k}(v(*)) = x_k$. On définit alors u par $u = \phi_X^{-1}(v(*))$. Montrons alors que u fait commuter le diagramme suivant et qu'il est unique

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "u"'] \arrow[dr, "x_k"] & \\ C \arrow[r, "\chi_k"'] & C_k \end{tikzcd}.$$

On sait que $p_{X_k}(v(*)) = x_k$ donc, $p_{X_k} \circ \phi_X \circ \phi_X^{-1}(v(*)) = x_k$ i.e. $\chi_k \circ u = x_k$. Si on montre que $(\chi_k)_* = p_{X_k} \circ \phi_X$ est injective alors on a fini, puisque ceci donne l'unicité de u. Supposons le contraire, soient $a, b \in \mathrm{Hom}(X, C)$ tels que $p_{X_k} \circ \phi_X(a) = p_{X_k} \circ \phi_X(b)$, pour tout k. Alors, en considérant

$$m(x) = \begin{cases} \phi_X(a) & \text{si } x = b \\ \phi_X(b) & \text{si } x = a \\ \phi_X(x) & \text{si non} \end{cases}$$

on obtient que $p_{X_k} \circ \phi_X = p_{D_k} \circ m$ mais $\phi_X \neq m$. Ceci contredit l'unicité de ϕ_X en tant que morphisme qui fait commuter

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(X, C) \arrow[d, "\phi_X"'] \arrow[dr, "p_{X_k} \circ \phi_X"] & \\ \varprojlim \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(X, C_k) \arrow[r, "p_{X_k}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(X, C_k) \end{tikzcd}.$$

Donc u est unique.

$\square$

Remarque. Dans de nombreux cas, les limites inverses et directes n'existent pas dans C parce que "ses objets sont trop petits". Cela se produit dans la catégorie $\mathrm{Set}_{\mathrm{fin}}$ des ensembles finis, et aussi dans la catégorie $\mathrm{Ab}_{\mathrm{fin}}$ des groupes abéliens finis.

Sans en dire beaucoup, il existe une méthode très effective pour agrandir C juste assez pour que la catégorie plus grande ait les limites souhaitées. Cela se fait au moyen des catégories Ind(C) et Pro(C) des ind-objets et pro-objets de C.

Le concept de catégorie abélienne est une abstraction extrêmement utile d'une catégorie de modules. Elle a été introduite par A. Grothendieck dans son article fondateur *Sur quelques points d'algèbre homologique, Tôhoku Math. J. 9* de 1957.

2.1. **Catégories Linéaires.**

Définition 2.1.1. Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif. Une *catégorie* $\mathbb{K}$*-linéaire* est une catégorie C, muni d'une structure de $\mathbb{K}$-module sur chaque ensemble de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_0, M_1)$. La condition étant la suivante :

- Pour tout $M_0, M_1, M_2 \in \mathrm{M}$ la fonction de composition
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_1, M_2) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_0, M_1) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_0, M_2) \\ (\phi_0, \phi_1) & \mapsto & \phi_1 \circ \phi_0 \end{array}$$
est $\mathbb{K}$-bilinéaire.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}$, on dit que M est une *catégorie linéaire.*

On rappelle que, par Convention 1.2.4, toute catégorie linéaire est $\mathbb{K}$-linéaire.
On a les résultats suivants qui sont faciles a voir.

Proposition 2.1.2. *Soit* M *une catégorie* $\mathbb{K}$*-linéaire.*

(1) Pour tout objet $M \in \mathrm{M}$*, l'ensemble* $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M, M)$*, avec son opération d'addition donnée, et avec l'opération de composition, est un anneau* $\mathbb{K}$*-central.*

(2) Pour tout couple d'objets $M_0, M_1 \in \mathrm{M}$*, l'ensemble* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_0, M_1)$*, avec son opération d'addition donnée, et avec les opérations de composition, est un module à gauche sur l'anneau* $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M_1)$*, et un module à droite sur l'anneau anneau* $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M_0)$*. De plus, ces actions à gauche et à droite commutent entre elles.*

Ce résultat peut être renversé :

Exemple 2.1.3. Soit A un anneau $\mathbb{K}$-central. On définit une catégorie M comme suit : il existe un seul objet M, et son ensemble de morphismes est $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M, M) := A$. La composition dans M est la multiplication de A. Alors M est une catégorie $\mathbb{K}$-linéaire.

Pour un anneau $\mathbb{K}$-central A, l'anneau opposé A^{op} a la même structure de $\mathbb{K}$-module que A, mais la multiplication est inversée.

Exemple 2.1.4. Soit A un anneau non nul. Soient $P, Q \in \mathrm{Mod}\, A$ des A-modules libres distincts de rang 1. Il est facile de voir que $\mathrm{End}_{\mathrm{Mod}\, A}(P) \cong A^{\mathrm{op}}$.

Considérons M comme étant la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}\, A$ sur l'ensemble des objets $\{P, Q\}$. Alors on peut voir que
$$\begin{bmatrix} \mathrm{End}_{\mathrm{Mod}\, A}(P) & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\, A}(P, M) \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}\, A}(M, P) & \mathrm{End}_{\mathrm{Mod}\, A}(M) \end{bmatrix} \cong \mathrm{Mat}_{2\times 2}(A^{\mathrm{op}}).$$

2.2. **Catégories Additives.**

Définition 2.2.1. Une *catégorie additive* est une catégorie linéaire M vérifiant ces deux conditions :

(1) M admet un objet nul.

(2) M admet des coproduits finis.

Observons que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M, N) \neq \emptyset$ pour tout $M, N \in \mathrm{M}$, puisque c'est un groupe abélien. Pour l'objet nul $0 \in M$ on a $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M, 0) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(0, M) = 0$, le groupe abélien nul. On note les uniques flèches $0 \to M$ et $M \to 0$ par 0. Ainsi, le chiffre 0 a beaucoup de significations ; mais elle est toujours claire par le contexte. Le coproduit dans une catégorie linéaire M est généralement désigné par $\oplus$ et est appelé la somme directe.

Exemple 2.2.2. Soit A un anneau $\mathbb{K}$-central. La catégorie $\mathrm{Mod}\, A$ est une catégorie additive $\mathbb{K}$-linéaire. La sous-catégorie pleine $F \subseteq \mathrm{Mod}\, A$ des modules libres est également additive.

Proposition 2.2.3. *Soit* M *une catégorie linéaire. Soit* $\{M_i\}_{i \in I}$ *une collection fini d'objet dans* M *et on suppose que le coproduit* $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ *existe avec immersions* $e_i \colon M_i \to M$*.*

(1) Pour chaque i*, soit* $p_i \colon M \to M_i$ *l'unique morphisme tel que* $p_i \circ e_i = \mathrm{id}_{M_i}$ *et* $p_i \circ e_j = 0$ *pour* $j \neq i$*. Alors* $(M, \{p_i\}_{i \in I})$ *est un produit de la collection* $\{M_i\}_{i \in I}$*.*

(2) $\sum_{i \in I} e_i \circ p_i = \mathrm{id}_M$*.*

Preuve. Par récurrence il suffit de considérer le cas des paires d'objets.

Déjà, l'existence de tels morphismes p_i découle de la propriété universelle du coproduit, en considérant le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} & M_1 \arrow[d, "e_1"'] \arrow[ddr, bend left, "\mathrm{id}_{M_1}"] & \\ M_2 \arrow[r, "e_2"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & M_1 \oplus M_2 =: M \arrow[dr, dashed, "p_1"] & \\ & & M_1 \end{tikzcd}.$$

De plus, le fait que $\sum_{i\in I} e_i \circ p_i = \mathrm{id}_M$ découle du fait que pour $j \in [\![1,2]\!]$ on a $\left(\sum_{i\in I} e_i \circ p_i\right) \circ e_j = \sum_{i\in I} e_i \circ (p_i \circ e_j) = e_j$. Donc, par unicité on doit avoir l'égalité

On va maintenant montrer que M est un produit. Pour cela on considère $(N, \{\chi_i\}_{i\in I})$ tel que

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "\chi_1"] \arrow[ddr, bend right, "\chi_2"'] & & \\ & M \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & M_1 \\ & M_2 & \end{tikzcd}.$$

On pose $f = e_1 \circ \chi_1 + e_2 \circ \chi_2 \colon N \to M$ et alors pour $j \in [\![1,2]\!]$ on a $p_j \circ f = \chi_j$. Pour l'unicité, soit $g\colon N \to M$ qui fait commuter le diagramme, alors

$$g = \mathrm{id}_M \circ g = \sum_{i\in I} e_i \circ p_i \circ g = \sum_{i\in I} e_i \circ \chi_i = f.$$

□

La partie (1) de la Proposition (2.2.3) implique directement.

Corollaire 2.2.4. *Une catégorie additive admet des produits finis.*

Définition 2.2.5. Soit M une catégorie additive, et soit N une sous-catégorie pleine de M. On dit que N est une *sous-catégorie additive pleine* de M si N contient l'objet nul, et est fermée par des sommes directes finies.

On remarque que dans ce cas, N est elle-même une catégorie additive.

Exemple 2.2.6. Considérons la catégorie linéaire M de l'exemple 2.1.3, construite à partir d'un anneau A. Elle n'a pas d'objet nul (sauf si l'anneau A est l'anneau nul), elle n'est donc pas additive.

Une question plus intéressante à se poser est de savoir si M admet des sommes directes finies ? Cela est équivalent à savoir si $A \cong A \oplus A$ en tant que modules A à droite. On peut montrer que lorsque A est non nul et commutatif, ou non nul et noethérien, alors $A \ncong A \oplus A$ dans $\mathrm{Mod}\, A^{\mathrm{op}}$. Par contre, si on prend un corps $\mathbb{K}$, et un $\mathbb{K}$-module N de rang dénombrable, alors $A := \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(N)$ satisfait $A \cong A \oplus A$.

Proposition 2.2.7. *Soient* M *une catégorie linéaire, et* $N \in \mathrm{M}$. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) L'anneau $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(N)$ *est trivial.*

(2) N *est l'objet nul de* M.

Preuve. *(2)* ⇒ *(1)* : Puisque l'ensemble $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(N)$ est un singleton, il doit être de l'anneau trivial.

(1) ⇒ *(2)* : Si l'anneau $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(N)$ est trivial, alors tous les modules à gauche et à droite sur lui doivent être triviaux. On utilise maintenant le *(2)* de la proposition 2.1.2.

□

2.3. **Catégories Abéliennes.**

Définition 2.3.1. Soit M une catégorie additive, et soit $f\colon M \to N$ un morphisme dans M. Un *noyau* de f est un couple (K, k), constitué d'un objet $K \in \mathrm{M}$ et d'un morphisme $k\colon K \to M$, avec ces deux propriétés :

(1) $f \circ k = 0$.

(2) Si $k'\colon K' \to M$ est un morphisme dans M tel que $f \circ k' = 0$, alors il existe un unique morphisme $g\colon K' \to K$ tel que $k' = k \circ g$.

En d'autres termes, l'objet K représente le foncteur $\mathrm{M}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ab}$, $K' \mapsto \{k' \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(K', M) \mid f \circ k' = 0\}$.

Le noyau de f est bien sûr unique à un isomorphisme unique près (s'il existe), et on le note par $\mathrm{Ker}(f)$. Parfois $\mathrm{Ker}(f)$ ne fait référence qu'à l'objet K, et d'autres fois il ne fait référence qu'au morphisme k ; comme d'habitude, cela devrait être clair dans le contexte.

Définition 2.3.2. Soit M une catégorie additive, et soit $f\colon M \to N$ un morphisme dans M. Un *conoyau* de f est un couple (C, c), constitué d'un objet $C \in \mathrm{M}$ et d'un morphisme $c\colon N \to C$, avec ces deux propriétés :

(1) $c \circ f = 0$.

(2) Si $c'\colon N \to C'$ est un morphisme dans M tel que $c' \circ f = 0$, alors il existe un unique morphisme $g\colon C \to C'$ tel que $c' = g \circ c$.

En d'autres termes, l'objet C coreprésente le foncteur $\mathrm{M} \to \mathrm{Ab}$, $C' \mapsto \{c' \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, C') \mid c' \circ f = 0\}$.

Le conoyau de f est bien sûr unique à un isomorphisme unique près (s'il existe), et on le note par $\mathrm{Coker}(f)$. Parfois $\mathrm{Coker}(f)$ ne fait référence qu'à l'objet C, et d'autres fois il ne fait référence qu'au morphisme c ; comme d'habitude, cela devrait être clair dans le contexte.

Il est facile de voir, par les définitions, la proposition suivante.

Proposition 2.3.3. *Soit* M *une catégorie additive, et soit $f\colon M \to N$ un morphisme dans* M.

(1) Si $k\colon K \to M$ est un noyau de f, alors k est un monomorphisme.

(2) Si $c\colon N \to C$ est un noyau de f, alors c est un épimorphisme.

Définition 2.3.4. Supposons que la catégorie additive M ait des noyaux et des conoyaux. Soit $f\colon M \to N$ un morphisme dans M.

(1) On définit l'*image* de f comme étant $\mathrm{Im}(f) \coloneqq \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$.

(2) On définit la *coimage* de f comme étant $\mathrm{Coim}(f) \coloneqq \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$.

Si on commence avec un morphisme $f\colon M \to N$ dans M, alors on a que le noyau et le conoyau de f rentrent dans le diagramme : $K \xrightarrow{k} M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{c} C$. Si on met en plus, $\alpha \coloneqq \mathrm{Coker}(k) = \mathrm{Coim}(f)$ et $\beta \coloneqq \mathrm{Ker}(c) = \mathrm{Im}(f)$ on obtient le diagramme suivant (flèches solides) :

(2.3.5)
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] \arrow[dr, "0"'] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, dashed, "\gamma"] & N \arrow[r, "c"] & C \\ & M' \arrow[r, dashed, "f'"'] & N' \arrow[u, "\beta"'] \arrow[ur, "0"'] & \end{tikzcd}$$

Puisque $c \circ f = 0$, il existe un unique morphisme γ rendant le diagramme commutatif. Maintenant $\beta \circ \gamma \circ k = f \circ k = 0$; et β est un monomorphisme ; donc $\gamma \circ k = 0$. Il existe donc un unique morphisme $f'\colon M' \to N'$ rendant le diagramme commutatif. On conclue que $f\colon M \to N$ induit un morphisme

(2.3.6)
$$f'\colon\ \mathrm{Coim}(f) \to \mathrm{Im}(f).$$

Définition 2.3.7. Une catégorie abélienne est une catégorie additive M avec ces deux propriétés supplémentaires :

(1) Tous les morphismes dans M admettent des noyaux et des conoyaux.

(2) Pour tout morphisme $f\colon M \to N$ dans M, le morphisme induit f' dans l'équation 2.3.6 est un isomorphisme. Autrement dit, puisque $M' = \mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f))$ et $N' = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$, on voit que

(2.3.8)
$$\mathrm{Coker}(\mathrm{Ker}(f)) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Coker}(f))$$

Il est facile de voir que la catégorie $\mathrm{Mod}\, A$, pour n'importe quel anneau A est abélienne. Un cas particulier étant $\mathrm{Ab} = \mathrm{Mod}\, \mathbb{Z}$, d'où provient le nom.

Définition 2.3.9. Soit M une catégorie abélienne, et soit N une sous-catégorie pleine de M. On dit que N est une *sous-catégorie abélienne pleine* de M si l'objet nul appartient à N, et N est fermé dans M sous sommes directes finies, noyaux et conoyaux.

Dans ce cas, il est clair que N est elle-même un catégorie abélienne

Exemple 2.3.10. Soit M_1 la catégorie des groupes abéliens de type fini, et soit M_0 la catégorie des groupes abéliens finis. Alors M_1 est une sous-catégorie abélienne pleine de Ab, et M_0 est une sous-catégorie abélienne pleine de M_1.

Proposition 2.3.11. *Soit* M *une catégorie linéaire.*

(1) La catégorie opposée M^{op} *a une structure canonique de catégorie linéaire.*

(2) Si M *est additive, alors* M^{op} *est également additive.*

(3) Si M *est abélienne, alors* M^{op} *est aussi abélienne.*

Preuve. *(1)* Puisque $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}^{\mathrm{op}}}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, M)$, c'est un groupe abélien. La bilinéarité de la composition dans M^{op} est claire.

(2) Les objets nuls dans M et M^{op} sont les mêmes. L'existence de coproduits finis dans M^{op} est due à l'existence de produits finis dans M ; voir Proposition 2.2.3 *(1)*.

(3) M^{op} a des noyaux et des conoyaux, puisque $\mathrm{Ker}_{\mathrm{M}^{\mathrm{op}}}(\mathrm{Op}(\phi)) = \mathrm{Coker}_{\mathrm{M}}(\phi)$ et vice versa. La condition *(ii)* de la définition 2.3.7 est également vérifiée

□

Proposition 2.3.12. *Soit* $\phi \colon M \to N$ *un morphisme dans une catégorie abélienne* M.

(1) ϕ *est un monomorphisme si et seulement si* $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$.

(2) ϕ *est un épimorphisme si et seulement si* $\mathrm{Coker}(\phi) = 0$.

(3) ϕ *est un isomorphisme si et seulement si c'est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme.*

Preuve. Le point *(2)* étant le dual du point *(1)* on ne donne la preuve que du *(1)*.

(1) : On remarque d'abord que ϕ est un monomorphisme si et seulement si $\phi \circ \psi = 0$ implique $\psi = 0$ pour n'importe quel ψ.

Supposons que $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$. On se donne un $\psi \colon K' \to M$ tel que $\phi \circ \psi = 0$. Alors par propriété universelle du noyau, il existe un unique morphisme $K' \xrightarrow{g} 0$, tel que $\psi = 0 \circ g = 0$. Donc ϕ est un monomorphisme.

Inversement, si ϕ est un monomorphisme, alors on note (K, k) le noyau. On a que $f \circ k = 0$, donc $k = 0$ puisque ϕ est un monomorphisme. Maintenant, si $K \neq 0$, alors pour $\psi \colon K' \to M$ tel que $\phi \circ \psi = 0$, on a pas un unique choix pour $K' \xrightarrow{g} K$, tel que $\psi = k \circ g$ comme on en a besoin pour la définition de noyau. Donc $(K, k) = (0, 0)$.

(3) : Si ϕ est un isomorphisme, alors il est clair que c'est un monomorphisme et un épimorphisme. Supposons que ϕ est un monomorphisme et un épimorphisme. Alors on considère le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, "0"] & M \arrow[r, "f"] \arrow[d] & N \arrow[r, "0"] & 0 \\
& \underbrace{\mathrm{Coim}(f)}_{\simeq M} \arrow[r, "\simeq"] & \underbrace{\mathrm{Im}(f)}_{\simeq N} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Il faut montrer que $\mathrm{Coim}(f) \simeq M$, l'autre isomorphisme étant dual. Cela revient a montrer que M satisfait les propriétés de $\mathrm{Coker}(0)$. On a que $\mathrm{id}_M \circ 0 = 0$ et si $g \colon M \to M'$ est tel que $g \circ 0 = 0$ alors, $g\,\mathrm{id}_M = g$. Donc $M \xrightarrow{\mathrm{id}_M} M$ est bien un conoyau.

□

Considérons le diagramme

$$S = \left(\cdots M_{-1} \xrightarrow{\phi_{-1}} M_0 \xrightarrow{\phi_0} M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \cdots \right) \tag{2.3.13}$$

dans une catégorie abélienne M, s'étendant finiment ou infiniment de part et d'autre. Un tel diagramme est appelé *suite dans* M. Un objet M_i apparaissant dans S est dit *intérieur dans* S s'il y a un objet M_{i-1} apparaissant à sa gauche, et un objet M_{i+1} apparaissant à sa droite.

Définition 2.3.14. Soit S une suite de la catégorie abélienne M, notée comme dans 2.3.13.

(1) Supposons que M_i soit un objet intérieur dans S. On dit que la suite S est *exacte en* M_i si $\mathrm{Im}(\phi_{i-1}) = \mathrm{Ker}(\phi_i)$, comme sous-objets de M_i.

(2) La suite S est dite *exacte* si elle est exacte en tous ses objets intérieurs.

Exemple 2.3.15. Un morphisme $\phi \colon M \to N$ dans une catégorie abélienne M est un monomorphisme si et seulement si $0 \to M \xrightarrow{\phi} N$ est une suite exacte. Le morphisme ϕ est un épimorphisme si et seulement si la suite $M \xrightarrow{\phi} N \to 0$ est exacte.

Définition 2.3.16. Une *suite exacte courte* dans une catégorie abélienne M est une suite exacte de la forme

$$S = \left(0 \to M_0 \xrightarrow{\phi_0} M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \to 0 \right)$$

Lemme 2.3.17. *Soit* M *une catégorie abélienne. La suite* $0 \to M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M''$ *est exacte dans* M *si et seulement si le morphisme canonique* $M' \to \mathrm{Ker}(\psi)$ *est un isomorphisme.*

Preuve. Supposons que la suite est exacte et on considère le diagramme commutatif suivant (flèches solides)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, hook, "\phi"] \arrow[d, two heads, "p"] \arrow[dr, dashed, "u"] & M \arrow[r, "\psi"] & M'' \\
& \mathrm{Im}(\phi) \arrow[r, "\simeq", "r"'] \arrow[ur] & \mathrm{Ker}(\psi) \arrow[u, hook, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

où la flèche en pointillées provient de la propriété universelle du noyau, donc $i \circ u = \phi$. On remarque que u est un monomorphisme et puisque $i \circ r \circ p = \phi = i \circ u$, on en déduit que $u = r \circ p$ puisque i est un monomorphisme. Ainsi, on en déduit que u est également un épimorphisme, donc c'est l'isomorphisme souhaité.

Réciproquement, si u est un isomorphisme, alors p est un monomorphisme, donc c'est un isomorphisme et alors si on note (K, k) le noyau, $p \circ k = 0$ donc $k = 0$, ce qui implique également que $K = 0$. En effet, $0 = k = k \circ \mathrm{id}_K$, donc $\mathrm{id}_K = 0$. Cela donne que la composition $K \to 0 \to K$ (où les morphismes sont les morphismes uniques) est l'identité de K, donc le morphisme unique $K \to 0$ est un isomorphisme, c'est-à-dire $K = 0$. Finalement, on voit aussi facilement que $\mathrm{Im}(\phi) \to \mathrm{Ker}(\psi)$ est un isomorphisme.

□

Proposition 2.3.18. *Soit* M *une catégorie abélienne* $\mathbb{K}$*-linéaire.*

(1) Soit $0 \to M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M''$ *une suite exacte dans* M*. Alors, pour tout* $L \in \mathrm{M}$*, la suite*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(L, M') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\phi)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(L, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\psi)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(L, M'')$$

dans $\mathrm{Mod}\,\mathbb{K}$ *est exacte.*

(2) Soit $M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ *une suite exacte dans* M*. Alors, pour tout* $N \in \mathrm{M}$*, la suite*

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M'', N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\psi,\mathrm{id})} \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M, N) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\phi,\mathrm{id})} \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M', N)$$

dans $\mathrm{Mod}\,\mathbb{K}$ *est exacte.*

***Preuve*.** Il suffit de démontrer le point *(1)*, le cas *(2)* s'obtient en travaillant dans la catégorie opposée.

(1) : L'injectivité de $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \phi)$ découle directement du fait que ϕ est un monomorphisme.

On va maintenant montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \psi)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \phi))$, pour cela on procède par double inclusion.

$\mathrm{Ker} \subset \mathrm{Im}$: Soit $\beta \in \mathrm{Ker}$ avec $\beta \colon L \to M$, alors $\psi \circ \beta = 0$. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} M' \arrow[r, "\phi"] & M \arrow[r, "\psi"] & M'' \\ L \arrow[u, dashed, "\alpha"] \arrow[ur, "\beta"'] & & \end{tikzcd}$$

où la flèche en pointillées découle du fait que $\mathrm{Ker}(\psi) = M'$. Donc on a bien $\beta = \phi \circ \alpha = \mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \phi)(\alpha)$

$\mathrm{Ker} \supset \mathrm{Im}$: On a que $\psi \circ \phi = 0$, donc $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \psi) \circ \mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \phi) = \mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \psi \circ \phi) = 0$.

□

2.4. **Preuves dans les Catégories Abéliennes.**

Une difficulté dans la théorie des catégories abéliennes est la suivante : les formules faciles à prouver pour une catégorie de module $\mathrm{M} = \mathrm{Mod}\,A$, en utilisant des *éléments*, sont souvent très difficiles à prouver dans une catégorie abélienne abstraite M (directement à partir des axiomes).

Une solution astucieuse à cette difficulté a été trouvée par P. Freyd et B. Mitchell, que l'on admet :

Théorème 2.4.1 (Freyd-Mitchell)**.** *Soit* M *une petite catégorie abélienne. Alors* M *est équivalente à une sous-catégorie abélienne pleine de* $\mathrm{Mod}\,A$*, pour un anneau* A *convenable.*

Le théorème de Freyd-Mitchell implique que pour les besoins des calculs finitaires dans la catégorie abélienne M (par exemple, vérifier si une suite est exacte), on peut supposer que les objets de M ont des éléments. Cela simplifie souvent le travail.

On peut s'en passer de Freyd-Mitchell en utilisant des éléments généralisés (comme l'explique la section 2.4 de [8]), mais les preuves sont alors légèrement plus impliquées.

2.5. **Foncteurs Additifs.**

Définition 2.5.1. Soient M et N des catégories $\mathbb{K}$-linéaires. Un foncteur $F \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est appelé un *foncteur* $\mathbb{K}$*-linéaire* si pour tout $M_0, M_1 \in \mathrm{M}$ la fonction

$$F \colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_0, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(F(M_0), F(M_1))$$

est un morphisme $\mathbb{K}$-linéaire.

Lorsque l'anneau de base $\mathbb{K}$ est implicite, on dit parfois que F est un *foncteur additif*, au même sens que foncteur $\mathbb{K}$-linéaire.

Les foncteurs additifs commutent avec les sommes directes finies. Plus précisément :

Proposition 2.5.2. *Soit* $F \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un foncteur additif entre catégories linéaires, soit* $\{M_i\}_{i \in I}$ *une collection finie d'objets de* M*, et supposons que la somme directe* $(M, \{e_i\}_{i \in I})$ *de la collection* $\{M_i\}_{i \in I}$ *existe dans* M*. Alors* $(F(M), \{F(e_i)\}_{i \in I})$ *est une somme directe de la collection* $\{F(M_i)\}_{i \in I}$ *dans* N*.*

***Preuve*.** Il suffit de le démontrer pour la somme directe de deux objet, le résultat général s'en déduit par récurrence finie.

Par définition de la somme directe dans M, on a $M_1 \underset{p_1}{\overset{e_1}{\rightleftarrows}} M_1 \oplus M_2 \underset{p_2}{\overset{e_2}{\leftrightarrows}} M_2$ avec $p_i \circ e_i = \mathrm{id}_{M_i}$, $p_i \circ e_j = 0$ et $p_1 \circ e_1 + p_2 \circ e_2 = \mathrm{id}_M$. Alors on a également, $F(M_1) \underset{F(p_1)}{\overset{F(e_1)}{\rightleftarrows}} F(M_1 \oplus M_2) \underset{F(p_2)}{\overset{F(e_2)}{\leftrightarrows}} F(M_2)$ avec $F(p_i) \circ F(e_i) = \mathrm{id}_{F(M_i)}$, $F(p_i) \circ F(e_j) = 0$ et $F(p_1) \circ F(e_1) + F(p_2) \circ F(e_2) = \mathrm{id}_{F(M)}$. Alors par 2.2.3, on obtient que $F(M_1 \oplus M_2) = F(M_1) \oplus F(M_2)$.

□

Notons que la proposition ci-dessus parle également de produits finis, puisque produit et coproduits coïncident dans une catégorie additive.

Proposition 2.5.3. *Soit $F\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un foncteur entre catégories linéaires. Alors F est $\mathbb{Z}$-linéaire si et seulement si il commute avec les coproduits*

Preuve. On a déjà vu que si le foncteur est linéaire alors il commute avec les coproduits. Supposons maintenant que F commute avec les coproduits. Soient $f, g\colon M \to N$ et considérons $\alpha = (\mathrm{id}_M, f) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M, M \oplus N) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M, M) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M, N)$ et $\beta = (g, \mathrm{id}_N) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M \oplus N, M) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M, N) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, N)$. On sait que $M \underset{p}{\overset{e}{\rightleftarrows}} M \oplus N \underset{p'}{\overset{e'}{\leftrightarrows}} N$, comme dans 2.2.3. Alors $\beta \circ \alpha = \beta \circ \mathrm{id}_{M \oplus N} \circ \alpha = \beta \circ (e \circ p + e' \circ p') \circ \alpha = g \circ \mathrm{id}_M + \mathrm{id}_N \circ f = f + g$. Donc, $F(f+g) = F(\beta \circ \alpha) = F(\beta) \circ F(\alpha) = F(\beta) \circ \mathrm{id}_{F(M) \oplus F(N)} \circ F(\alpha) = F(\beta) \circ (F(e) \circ F(p) + F(e') \circ F(p')) \circ F(\alpha) = F(f) + F(g)$.

De plus, puisque le morphisme nul de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M, N)$ est la composition $M \to 0 \to N$, on a bien que $F(0) = 0$.

□

Proposition 2.5.4. *Supposons que $F, G\colon \mathrm{K} \to \mathrm{L}$ soient des foncteurs additifs entre catégories linéaires, et $\eta\colon F \to G$ soit un morphisme de foncteurs. Soient M, M', N des objets de K, et supposons que $N \cong M \oplus M'$. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) $\eta_N\colon F(N) \to G(N)$ est un isomorphisme.

(2) $\eta_M\colon F(M) \to G(M)$ et $\eta_{M'}\colon F(M') \to G(M')$ sont des isomorphismes.

Preuve. Si $\eta_M\colon F(M) \to G(M)$ et $\eta_{M'}\colon F(M') \to G(M')$ sont des isomorphismes, alors il est clair que $\eta_N\colon F(M) \oplus F(M') \to G(M) \oplus G(M')$.

Supposons inversement que $\eta_N\colon F(N) \to G(N)$ est un isomorphisme. Alors on considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, shift left, "F(e)"] \arrow[d, "\eta_M"] & F(M \oplus M') \arrow[l, shift left, "F(p)"] \arrow[d, "\eta_N"] \\ G(M) \arrow[r, shift left, "G(e)"] & G(M \oplus M') \arrow[l, shift left, "G(p)"] \end{tikzcd}$$

et on pose $\alpha\colon G(M) \to F(M)$ définie par $F(p) \circ \eta_N^{-1} \circ G(e)$. Alors, $\eta_M \circ \alpha = \eta_M \circ F(p) \circ \eta_N^{-1} \circ G(e) = G(p) \circ \eta_N \circ \eta_N^{-1} \circ G(e) = \mathrm{id}_{G(M)}$ et $\alpha \eta_M = F(p) \circ \eta_N^{-1} \circ G(e) \circ \eta_M = P(p) \circ \eta_N^{-1} \circ \eta_N \circ F(e) = \mathrm{id}_{F(M)}$. Donc η_M est un isomorphisme. On vérifie de façon similaire que $\eta_{M'}$ est un isomorphisme.

□

Exemple 2.5.5. Soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Il existe deux foncteurs additifs associés à f : le *foncteur de restriction* $\mathrm{Rest}_f\colon \mathrm{Mod}\, B \to \mathrm{Mod}\, A$ et le *foncteur d'induction* $\mathrm{Ind}_f\colon \mathrm{Mod}\, A \to \mathrm{Mod}\, B$. Étant donné un B-module N, le A-module $\mathrm{Rest}_f(N)$ a le même $\mathbb{K}$-module sous-jacent, et A agit dessus via f. Pour un A-module M, le B-module induit est $\mathrm{Ind}_f(M) \coloneqq B \otimes_A M$.

Proposition 2.5.6. *Soit $F\colon \mathrm{M} \to N$ un foncteur additif entre catégories linéaires. Alors :*

(1) Pour tout $M \in \mathrm{M}$ la fonction $F\colon \mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M) \to \mathrm{End}_{\mathrm{N}}(F(M))$ est un homomorphisme d'anneaux.

(2) Pour tout $M_0, M_1 \in \mathrm{M}$ la fonction

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_0, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{N}}(F(M_0), F(M_1))$$

est un homomorphisme de $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M_1)$-modules à gauche, et de $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M_0)$-module à droite.

(3) Si M est un objet nul de M, alors $F(M)$ est un objet nul de N.

Preuve. *(1)* D'après la définition 2.5.1 la fonction F respecte l'addition. Par la définition d'un foncteur, il respecte la multiplication et l'unité.

(2) Immédiat

(3) Suit du fait que $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M)$ est trivial, donc $\mathrm{End}_{\mathrm{N}}(F(M))$ aussi, et alors $F(M)$ est un objet nul de N.

□

Définition 2.5.7. Soit $F\colon \mathrm{M} \to N$ un foncteur additif entre catégories abéliennes.

(1) F est dit *exact à gauche* s'il commute avec les noyaux. Soit pour tout morphisme $\phi\colon M_0 \to M_1$ dans M, avec noyau $k\colon K \to M_0$, le morphisme $F(k)\colon F(K) \to F(M_0)$ est un noyau de $F(\phi)\colon F(M_0) \to F(M_1)$.

(2) F est dit *exact à droite* s'il commute avec les conoyaux. Soit pour tout morphisme $\phi\colon M_0 \to M_1$ dans M, avec noyau $c\colon M_1 \to C$, le morphisme $F(C)\colon F(M_1) \to F(C)$ est un conoyau de $F(\phi)\colon F(M_0) \to F(M_1)$.

(3) F est dit exact s'il est à la fois exact à gauche et exact à droite.

Illustrons cela. Supposons que $\phi\colon M_0 \to M_1$ est un morphisme dans M, de noyau K et de conoyau C. En appliquant F à la suite $K \xrightarrow{k} M_0 \xrightarrow{\phi} M_1 \xrightarrow{c} C$ dans M on obtient les flèches pleines de le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(K) \arrow[r, "F(k)"] \arrow[dr, dashed, "\psi"'] & F(M_0) \arrow[rr, "F(\phi)"] & & F(M_1) \arrow[r, "F(c)"] \arrow[d, dashed] & F(C) \\
& \mathrm{Ker}_{\mathrm{N}}(F(\phi)) \arrow[u, dashed] & & \mathrm{Coker}_{\mathrm{N}}(F(\phi)) \arrow[ur, dashed, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

dans N. Comme N est abélien, on obtient les flèches pointillées verticales : le noyau et le conoyau de $F(\phi)$. Les flèches pointillées diagonales existent et sont uniques car $F(\phi) \circ F(k) = 0$ et $F(c) \circ F(\phi) = 0$. L'exactitude à gauche de F nécessite que ψ soit un isomorphisme, et l'exactitude à droite nécessite que χ soit un isomorphisme.

Rappelons qu'une suite exacte courte dans M est une suite exacte de la forme

$$S = \left(0 \to M_0 \xrightarrow{\phi_0} M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \to 0\right). \tag{2.5.8}$$

Proposition 2.5.9. *Soit $F\colon \mathrm{M} \to N$ un foncteur additif entre catégories abéliennes.*

(1) Le foncteur F est exact à gauche si et seulement si pour toute suite exacte courte S dans M*, la suite*

$$0 \to F(M_0) \xrightarrow{F(\phi_0)} F(M_1) \xrightarrow{F(\phi_1)} F(M_2)$$

est exacte dans N.

(2) Le foncteur F est exact à droite si et seulement si pour toute suite exacte courte S dans M*, la suite*

$$F(M_0) \xrightarrow{F(\phi_0)} F(M_1) \xrightarrow{F(\phi_1)} F(M_2) \to 0$$

est exacte dans N.

Preuve. Le point *(2)* est le point *(1)* pour les catégories opposées, donc on ne démontre que le *(1)*.

Supposons que F est exact à gauche, c'est-à-dire qu'il commute avec les noyaux. Alors pour une suite exacte courte S, on a en particulier que $0 \to M_0 \xrightarrow{\phi_0} M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2$ est exacte, ce qui est équivalent à $M_0 = \mathrm{Ker}(\phi_1)$. On en déduit que $F(M_0) = F(\mathrm{Ker}(\phi_1)) = \mathrm{Ker}(F(\phi_1))$ et donc que $0 \to F(M_0) \xrightarrow{F(\phi_0)} F(M_1) \xrightarrow{F(\phi_1)} F(M_2)$ est exacte.

Inversement, si on a que pour toute suite exacte courte S dans M, la suite

$$0 \to F(M_0) \xrightarrow{F(\phi_0)} F(M_1) \xrightarrow{F(\phi_1)} F(M_2)$$

est exacte dans N. Soit $M' \xrightarrow{\phi} M$ un morphisme. Remarquons déjà que si ϕ est un monomorphisme, alors la suite $0 \to M' \xrightarrow{\phi} M \to \mathrm{Coker}(\phi) \to 0$ est exacte et alors $0 \to F(M') \xrightarrow{F(\phi)} F(M) \to F(\mathrm{Coker}(\phi))$ est également exacte, et en particulier $F(\phi)$ est un monomorphisme. On considère maintenant la suite exacte $0 \to \mathrm{Ker}(\phi) \to M' \to \mathrm{Coker}(\phi)$, ce qui nous donne le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & F(\mathrm{Ker}(\phi)) \arrow[r] \arrow[d, "u"] & F(M') \arrow[r] \arrow[d, equal] & F(\mathrm{Im}(\phi)) \arrow[d, "i"] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(F(\phi)) \arrow[r] \arrow[u, dashed, bend left, "v"] & F(M') \arrow[r, "F(\phi)"] & F(M)
\end{tikzcd}$$

où les deux lignes sont exactes. Puisque $\mathrm{Im}(\phi) \to M$ est un monomorphisme, alors i l'est également. On a alors que la composition $\mathrm{Ker}(F(\phi)) \to F(M') \to F(\mathrm{Im}(\phi))$ est 0, et donc on dispose d'un unique morphisme $v\colon \mathrm{Ker}(F(\phi)) \to F(\mathrm{Ker}(\phi))$ faisant commuter le diagramme. Finalement, comme $\mathrm{Ker}(F(\phi)) \to F(M')$ et $F(\mathrm{Ker}(\phi)) \to F(M')$ sont des monomorphismes, on en déduit que $u \circ v$ et $v \circ u$ sont l'identité, ce qui nous fournit l'isomorphisme souhaité.

□

Exemple 2.5.10. Soit A un anneau commutatif, et soit M un A-module. Définissons les foncteurs $F, G\colon \mathrm{Mod}\,A \to \mathrm{Mod}\,A$ comme ceci : $F(N) \coloneqq M \otimes_A N$ et $G(N) \coloneqq \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Alors F est exact à droite et G est exact à gauche.

Exemple 2.5.11. Soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux. Le foncteur de restriction Rest_f est exact, et le foncteur d'induction Ind_f est exact à droite.

Proposition 2.5.12. *Soit* $F\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un foncteur additif entre catégories abéliennes. Si* F *est une équivalence alors elle est exacte.*

Preuve. Nous allons prouver que F respecte les noyaux ; la preuve pour les conoyaux est similaire. Soit un morphisme $\phi\colon M_0 \to M_1$ dans M, de noyau K. On a ce schéma (flèches solides) :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[d, dashed, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "\theta"] & & \\ K \arrow[r, "k"] & M_0 \arrow[r, "\phi"] & M_1 \end{tikzcd}$$

et lorsqu'on lui applique F on obtient (flèches solides) :

$$\begin{tikzcd} N = F(M) \arrow[d, dashed, "F(\psi)"'] \arrow[dr, dashed, "\bar\theta"] & & \\ F(K) \arrow[r, "F(k)"] & F(M_0) \arrow[r, "F(\phi)"] & F(M_1) \end{tikzcd}$$

dans N. Soit $\bar\theta\colon N \to F(M_0)$ dans N un morphisme tel que $F(\phi)\circ\bar\theta = 0$. Comme F est essentiellement surjective sur les objets, il existe un $M \in \mathrm{M}$ et un isomorphisme $\alpha\colon F(M) \xrightarrow{\simeq} N$. Après avoir remplacé N par $F(M)$ et $\bar\theta$ par $\bar\theta \circ \alpha$, on peut supposer que $N = F(M)$.

Puisque F est pleinement fidèle, il existe un unique $\theta\colon M \to M_0$ tel que $F(\theta) = \bar\theta$, et $\phi\circ\theta = 0$. Il existe donc un unique $\psi\colon M \to K$ tel que $\theta = k \circ \psi$. Il s'ensuit que $F(\psi)\colon F(M) \to F(K)$ est l'unique morphisme tel que $\bar\theta = F(k) \circ F(\psi)$.

□

Proposition 2.5.13. *Soit* $F\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un foncteur additif entre catégories linéaires. Supposons que* F *soit une équivalence, avec quasi-inverse* G*. Alors* $G\colon \mathrm{N} \to \mathrm{M}$ *est un foncteur additif.*

Preuve. On considère le diagramme commutatif suivant dans N

$$\begin{tikzcd} F(G(Y)) \arrow[r, "\simeq", "\eta_Y"'] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ F(G(Y')) \arrow[r, "\simeq", "\eta_{Y'}"'] & Y' \end{tikzcd} .$$

Alors soient $g, g'\colon Y \to Y'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a que $F(G(g+\lambda g')) = \eta_{Y'}^{-1}\circ(g+\lambda g')\circ\eta_Y = \eta_{Y'}^{-1}\circ g\circ\eta_Y + \lambda\eta_{Y'}^{-1}\circ g'\circ\eta_Y = F(G(g)) + \lambda F(G(g')) = F(G(g) + \lambda G(g'))$. En regardant les deux extrémités et en utilisant que F est fidèle, on en déduit que $G(g + \lambda g') = G(g) + \lambda G(g')$, et il est clair que $G(0) = 0$.

□

Définition 2.5.14. Considérons des catégories abéliennes M et N. Supposons qu'on se donne une suite

$$\cdots F_{-1} \xrightarrow{\phi_{-1}} F_0 \xrightarrow{\phi_0} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_2 \cdots$$

(fini ou infini de part et d'autre), où chaque $F_i\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est un foncteur additif, et chaque $\phi_i\colon F_i \to F_{i+1}$ est un morphisme de foncteurs. On dit que cette suite est une suite exacte de foncteurs additifs si pour tout objet $M \in \mathrm{M}$ la suite

$$\cdots F_{-1}(M) \xrightarrow{\phi_{-1,M}} F_0(M) \xrightarrow{\phi_{0,M}} F_1(M) \xrightarrow{\phi_{1,M}} F_2(M) \cdots$$

dans N est exacte.

Proposition 2.5.15. *Soient* M *et* N *des catégories abéliennes, et soit* $F_0 \xrightarrow{\phi_0} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_2$ *une suite de foncteurs additifs* $\mathrm{M} \to \mathrm{N}$.

(1) Si $F_0 \xrightarrow{\phi_0} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_2 \to 0$ *est une suite exacte de foncteurs additifs, et si les foncteurs* F_0 *et* F_1 *sont exacts à droite, alors le foncteur* F_2 *est exact à droite.*

(2) Si $0 \to F_0 \xrightarrow{\phi_0} F_1 \xrightarrow{\phi_1} F_2$ *est une suite exacte de foncteurs additifs, et si les foncteurs* F_1 *et* F_2 *sont exacts à gauche, alors le foncteur* F_0 *est exact à gauche.*

Preuve. Puisque le point *(2)* est dual au *(1)*, on ne démontre que *(1)*.

Soit $M' \xrightarrow{\sigma} M \xrightarrow{\tau} M'' \to 0$ une suite exacte dans M. Il faut montrer que $F_2(M') \to F_2(M) \to F_2(M'') \to 0$ est une suite exacte dans N. Examinons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F_0(M') \arrow[r, "\phi_{0,M'}"] \arrow[d, "F_0(\sigma)"] & F_1(M') \arrow[r, "\phi_{1,M'}"] \arrow[d, "F_1(\sigma)"] & F_2(M') \arrow[r] \arrow[d, "F_2(\sigma)"] & 0 \\
F_0(M) \arrow[r, "\phi_{0,M}"] \arrow[d, "F_0(\tau)"] & F_1(M) \arrow[r, "\phi_{1,M}"] \arrow[d, "F_1(\tau)"] & F_2(M) \arrow[r] \arrow[d, "F_2(\tau)"] & 0 \\
F_0(M'') \arrow[r, "\phi_{0,M''}"] \arrow[d] & F_1(M'') \arrow[r, "\phi_{1,M''}"] \arrow[d] & F_2(M'') \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{2.5.16}$$

dans N. On sait que les lignes et les deux premières colonnes sont exactes. Il faut prouver que la troisième colonne est exacte.

Par le théorème de Freyd-Mitchell, on peut toujours supposer que la catégorie abélienne N est équivalente à une sous-catégorie abélienne pleine d'une catégorie de modules, ce qui nous permet de faire la preuve comme si les objets de N avaient des éléments.

Montrons d'abord que $F_2(\tau)$ est un épimorphisme. C'est facile : on sait que $F_1(\tau)$ et $\phi_{1,M''}$ sont des épimorphismes ; donc $\phi_{1,M''} \circ F_1(\tau) = F_2(\tau) \circ \phi_{1,M}$ est un épimorphisme ; et donc $F_2(\tau)$ est un épimorphisme.

Maintenant pour la montrer que la troisième colonne est exacte en $F_2(M)$. Puisque $F_2(\tau) \circ F_2(\sigma) = 0$ alors $\operatorname{Im}(F_2(\sigma)) \subset \operatorname{Ker}(F_2(\tau))$. Considérons maintenant $x \in \operatorname{Ker}(F_2(\tau))$, puisque $\phi_{1,M}$ est surjective, on a $y \in F_1(M)$ tel que $\phi_{1,M}(y) = x$. On pose $z = F_1(\tau)(y) \in F_1(\tau)$ et alors on voit que $\phi_{1,M''}(z) = \phi_{1,M''} \circ F_1(\tau)(y) = F_2(\tau) \circ \phi_{1,M}(y) = F_2(\tau)(x) = 0$, donc $z \in \operatorname{Ker}(\phi_{1,M''})$. Par exactitude de la dernière colonne, on dispose de $w \in F_0(M'')$ tel que $\phi_{0,M''}(w) = z$. Comme $F_0(\tau)$ est surjective on a $v \in F_0(M)$ tel que $F_0(\tau)(v) = w$ et alors on trouve un élément $\phi_{0,M}(v) \in F_1(M)$. Maintenant, si on considère $y - \phi_{0,M}(v)$ on voit facilement que $F_1(\tau)(y - \phi_{0,M}(v)) = z - z = 0$, donc par exactitude de la deuxième colonne, il existe un $u \in F_1(M')$ tel que $F_1(\sigma)(u) = y - \phi_{0,M}(v)$. Finalement, on considère $t \coloneqq \phi_{1,M'}(u)$ et on vérifie que $F_2(\sigma)(t) = x$. En effet, $F_2(\sigma)(t) = F_2(\sigma)(\phi_{1,M'}(u)) = \phi_{1,M} \circ F_1(\sigma)(u) = \phi_{1,M}(y - \phi_{0,M}(v)) = x - \underbrace{\phi_{1,M}(\phi_{0,M}(v))}_{=0} = x$. Ce qui nous donne l'inclusion inverse, et démontre le résultat.

□

Remarque. Si on aurait utiliser les éléments généralisés, dans le preuve précédente, il aurait plutôt fallu montrer que le morphisme canonique $\operatorname{Im}(F_2(\sigma)) \to \operatorname{Ker}(F_2(\tau))$ qui découle du fait que $F_2(\tau) \circ F_2(\sigma) = 0$, est un épimorphisme. En effet, cela suffit pour montrer que c'est un isomorphisme puisqu'elle est toujours un monomorphisme, pour ce convaincre il suffit de regarder le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F_2(M') \arrow[rr, "F_2(\sigma)"] \arrow[dr, two heads] & & F_2(M) \arrow[rr, "F_2(\tau)"] & & F_2(M'') \\
& \operatorname{Im}(F_2(\sigma)) \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook, dashed] & & \operatorname{Ker}(F_2(\tau)) \arrow[ul, hook'] &
\end{tikzcd}.$$

Nous terminons cette section par une discussion des foncteurs contravariants additifs. Supposons que M et N soient des catégories linéaires. Un foncteur contravariant $F\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ est dit additif s'il satisfait la condition de la définition 2.5.1, avec les changements évidents. On a le résultat suivant qui ne nécessite pas de preuve

Proposition 2.5.17. *Soient* M *et* N *des catégories linéaires. Mettez sur* M^{op} *la structure linéaire canonique.*

(1) Le foncteur $\mathrm{Op}\colon \mathrm{M} \to \mathrm{M}^{\mathrm{op}}$ *est un foncteur contravariant additif.*

(2) Si $F\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *est un foncteur contravariant additif, alors* $F \circ \mathrm{Op}\colon \mathrm{M}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{N}$ *est un foncteur additif ; et vice versa.*

On peut donner une définition des foncteurs contravariants exacts à gauche et droite.

Définition 2.5.18. Soit $F\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un foncteur contravariant additif entre catégories abéliennes.

(1) F est un *foncteur contravariant exact à gauche* si pour toute suite exacte courte S dans M, la suite

$$0 \to F(M_2) \xrightarrow{F(\phi_1)} F(M_1) \xrightarrow{F(\phi_0)} F(M_0)$$

est exacte dans N.

(2) F est un *foncteur contravariant exact à droite* si pour toute suite exacte courte S dans M, la suite

$$F(M_2) \xrightarrow{F(\phi_1)} F(M_1) \xrightarrow{F(\phi_0)} F(M_0) \to 0$$

est exacte dans N.

(3) F est un *foncteur contravariant exact* s'il envoie toute suite exacte courte S dans M vers une suite exacte courte dans N.

Proposition 2.5.19. *Soient* M *et* N *des catégories abéliennes. Rappelons que* M^{op} *est aussi une catégorie abélienne.*

(1) Le foncteur $\mathrm{Op}\colon \mathrm{M} \to \mathrm{M}^{\mathrm{op}}$ *est un foncteur contravariant exact.*

(2) Si $F\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *est un foncteur contravariant exact, alors* $F \circ \mathrm{Op}\colon \mathrm{M}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{N}$ *est un foncteur additif; et vice versa. Il en va de même pour l'exactitude à gauche et l'exactitude à droite.*

Preuve. Le point *(2)* est clair, donc on ne démontre que le *(1)*.

On se donne $0 \to M_0 \xrightarrow{\phi_0} M_1 \xrightarrow{\phi_1} M_2 \to 0$ exacte, lorsqu'on applique Op, on obtient

$$0 \longrightarrow M_2 \xrightarrow{\mathrm{Op}(\phi_1)} M_1 \xrightarrow{\mathrm{Op}(\phi_0)} M_0 \longrightarrow 0 \ .$$

Comme ϕ_1 est un monomorphisme, alors $\mathrm{Op}(\phi_1)$ est un épimorphisme et de même, comme ϕ_0 est un épimorphisme, alors $\mathrm{Op}(\phi_0)$ est un monomorphisme. Reste a montrer l'exactitude en M_1, c'est-à-dire, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Op}(\phi_0)) = \mathrm{Im}(\mathrm{Op}(\phi_1))$ ou encore que $\mathrm{Coker}(\phi_0) = \mathrm{Coim}(\phi_1)$. On va pour cela montrer que $\mathrm{Coker}(\phi_0) = \mathrm{Coim}(\phi_1)$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(\phi_1) = \mathrm{Im}(\phi_0)$. Une fois ce résultat établi, le résultat en découlera.

Pour cela il faut montrer que pour un $f\colon M \to N$ on a $\mathrm{Ker}\,\mathrm{Coker}\,\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Coker}\,\mathrm{Ker}\,\mathrm{Coker}(f) = \mathrm{Coker}(f)$, étant duaux on ne montre que le premier.

On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Coker}(f) \arrow[dr, "u"] & \\
\mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "k"] & M \arrow[u, "c"] \arrow[r, "f"] & N \\
& L \arrow[u, "g"] \arrow[ul, dashed] &
\end{tikzcd}$$

avec $c \circ g = 0$. Cela donne $u \circ c \circ g = f \circ g = 0$, donc on a l'existence unique de la flèche pointillée, ce qui montre le résultat.

□

Exemple 2.5.20. Soit A un anneau commutatif, et soit M un A-module. Définissons le foncteur contravariant $F\colon\ \mathrm{Mod}\,A \to \mathrm{Mod}\,A$ comme étant $F(N) \coloneqq \mathrm{Hom}_A(N, M)$. Alors F est un foncteur contravariant exact à gauche.

Parfois M et M^{op} sont équivalents en tant que catégories abéliennes. En effet, si on considère la catégorie des $\mathbb{K}$-modules de type fini $\mathrm{M} \coloneqq \mathrm{Mod}_{\mathrm{f}}\,\mathbb{K}$ pour un corps $\mathbb{K}$ (c'est les espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$). Il s'agit d'une catégorie abélienne $\mathbb{K}$-linéaire, et l'opérateur $F = \mathrm{Hom}(-, \mathbb{K})$ fourni une équivalence entre M^{op} et M (c'est les espaces vectoriels duaux habituels).

2.6. **Objets Projectifs.**

Dans cette section M est une catégorie abélienne.

Un *scindement* d'un épimorphisme $\psi\colon M \to M''$ dans M est un morphisme $\beta\colon M'' \to M$ tel que $\psi \circ \beta = \mathrm{id}_{M''}$. Un scindement d'un monomorphisme $\phi\colon M' \to M$ est un morphisme $\alpha\colon M \to M'$ tel que $\alpha \circ \phi = \mathrm{id}_{M'}$. Un scindement d'une suite exacte courte

$$0 \to M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0 \tag{2.6.1}$$

est un scindement de l'épimorphisme ψ, ou de manière équivalente un découpage du monomorphisme ϕ. La suite exacte courte est dite *scindée* si elle comporte un certain scindement.

À partir d'un scindement de ψ on en trouve un pour ϕ et l'inverse est vrai (c'est le dual). En effet, supposons avoir

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\phi"] & M \arrow[r, shift left, "\psi"] & M'' \arrow[l, shift left, "\beta"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

avec $\psi \circ \beta = \mathrm{id}_{M''}$. Alors $\psi \circ \beta \circ \psi = \psi$, donc $\psi(\mathrm{id}_M - \beta \circ \psi) =$. Ainsi, $\mathrm{id}_M - \beta \circ \psi$ se factorise par $\mathrm{Ker}(\psi) = M'$, donc on dispose de $\alpha\colon M \to M'$ tel que $\phi \circ \alpha = \mathrm{id}_M - \beta \circ \psi$ i.e. $\phi \circ \alpha + \beta \circ \psi = \mathrm{id}_M$. Donc on trouve que $\phi \circ \alpha \circ \phi + \beta \circ \underbrace{\psi \circ \phi}_{=0} = \phi$ ce qui donne, puisque ϕ est un monomorphisme, que $\alpha \circ \phi = \mathrm{id}_{M'}$. On a de plus, $\beta \circ \psi = \mathrm{id}_M - \phi \circ \alpha$ donc $\alpha \circ \beta \circ \psi = \alpha - \alpha \circ \phi \circ \alpha = 0$ et comme ψ est un épimorphisme on a que $\alpha \circ \beta = 0$. Ainsi, on a tout le nécessaire pour voir que $M = M' \oplus M''$.

Définition 2.6.2. Un objet $P \in \mathrm{M}$ est un *objet projectif* si pour tout morphisme $\gamma\colon P \to N$ et tout épimorphisme $\psi\colon M \twoheadrightarrow N$, il existe un morphisme $\bar{\gamma}\colon P \to N$ tel que $\psi \circ \bar{\gamma} = \gamma$.

Ceci est décrit dans le diagramme commutatif suivant dans M :

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\bar{\gamma}"'] \arrow[d, "\gamma"] \\ M \arrow[r, two heads, "\psi"] & N \end{tikzcd}$$

Lemme 2.6.3. *Soit* M *une catégorie abélienne. Considérons le diagramme*

(D)
$$\begin{tikzcd} M_1 \times M_2 \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"'] & M2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "\phi_1"'] & N \end{tikzcd}$$

dans M*, où les* p_i *sont les projections. On définit l'objet*

$$L := \mathrm{Ker}(\phi_1 \circ p_1 - \phi_2 \circ p_2) \subset M_1 \times M_2,$$

avec l'inclusion $e\colon L \to M_1 \times M_2$*. On pose* $\psi_i := p_i \circ e\colon L \to M_i$*.*

(1) Le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\psi_2"] \arrow[d, "\psi_1"'] & M2 \arrow[d, "\phi_2"] \\ M_1 \arrow[r, "\phi_1"'] & N \end{tikzcd}$$

est un pullback et $L = M_1 \times_N M_2$*.*

(2) Si ϕ_1 *est un épimorphisme alors* ψ_2 *également.*

Notons que le diagramme (D) n'est pas supposé commutatif. Dans le cas où (D) est commutatif, alors $M_1 \times_N M_2 = M_1 \times M_2$.

Preuve. *(1)* : Le fait que L (avec les morphismes ψ_i) soit le produit fibré est immédiat d'après les définitions de produit et de noyau.

(2) : Soit ρ un morphisme tel que $\rho \circ (\phi_1 \circ p_1 - \phi_2 \circ p_2) = 0$. On considère l'immersion $e_1\colon M_1 \to M_1 \oplus M_2 = M_1 \times M_2$. Alors $0 = \rho \circ (\phi_1 \circ p_1 - \phi_2 \circ p_2) \circ e_1 = \rho \circ \phi_1$. Puisque ϕ_1 est un épimorphisme, on a $\rho = 0$, et alors

$$\phi_1 \circ p_1 - \phi_2 \circ p_2\colon M_1 \times M_2 \to N \tag{2.6.4}$$

est un épimorphisme. Ainsi, (2.6.4) est le conoyau de e.

Soit maintenant $\sigma\colon M_2 \to P$ un morphisme tel que $\sigma \circ \psi_2 = 0$. Comme $\psi_2 = p_2 \circ e$, on obtient $\sigma \circ p_2 \circ e = 0$. Donc $\sigma \circ p_2$ se factorise par $\mathrm{Coker}(e)$, en particulier, on dispose de $\sigma'\colon N \to P$ tel que

$$\sigma \circ p_2 = \sigma' \circ (\phi_1 \circ p_1 - \phi_2 \circ p_2)\colon M_1 \times M_2 \to P. \tag{2.6.5}$$

Mais, $p_2 \circ e_1 = 0$ et alors

$$0 = \sigma \circ p_2 \circ e_1 = \sigma' \circ (\phi_1 \circ p_1 - \phi_2 \circ p_2) \circ e_1 = \sigma' \circ \phi_1.$$

Comme ϕ_1 est un épimorphisme, il s'ensuit que $\sigma' = 0$. Finalement en utilisant (2.6.5), on obtient

$$\sigma = \sigma \circ p_2 \circ e_2 = \sigma' \circ (\phi_1 \circ p_1 - \phi_2 \circ p_2) \circ e_2 = -\sigma' \circ \phi_2 = 0.$$

On conclut que ψ_2 est un épimorphisme.

□

Proposition 2.6.6. *Les assertions suivantes sont équivalentes pour* $P \in$ M *:*

(1) P *est projectif.*

(2) Le foncteur additif $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, -)\colon \mathrm{M} \to \mathrm{Ab}$ *est exact.*

(3) Toute suite exacte courte (2.6.1) avec $M'' = P$ *est scindée.*

Preuve. *(i)* ⇔ *(ii)* : Soit $0 \to M' \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} M'' \to 0$ exacte. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, -)$ est exacte à gauche, on a $0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, M') \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\phi)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\psi)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, M'')$ qui est exacte. Maintenant, P est projectif si et seulement si $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \psi)$ est surjectif, c'est-à-dire si et seulement si $0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, M') \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, M'') \to 0$ est exacte.

(i) ⇒ *(iii)* : Il suffit de regarder le diagramme

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "s"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_P"] \\ M \arrow[r, two heads] & P \end{tikzcd}$$

pour voir qu'on dispose d'un s tel que $\psi \circ s = \mathrm{id}_P$, et donc la suite se scinde.

(iii) $\Rightarrow$ *(i)* : Supposons qu'on ait $M \twoheadrightarrow M''$, alors si on prend le produit fibré de P et M sur M'' on obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] & X \arrow[r, two heads, "f"] \arrow[d, "g'"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & P \arrow[r] \arrow[l, bend right, "r"'] \arrow[d, "g"] & 0 \\
& & M \arrow[r, two heads, "\psi"] & M'' &
\end{tikzcd}$$

avec f un épimorphisme. On dispose alors de r tel que $f \circ r = \mathrm{id}_P$ car la première ligne est scindée. On vérifie que $\psi \circ g' \circ r \circ f = g \circ f$ et f étant un épimorphisme, on en déduit $\psi \circ g' \circ r = g$.

□

Définition 2.6.7. On dit que M a suffisamment de projectifs si tout $M \in \mathrm{M}$ admet un épimorphisme $P \to M$ d'un objet projectif P.

Lemme 2.6.8. *Soit $\{M_i\}_{i\in I}$ un famille d'objets dans une catégorie abélienne M et supposons que $\bigoplus_{i\in I} M_i$ existe. Alors $\bigoplus_{i\in I} M_i$ est projectif si et seulement si chaque M_i l'est.*

Preuve. Il suffit de voir que $\mathrm{Hom}(\bigoplus_{i\in I} M_i, -) \simeq \bigoplus_{i\in I} \mathrm{Hom}(M_i, -)$ en tant que foncteur. Finalement, comme dans Ab le produit de suites est exacte si et seulement si chaque suite est exacte, alors on a le résultat.

□

Exemple 2.6.9. Pour un anneau A, on a qu'un A-module P est projectif si et seulement si il existe un autre module P' et un module libre Q tel que $P \oplus P' \cong Q$.

En effet, il suffit de voir que $\mathrm{Hom}(A, -)$ étant isomorphe au foncteur identité sur $\mathrm{Mod}\, A$, est exact. Donc A est projectif, et alors par le lemme 2.6.8, tout A-module libre est projectif et par le même lemme on a le reste du résultat.

Cela nous permet de voir que $\mathrm{Mod}\, A$ a assez de projectifs. En effet, pour un A-module P, il suffit de considérer le module libre engendré par ses éléments, notons le L, et alors on a clairement $L \twoheadrightarrow P$, avec L projectif.

Exemple 2.6.10. Soit M la catégorie des groupes abéliens finis. Alors il est clair que 0 est projectif, mais on peut montrer qu'il est le seul. En effet, par le théorème de structure, il suffit de voir que $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ n'est pas projectif. Cela découle de la suite exacte $\mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \to 0$ qui ne se scinde pas, et donc on a le résultat.

3. Algèbre Différentielle Graduée

On rappelle que selon la Convention (1.2.4), il existe un anneau de base commutatif non nul $\mathbb{K}$. Par défaut, tous les anneaux sont $\mathbb{K}$-centraux, toutes les catégories linéaires sont $\mathbb{K}$-linéaires, toutes les opérations linéaires (telles que les homomorphismes d'anneaux et les foncteurs linéaires) sont $\mathbb{K}$-linéaires et $\otimes$ signifie $\otimes_{\mathbb{K}}$. Dans la suite, "DG" signifie "différentiel gradué".

3.1. **Algèbre Graduée.**

Avant d'attaquer le monde du DG, il est bien de comprendre celui du gradué.

Définition 3.1.1. Un $\mathbb{K}$-*module cohomologiquement gradué* est un $\mathbb{K}$-module cohomologiquement gradué-module M muni d'une décomposition en somme directe $M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$ en $\mathbb{K}$-sous-modules. Le $\mathbb{K}$-module M^i est appelé la *composante homogène de degré cohomologique* i de M. Les éléments non nuls de M^i sont appelés *éléments homogènes de degré cohomologique* i.

Convention 3.1.2. Dans toute la suite, par "$\mathbb{K}$-module gradué", on entend un $\mathbb{K}$-*module gradué cohomologiquement*, tel que défini ci-dessus.

Supposons avoir M et N des $\mathbb{K}$-modules gradués. Pour un entier i on pose

$$(M \otimes N)^i := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} (M^j \otimes N^{i-j}).$$

Alors

$$M \otimes N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (M \otimes N)^i \tag{3.1.3}$$

est un $\mathbb{K}$-module gradué.

Un homomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire $\phi \colon M \to N$ est dit *homogène de degré* i si $\phi(M^j) \subseteq N^{j+i}$ pour tout j. On note $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)^i$ le $\mathbb{K}$-module des homomorphismes de degré i de $M \to N$. Autrement dit,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)^i := \prod_{j \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M^j, N^{j+i}). \tag{3.1.4}$$

Définition 3.1.5. Soit M et N des $\mathbb{K}$-modules gradués.

(1) Le *module des homomorphismes* $\mathbb{K}$-*linéaires* gradués de M vers N est le $\mathbb{K}$-module gradué

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)^i.$$

(2) Un homomorphisme de degré 0, $\phi \colon M \to N$ est appelé un homomorphisme *strict de* $\mathbb{K}$-*modules gradués.*

Si M_0, M_1, M_2 sont des $\mathbb{K}$-modules gradués, et $\phi_k \colon M_k \to M_{k+1}$ sont des homomorphismes $\mathbb{K}$-linéaires de degrés i_k, alors $\phi_1 \circ \phi_0 \colon M_0 \to M_2$ est un homomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire de degré $i_0 + i_1$. L'automorphisme identité $\mathrm{id}_M \colon M \to M$ est de degré 0.

Définition 3.1.6. La *catégorie stricte des* $\mathbb{K}$-*modules gradués* est la catégorie $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, dont les objets sont les $\mathbb{K}$-modules cohomologiquement gradués, et dont les morphismes sont les homomorphismes stricts des $\mathbb{K}$-modules cohomologiquement gradués.

Il est facile de voir que $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ est une catégorie abélienne $\mathbb{K}$-linéaire ; les noyaux et les conoyaux sont degré par degré.

Remarque. Soit $\mathrm{Ungr} \colon \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K}) \to \mathbf{M}(\mathbb{K})$ le foncteur qui oublie la gradation. C'est fidèle, mais souvent pas plein. À savoir l'homomorphisme évident

$$\mathrm{Ungr}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Ungr}(M), \mathrm{Ungr}(N))$$

est injectif mais pas bijectif.

L'opération tensorielle $(- \otimes -)$ de (3.1.3) fait de $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ une *catégorie monoïdale* $\mathbb{K}$-*linéaire*, d'unité monoïdale $\mathbb{K}$. Cela signifie que le bifoncteur

$$(- \otimes -) \colon \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K}) \times \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$$

satisfait les axiomes monoïdaux, et il est $\mathbb{K}$-bilinéaire. De plus, étant donné $M, N \in \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, définissons l'*isomorphisme de tressage*

$$\mathrm{br}_{M,N} \colon M \otimes N \xrightarrow{\simeq} N \otimes M, \tag{3.1.7}$$

$$\mathrm{br}_{M,N}(m \otimes n) := (-1)^{i \cdot j} \cdot n \otimes m \tag{3.1.8}$$

pour des éléments homogènes $m \in M^i$ et $n \in N^j$. Comme $\mathrm{br}_{N,M} \circ \mathrm{br}_{M,N} = \mathrm{id}_{M\otimes N}$, cela fait de $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ une *catégorie monoïdale symétrique* $\mathbb{K}$*-linéaire*. L'isomorphisme de tressage (3.1.8) est souvent appelé règle du *signe de Koszul*.

Remarque. Pour un entier $l \geqslant 1$ soit τ une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, l\}$. Alors pour chaque $M_1, \dots, M_l \in \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ il existe un isomorphisme

$$\mathrm{br}_\tau \colon M_1 \otimes \cdots \otimes M_l \xrightarrow{\simeq} M_{\tau(1)} \otimes \cdots \otimes M_{\tau(l)}$$

dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, naturel dans la suite d'objets $\{M_i\}_{i=1,\dots l}$. Pour plus de détails voir [8, Exercise 3.1.10].

Définition 3.1.9. Un *anneau* $\mathbb{K}$*-central cohomologiquement gradué* est un anneau $\mathbb{K}$-central A, muni d'une décomposition en somme directe $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ en $\mathbb{K}$-sous-modules, tel que $1_A \in A^0$, et $A^i \cdot A^j \subseteq A^{i+j}$.

Définition 3.1.10. Soient A et B des anneaux $\mathbb{K}$-centraux cohomologiquement gradués. Un *homomorphisme d'anneaux* $\mathbb{K}$*-centraux cohomologiquement gradués* est un homomorphisme d'anneaux $\mathbb{K}$-centraux $f \colon A \to B$ qui respecte les gradations, à savoir $f(A^i) \subseteq B^i$. La catégorie des anneaux $\mathbb{K}$-centraux cohomologiquement gradués est notée $\mathrm{GRng}\,/_c\mathbb{K}$.

Comme toujours pour les homomorphismes d'anneaux, f doit préserver les unités, c'est-à-dire $f(1_A) = 1_B$. Notez que $\mathbb{K}$ lui-même est un anneau gradué, concentré au degré 0 ; et c'est l'objet initial de $\mathrm{GRng}\,/_c\mathbb{K}$.

Convention 3.1.11. Par "anneau gradué", nous entendons un anneau $\mathbb{K}$-central gradué de manière cohomologique, tel que défini ci-dessus.

Rappelons que selon la Convention (1.2.4), tous les homomorphismes d'anneaux, y compris les anneaux gradués, sont sur $\mathbb{K}$.

Exemple 3.1.12. Soit M un $\mathbb{K}$-module gradué. Alors le module

$$\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M) \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, M) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, M)^i,$$

avec l'opération de composition, est un $\mathbb{K}$-anneau gradué.

Définition 3.1.13. Soit $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ un $\mathbb{K}$-anneau gradué. On dit que A est un *anneau gradué faiblement commutatif* si $b \cdot a = (-1)^{i\cdot j} \cdot a \cdot b$ pour tout $a \in A^i$ et $b \in A^j$.

Remarque. La définition ci-dessus est l'exemple archétypique de la règle du signe Koszul. On peut donner une explication catégorique de la définition ci-dessus, en utilisant la structure monoïdale symétrique de $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, (c.f. [8, Remark 3.1.16]).

Définition 3.1.14. Soit $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ un anneau gradué.

(1) On dit que les éléments homogènes $a \in A^i$ et $b \in A^j$ *commutent de façon graduée* entre eux si $b \cdot a = (-1)^{i\cdot j} \cdot a \cdot b$.

(2) Un élément homogène $a \in A^i$ est appelé *élément gradué-central* s'il commute de façon gradué avec tous les éléments homogènes de A.

(3) Le gradué-centre de A est le $\mathbb{K}$-sous-module $\mathrm{Cent}(A) \subseteq A$ engendré par les éléments gradués-centraux homogènes.

Des vérifications immédiates donnent la proposition suivante.

Proposition 3.1.15. *Soit A un anneau gradué.*

(1) $\mathrm{Cent}(A)$ *est un sous-anneau gradué de A, il est faiblement commutatif, et il contient l'image de l'anneau de base* $\mathbb{K}$.

(2) A est faiblement commutatif ssi $\mathrm{Cent}(A) = A$.

On va donner plusieurs formules de signes qui sont des conséquences de la règle des signes de Koszul. On peut les faire remonter à la *structure monoïdale bifermée de* $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, c'est-à-dire à l'interaction entre les bifoncteurs $(- \otimes -)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(-,-)$.

Supposons que pour $k = 0, 1$ on dispose d'homomorphismes de $\mathbb{K}$-modules gradués $\phi_k \colon M_k \to N_k$ de degrés i_k. Alors l'homomorphisme

$$\phi_0 \otimes \phi_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M_0 \otimes M_1, N_0 \otimes N_1)^{i_0+i_1}$$

agit sur un tenseur $m_0 \otimes m_1 \in M_0 \otimes M_1$, avec $m_k \in M_k^{j_k}$, comme ceci :

$$(\phi_0 \otimes \phi_1)(m_0 \otimes m_1) \coloneqq (-1)^{i_1\cdot j_0} \cdot \phi_0(m_0) \otimes \phi_1(m_1) \in N_0 \otimes N_1. \tag{3.1.16}$$

La “règle” expliquant cette formule est que ϕ_1 et m_0 ont été transposés.

Supposons que pour $k = 0, 1$ on dispose d’homomorphismes de $\mathbb{K}$-modules gradués $\phi_k \colon M_k \to N_k$ de degrés i_k. Alors l’homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\phi_0, \phi_1) \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M_0, M_1), \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(N_0, N_1))^{i_0+i_1}$$

agit sur $\gamma \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M_0, M_1)^j$ comme suit : pour un élément $n_0 \in N_0^k$ on a

$$\mathrm{Hom}(\phi_0, \phi_1)(\gamma)(n_0) := (-1)^{i_0\cdot(i_1+j)}(\phi_1 \circ \gamma \circ \phi_0)(n_0) \in N1^{k+i_0+i_1+j}. \tag{3.1.17}$$

Le signe est parce que ϕ_0 a sauté à travers ϕ_1 et γ.

Définition 3.1.18. Soient A et B des anneaux gradués. Alors $A \otimes B$ est un anneau gradué, avec multiplication

$$(a_0 \otimes b_0) \cdot (a_1 \otimes b_1) := (-1)^{i_1\cdot j_0} \cdot (a_0 \cdot a_1) \otimes (b_0 \cdot b_1)$$

pour les éléments $a_k \in A^{i_k}$ et $b_k \in B^{j_k}$.

Nous aurons besoin d’une autre notion de commutativité qui n’est pas de nature catégorique.

Définition 3.1.19. Soit $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ un anneau gradué.

(1) L’anneau gradué A est dit *fortement commutatif* s’il est faiblement commutatif, et aussi $a^2 = 0$ si $a \in A^i$ et i est impair.

(2) L’anneau gradué A est dit *non positif* si $A^i = 0$ pour tout $i > 0$.

(3) L’anneau gradué A est appelé *anneau gradué commutatif* s’il est non positif et fortement commutatif.

Exemple 3.1.20. Par *ensemble gradué*, on entend un ensemble X partitionné comme $X = \coprod_{i\in\mathbb{Z}} X^i$. Les éléments de X^i sont appelés variables de degré i. L’*anneau de polynômes gradués non commutatif* sur l’ensemble gradué X est l’anneau gradué $\mathbb{K}\langle X\rangle$, qui est le $\mathbb{K}$-module gradué libre engendré par les monômes $x_1 \cdots x_n$ des éléments de X, et la multiplication se fait par concaténation de monômes.

L’*anneau polynomial gradué fortement commutatif* sur l’ensemble gradué X est l’anneau gradué $\mathbb{K}[X] := \mathbb{K}\langle X\rangle/I$, où I est l’idéal bilatère de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ engendré par les éléments $y \cdot x - (-1)^{i\cdot j} \cdot x \cdot y$ pour toutes les variables $x \in X^i$ et $y \in X^j$, ainsi que les éléments $z \cdot z$ pour tout $z \in X^k$ et k impair. C’est un anneau gradué fortement commutatif.

Exemple 3.1.21. Des calculs directs montrent que si A et B sont des anneaux gradués faiblement (resp. fortement) commutatifs, alors $A \otimes B$ l’est aussi.

Remarque. La commutativité faible est la condition de commutativité évidente dans le cadre gradué cohomologiquement, lorsque la règle du signe de Koszul est imposée. La commutativité forte a une autre raison d’être. Son rôle est de garantir que l’anneau polynomial gradué fortement commutatif $\mathbb{K}[X]$ de l’exemple ci-dessus soit un $\mathbb{K}$-module gradué libre. Sans cette condition, le carré d’une variable impaire z serait un élément de 2-torsion non nul. Bien sûr, si 2 est inversible dans $\mathbb{K}$ (par exemple si $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$), alors la commutativité faible et forte d’un $\mathbb{K}$-anneau central gradué coïncident.

Remarque. Soit $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$ un anneau gradué faiblement commutatif, et supposons que A a des éléments impairs non nuls. Alors, après oubli de la gradation, l’anneau A n’est plus commutatif (sauf cas particuliers, comme dans en caractéristique 2).

Définition 3.1.22. Soit A un anneau gradué. Un *A-module à gauche gradué* est un A-module à gauche M, muni d’une décomposition en $\mathbb{K}$-module $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$, tel que $A^i \cdot M^j \subseteq M^{i+j}$ pour tout i, j. On peut aussi parler de A-modules à droite gradués, et de bimodules gradués. Mais notre option par défaut est que les modules sont des modules à gauche.

Une vérification simple nous donne la proposition suivante.

Proposition 3.1.23. *Soit M un $\mathbb{K}$-module gradué, A un anneau $\mathbb{K}$-central gradué, et $f \colon A \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M)$ un homomorphisme dans $\mathrm{GRng}\,/_{c}\mathbb{K}$. Alors :*

(1) M devient un A-module gradué, via l’action $a \cdot m := f(a)(m)$.

(2) Toute structure de A-module graduée sur M qui respecte la structure de $\mathbb{K}$-module graduée donnée apparaît de cette façon.

Lemme 3.1.24. *Soit A un anneau gradué, soit M un A-module droit gradué, et soit N un A-module à gauche gradué. Alors le $\mathbb{K}$-module $M \otimes_A N$ a une décomposition en somme directe*

$$M \otimes_A N = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (M \otimes_A N)^i,$$

où $(M \otimes_A N)^i$ est le $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel engendré par les tenseurs $m \otimes n$, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $m \in M^j$ et $n \in N^{i-j}$.

Preuve. [8, Lemma 3.1.30]

□

Définition 3.1.25. Soit A un anneau gradué, et soient M, N des A-modules gradués. Pour chaque $i \in \mathbb{Z}$ on définit $\mathrm{Hom}_A(M,N)^i$ comme étant le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M,N)^i$ constitué des homomorphismes $\phi \colon M \to N$ tels que $\phi(a \cdot m) = (-1)^{i \cdot k} \cdot a \cdot \phi(m)$ pour tout $a \in A^k$. Ensuite on définit le module gradué

$$\mathrm{Hom}_A(M,N) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_A(M,N)^i.$$

Supposons que C est une catégorie $\mathbb{K}$-linéaire. Puisque la composition des morphismes est $\mathbb{K}$-bilinéaire, pour tout triplet d'objets $M_0, M_1, M_2 \in \mathrm{C}$, la composition peut être exprimée comme un homomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_1, M_2) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_2) \\ \phi_1 \otimes \phi_0 & \mapsto & \phi_1 \circ \phi_0. \end{array}$$

On parle alors d'homomorphisme de composition. Il sera utilisé dans la définition suivante.

Définition 3.1.26. Une *catégorie $\mathbb{K}$-linéaire graduée* est une catégorie $\mathbb{K}$-linéaire C, munie d'une gradation sur chacun des $\mathbb{K}$-modules $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1)$. Les conditions étant les suivantes :

(1) Pour tout objet M, l'automorphisme identité id_M est de degré 0.

(2) Pour tout triplet d'objets $M_0, M_1, M_2 \in \mathrm{C}$ l'homomorphisme de composition

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_1, M_2) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_2)$$

est un homomorphisme strict de $\mathbb{K}$-modules gradués.

Un morphisme $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1)^i$ est appelé un morphisme de degré i.

Définition 3.1.27. Soit C une catégorie $\mathbb{K}$-linéaire graduée. La *sous-catégorie stricte de* C est la sous-catégorie $\mathrm{Str}(\mathrm{C})$ sur tous les objets de C, dont les morphismes sont les morphismes de degré 0 de C.

Exemple 3.1.28. Soit A un anneau gradué. Définissez $\mathrm{GMod}\, A$ comme étant la catégorie dont les objets sont les modules A gradués. Pour $M, N \in \mathrm{GMod}\, A$, l'ensemble des morphismes est le $\mathbb{K}$-module gradué $\mathrm{Hom}_{\mathrm{GMod}}(M,N) := \mathrm{Hom}_A(M,N)$ vu ci-dessus. Alors $\mathrm{GMod}\, A$ est une catégorie $\mathbb{K}$-linéaire graduée. Les morphismes de la sous-catégorie $\mathrm{GMod}_{\mathrm{str}}\, A := \mathrm{Str}(\mathrm{GMod}\, A)$ sont les homomorphismes stricts des A-modules gradués. On écrit souvent $\mathbf{G}(A) := \mathrm{GMod}\, A$ et $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A) := \mathrm{GMod}_{\mathrm{str}}\, A$. On a introduit ces notations pour distinguer la catégorie abélienne $\mathrm{GMod}_{\mathrm{str}}\, A$ de la catégorie graduée $\mathrm{GMod}\, A$ qui la contient.

Définition 3.1.29. Soient C et D des catégories $\mathbb{K}$-linéaires graduées. Un foncteur $F \colon C \to D$ est appelé *foncteur $\mathbb{K}$-linéaire gradué* s'il vérifie :

— Pour tout couple d'objets $M_0, M_1 \in \mathrm{C}$, la fonction

$$F \colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(F(M_0), F(M_1))$$

est un homomorphisme strict de $\mathbb{K}$-modules gradués.

Convention 3.1.30. Pour simplifier la terminologie, nous utiliserons souvent les expressions "catégorie graduée" et "foncteur gradué" comme abréviations de "catégorie graduée $\mathbb{K}$-linéaire" et "foncteur gradué $\mathbb{K}$-linéaire", respectivement.

Exemple 3.1.31. Soit A un anneau gradué. On peut voir A comme une catégorie A avec un seul objet, et c'est une catégorie graduée. Si $f \colon A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux gradués, alors en passant aux catégories à un seul objet on obtient un foncteur gradué $F \colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$.

Définition 3.1.32. Soit $F, G \colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ des foncteurs gradués entre catégories graduées, et soit $i \in \mathbb{Z}$. Un *morphisme de degré i de foncteurs gradués* $\eta \colon F \to G$ est une collection $\eta = \{\eta_M\}_{M \in \mathrm{C}}$ de morphismes $\eta_M \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(F(M), G(M))^i$, telle que pour tout morphisme $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1)^j$ il y a égalité

$$G(\phi) \circ \eta_{M_0} = (-1)^{i \cdot j} \cdot \eta_{M_1} \circ F(\phi)$$

dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(F(M_0), G(M_1))^{i+1}$.

Si i est impair dans la définition ci-dessus, alors après avoir oublié la gradation, $\eta \colon F \to G$ n'est généralement plus un morphisme de foncteurs.

Définition 3.1.33. Soit M une catégorie abélienne. Un *objet gradué dans* M est une collection $\{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ d'objets $M_i \in \mathrm{M}$.

Puisque on n'a pas supposé que M a des sommes directes dénombrables, les objets gradués sont "externes" à M.

Supposons que $M = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ et $N = \{N^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ sont des objets dans M. Pour un entier i on définit le $\mathbb{K}$-module

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M,N)^i := \prod_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M^j, N^{j+i}). \tag{3.1.34}$$

On obtient un $\mathbb{K}$-module gradué

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M,N) := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M,N)^i. \tag{3.1.35}$$

Définition 3.1.36. Soit M une catégorie abélienne. La *catégorie des objets gradués dans* M est la catégorie linéaire graduée $\mathbf{G}(\mathrm{M})$, dont les objets sont les objets gradués dans M, et les ensembles de morphismes sont les modules gradués

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}(\mathrm{M})}(M,N) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M,N)$$

de (3.1.35). L'opération de composition est l'évidente.

Remarque. Supposons $\mathrm{M} = \mathbf{M}(A)$, la catégorie des modules sur un $\mathbb{K}$-anneau central A. Pour tout $M = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ on pose $F(M) := \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$. Alors $F(M)$ est une A-module gradué et est donc une objet de la catégorie $\mathbf{G}(A)$. L'application F sur les morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}(\mathrm{M})}(M,N)$ a bien $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}(A)}(M,N)$ comme domaine d'arrivé puisque A est concentre en degré 0, de plus c'est bien un homomorphisme strict de $\mathbb{K}$-modules gradués. Il est alors facile de voir que F constitue un isomorphisme de catégories graduées, en construisant explicitement sont inverse par exemple.

Dans la définition suivante, nous combinons les anneaux gradués et les catégories linéaires, pour faire un nouvel hybride.

Définition 3.1.37. Soit M une catégorie abélienne, et soit A un anneau gradué. Un *A-module gradué dans* M est un objet $M \in \mathbf{G}(\mathrm{M})$, ainsi qu'un homomorphisme d'anneau gradué $f\colon A \to \mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M)$. L'ensemble des A-modules gradués dans M est noté $\mathbf{G}(A,\mathrm{M})$.

Ce que dit la définition, c'est qu'un élément $a \in A^i$ donne lieu à un endomorphisme de degré i, $f(a)$ de l'objet gradué $M = \{M^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$. Cela signifie à son tour que pour tout j, $f(a)\colon M^j \to M^{j+i}$ est un morphisme dans M. L'opération f satisfait $f(1_A) = \mathrm{id}_M$ et $f(a_1 \cdot a_2) = f(a_1) \circ f(a_2)$.

Exemple 3.1.38. Si $A = \mathbb{K}$, alors $\mathbf{G}(A,\mathrm{M}) = \mathbf{G}(\mathrm{M})$; et si $M = \mathrm{Mod}\,\mathbb{K}$, alors $\mathbf{G}(A,\mathrm{M}) = \mathbf{G}(A)$.

La définition suivante est une variante de la définition (3.1.25).

Définition 3.1.39. Soit M une catégorie abélienne, et soit A un anneau gradué. Pour $M, N \in \mathbf{G}(A,\mathrm{M})$ et $i \in \mathbb{Z}$ on définit $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}(A,\mathrm{M})}(M,N)^i$ comme étant le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M,N)^i$ constitué des morphismes $\phi\colon M \to N$ tels que

$$\phi \circ f_M(a) = (-1)^{i\cdot k} \cdot f_N(a) \circ \phi$$

pour tout $a \in A^k$. On pose

$$\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M,N) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M,N)^i,$$

ce qui constitue un $\mathbb{K}$-module gradué.

Définition 3.1.40. Soit M une catégorie abélienne, et soit A un anneau gradué. La *catégorie des A-modules gradués dans* M est la catégorie graduée $\mathbf{G}(A,\mathrm{M})$ dont les objets sont les A-modules gradués dans M, et les $\mathbb{K}$-modules gradués des morphismes sont

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}(A,\mathrm{M})}(M,N) := \mathrm{Hom}_{(A,\mathrm{M})}(M,N)$$

définit précédemment. La composition est celle de $\mathbf{G}(\mathrm{M})$.

Remarquons que l'oubli de l'action de A est un foncteur gradué fidèle $\mathbf{G}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{G}(\mathrm{M})$. Comme dans chaque catégorie graduée, il y a la sous-catégorie

$$\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M}) := \mathrm{Str}(\mathbf{G}(A,\mathrm{M})) \subseteq \mathbf{G}(A,\mathrm{M}) \tag{3.1.41}$$

des morphismes stricts.

Remarque. Soit M une catégorie abélienne et soit A un anneau gradué, alors la catégorie $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ est abélienne. En effet, on sait que $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$ est abélienne (les verifications se font degré par degré), donc il suffit de montrer que les noyaux et conoyaux sont des A-modules. Mais l'action de A sur le noyau d'un morphisme découle de la propriété universelle du noyau dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Ker}\phi \arrow[r, hook] \arrow[d, dashed, "f_{\operatorname{Ker}\phi}(a)"'] & M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "f_M(a)"'] & N \arrow[d, "f_N(a)"'] \\ \operatorname{Ker}\phi \arrow[r, hook] & M \arrow[r] & N \end{tikzcd} .$$

De même pour le conoyau.

Remarque. Remarquons que l'on peut parler de catégorie graduée $\mathbf{G}(\mathrm{M})$ pour toute catégorie linéaire M, qu'elle soit abélienne ou pas. Mais on restreindra notre attention au cas abélien.

3.2. **DG $\mathbb{K}$-Modules.**

Définition 3.2.1. Un *DG $\mathbb{K}$-module* est un $\mathbb{K}$-module gradué $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$, accompagné d'un homomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire $\mathrm{d}_M \colon M \to M$ de degré 1, appelé la *différentielle*, vérifiant $\mathrm{d}_M \circ \mathrm{d}_M = 0$. Lorsque le contexte est clair, on peut écrire d au lieu de d_M.

Définition 3.2.2. Soient M et N des DG $\mathbb{K}$-module. Un *homomorphisme strict de DG $\mathbb{K}$-module* est un homomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire $\phi \colon M \to N$ de degré 0 qui commute avec les différentielles. La catégorie résultante est notée $\mathrm{DGMod}_{\mathrm{str}}\,\mathbb{K}$, ou par la notation abrégée $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$.

Il est facile de voir que $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ est une catégorie abélienne $\mathbb{K}$-linéaire. Il existe un foncteur d'oubli $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, $(M, \mathrm{d}_M) \mapsto M$.

Définition 3.2.3. Soient M et N des DG $\mathbb{K}$-module.

(1) On a déjà vu la structure de $\mathbb{K}$-module graduée sur le produit tensoriel $M \otimes N$. On y met la différentielle
$$\mathrm{d}(m \otimes n) \coloneqq \mathrm{d}_M(m) \otimes n + (-1)^i \cdot m \otimes \mathrm{d}_N(n)$$
pour $m \in M^i$ et $n \in N^j$. De cette façon $M \otimes N$ devient un DG $\mathbb{K}$-module. On note parfois $\mathrm{d}_{M\otimes N}$ cette différentielle.

(2) On a déjà vu la structure de $\mathbb{K}$-module graduée de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)$. On y met la différentielle
$$\mathrm{d}(\phi) \coloneqq \mathrm{d}_N \circ \phi - (-1)^i \cdot \phi \circ \mathrm{d}_M$$
pour $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)^i$. Ainsi $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)$ devient un DG $\mathbb{K}$-module.

Définition 3.2.4. Soit M un DG $\mathbb{K}$-module et i un entier.

(1) Le module des *cocycles* de degré i de M est
$$\mathrm{Z}^i(M) \coloneqq \mathrm{Ker}(M^i \xrightarrow{\mathrm{d}_M} M^{i+1}).$$

(2) Le module des *cobords* de degré i de M est
$$\mathrm{B}^i(M) \coloneqq \mathrm{Im}(M^{i-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_M} M^i).$$

(3) Le module des *décocycles* de degré i de M est
$$\mathrm{Y}^i(M) \coloneqq \mathrm{Coker}(M^{i-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_M} M^i).$$

(4) Le i-ème module de *cohomologie* de M est
$$\mathrm{H}^i(M) \coloneqq \mathrm{Z}^i(M) / \mathrm{B}^i(M) \cong \mathrm{Coker}(M^{i-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_M} \mathrm{Z}^i(M)).$$

Le fait que $\mathrm{d}_M \circ \mathrm{d}_M = 0$ implique que $\mathrm{B}^i(M) \subseteq \mathrm{Z}^i(M) \subseteq M^i$, donc la i-ème homologie est bien définie. D'autre part, puisque $\mathrm{Y}^i(M) = M^i / \mathrm{B}^i(M)$, il existe une isomorphe canonique

$$\mathrm{H}^i(M) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Y}^i(M) \xrightarrow{\mathrm{d}_M} M^{i+1}). \tag{3.2.5}$$

Les modules définis ci-dessus sont fonctoriels en M pour être précis, ce sont des foncteurs $\mathbb{K}$-linéaires

$$\mathrm{Z}^i(M), \mathrm{B}^i(M), \mathrm{Y}^i(M), \mathrm{H}^i(M) \colon \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K}) \to \mathbf{M}(\mathbb{K}). \tag{3.2.6}$$

Remarquons qu'en utilisant la notion de cocycles, on a pour M et N des DG $\mathbb{K}$-module, l'égalité

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})}(M, N) = \mathrm{Z}^0(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)) \tag{3.2.7}$$

des sous-modules de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, N)$.

3.3. **DG Anneaux et Modules.**

Définition 3.3.1. Un *anneau* $\mathbb{K}$*-central DG* est un anneau $\mathbb{K}$-central gradué $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A^i$, accompagné d'un homomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire $\mathrm{d}_A \colon A \to A$ de degré 1, appelé la *différentielle*, satisfaisant l'équation $\mathrm{d}_A \circ \mathrm{d}_A = 0$, et la règle de Leibniz graduée

$$\mathrm{d}_A(a \cdot b) = \mathrm{d}_A(a) \cdot b + (-1)^i \cdot a \cdot \mathrm{d}_A(b)$$

pour tout $a \in A^i$ et $b \in A^j$. On écrira des fois d au lieu de d_A.

Définition 3.3.2. Soient A et B des DG anneaux $\mathbb{K}$-centraux. Un *homomorphisme de DG anneaux* $\mathbb{K}$*-centraux* $f \colon A \to B$ est un homomorphisme gradué d'anneaux $\mathbb{K}$-centraux qui commute avec les différentielles de A et B. La catégorie résultante est notée $\mathrm{DGRng}\,/_c(\mathbb{K})$.

Les anneaux $\mathbb{K}$-centraux sont considérés comme des DG anneaux $\mathbb{K}$-centraux concentrés au degré 0 (et avec des différentielles triviales). Ainsi la catégorie $\mathrm{Rng}\,/_c(\mathbb{K})$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{DGRng}\,/_c(\mathbb{K})$.

Convention 3.3.3. Pour simplifier l'écriture, nous écrivons généralement "DG anneau" au lieu de "DG anneau $\mathbb{K}$-central".

Définition 3.3.4. Un DG anneau A est dit *faiblement commutatif*, *fortement commutatif*, *non positif* ou *commutatif* s'il en est ainsi, respectivement, en tant qu'anneau gradué (après oubli de la différentielle). Les sous-catégories pleines correspondantes sont notées, $\mathrm{DGRng}_{wc}\,/(\mathbb{K})$, $\mathrm{DGRng}_{sc}\,/(\mathbb{K})$, $\mathrm{DGRng}^{\leqslant 0}\,/_c(\mathbb{K})$ et $\mathrm{DGRng}^{\leqslant}_{sc}(\mathbb{K})$.

Exemple 3.3.5. Soit A un anneau gradué. Alors A, avec la différentielle nulle, est un DG anneau.

Exemple 3.3.6. Soit M un DG $\mathbb{K}$-module. Considérons le DG $\mathbb{K}$-module $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, M)$. La composition des endomorphismes est une multiplication associative sur $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M)$ qui respecte la gradation, et la règle de Leibniz graduée est vérifiée. On voit que $\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M)$ est un DG anneau. Il n'est généralement ni faiblement commutatif ni non positif.

Exemple 3.3.7. Soient A et B des DG anneaux. L'anneau gradué $A \otimes B$, avec la différentielle de la Définition (3.2.3), est un DG anneau.

Définition 3.3.8. Soit A un DG anneau. Le DG anneau opposé A^{op} est le même DG $\mathbb{K}$-module que A, mais la multiplication $\cdot^{\mathrm{op}}$ de A^{op} est la multiplication $\cdot$ de A, inversée et changée de signe : $a \cdot^{\mathrm{op}} b := (-1)^{i\cdot j} \cdot b \cdot a$ pour $a \in A^i$ et $b \in A^j$.

Remarque. On remarque alors que A^{op} est lui-même un DG anneau. En effet, il suffit de vérifier la règle de Leibniz graduée pour s'en convaincre, en utilisant le fait que $\mathrm{d}_{A^{\mathrm{op}}} = \mathrm{d}_A$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_A(a \cdot^{\mathrm{op}} b) &= (-1)^{i\cdot j} \cdot (\mathrm{d}_A(b) \cdot a + (-1)^j \cdot b \cdot \mathrm{d}_A(a)) \\ &= (-1)^{i\cdot j} \cdot (-1)^{i+i} \cdot \mathrm{d}_A(b) \cdot a + (-1)^{j\cdot(i+1)} \cdot b \cdot \mathrm{d}_A(a) \\ &= (-1)^i \cdot a \cdot^{\mathrm{op}} \mathrm{d}_A(b) + \mathrm{d}_A(a) \cdot^{\mathrm{op}} b. \end{aligned}$$

Définition 3.3.9. Soit A un DG anneau. Un *DG A-module à gauche* est un A-module à gauche gradué $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$, accompagné d'un homomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire $\mathrm{d}_M \colon M \to M$ de degré 1, appelé la différentielle, vérifiant $\mathrm{d}_M \circ \mathrm{d}_M = 0$ et

$$\mathrm{d}_M(a \cdot m) = \mathrm{d}_A(a) \cdot m + (-1)^i \cdot a \cdot \mathrm{d}_M(m)$$

pour $a \in A^i$ et $m \in M^j$.

Les DG A-modules à droite sont définis de la même manière, mais on ne les traitera pas beaucoup. En effet, les DG A-modules à droite sont des DG modules à gauches sur le DG anneau opposé A^{op}. Plus précisément, si M est un DG A-module à droite, alors la formule $a \cdot m := (-1)^{i\cdot j} \cdot m \cdot a$, pour $a \in A^i$ et $m \in M^j$, fait de M un DG A^{op}-module à gauche.

D'après nos conventions, tous les DG modules sont par défaut des DG modules à gauche.

Une vérification simple nous donne la proposition suivante.

Proposition 3.3.10. *Soit A un DG $\mathbb{K}$-anneau, et soit M un DG $\mathbb{K}$-module.*

(1) Supposons que $f \colon A \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M)$ soit un homomorphisme de DG $\mathbb{K}$-anneaux. Alors la formule $a \cdot m := f(a)(m)$, pour $a \in A^i$ et $m \in M^j$, fait de M un DG A-module.

(2) Réciproquement, toute structure DG A-module sur M compatible avec la structure DG $\mathbb{K}$-module provient d'un homomorphisme DG $\mathbb{K}$-anneaux $f \colon A \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M)$.

Définition 3.3.11. Soient M et N des DG A-modules. Un homomorphisme strict de DG A-modules $\phi \colon M \to N$ est un homomorphisme strict de DG $\mathbb{K}$-modules qui respecte l'action de A. La catégorie résultante est notée $\mathrm{DGMod})_{\mathrm{str}}\, A$, ou par $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$.

La catégorie $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ est abélienne. On verra plus tard un énoncé plus général.

Remarque. Soit A un DG anneau. Alors on voit facilement que le module des cocyles $\mathrm{Z}(A) := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Z}^i(A)$ est un sous-anneau gradué de A et que le module des cobords $\mathrm{B}(A) := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{B}^i(A)$ est une idéal bilatère de $\mathrm{Z}(A)$. On a donc que le module de cohomologie $\mathrm{H}(A) := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{H}^i(A)$ est un anneau gradué.

Si $f\colon A \to B$ est un homomorphisme de DG anneaux, alors $\mathrm{H}(f)\colon \mathrm{H}(A) \to \mathrm{H}(B)$ est un homomorphisme d'anneaux gradué. En effet, le fait que f soit un homomorphisme de DG anneaux nous dit que $f \circ \mathrm{d}_A = \mathrm{d}_B \circ f$ et donc en particulier que $f(\mathrm{Ker}(\mathrm{d}_A)) \subseteq \mathrm{Ker}(\mathrm{d}_B)$ et $f(\mathrm{Im}(\mathrm{d}_A)) \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{d}_B)$. Cela nous donne, $\mathrm{Z}(f)\colon \mathrm{Z}(A) \to \mathrm{Z}(B)$ et $\mathrm{B}(f)\colon \mathrm{B}(A) \to \mathrm{B}(B)$ strictes. On peut alors construire $\mathrm{H}(f)\colon \mathrm{H}(A) \to \mathrm{H}(B)$, $[x] \mapsto [f(x)]$ et de voir que c'est bien défini.

Remarque. Soit A un DG anneau, et M un DG A-module. On voit que la cohomologie de M, $\mathrm{H}(M)$, est un $\mathrm{H}(A)$-module, avec l'action $[a] \cdot [m] := [a \cdot m]$. Si non, vu qu'on a un homomorphisme de DG $\mathbb{K}$-anneaux $f\colon A \to \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M)$, il induit $\mathrm{H}(f)\colon \mathrm{H}(A) \to \mathrm{H}(\mathrm{End}_{\mathbb{K}}(M)) \xrightarrow{\text{can.}} \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathrm{H}(M))$.

Maintenant, si $\phi\colon M \to N$ est un homomorphisme dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$, alors $\mathrm{H}(\phi)\colon \mathrm{H}(M) \to \mathrm{H}(N)$, $[m] \mapsto [\phi(m)]$ est un homomorphisme de $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{H}(A))$.

Ainsi,

$$\mathrm{H}\colon \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A) \to \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{H}(A) \tag{3.3.12}$$

est un foncteur. De plus on peut vérifier qu'il est linéaire avec le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}^i(M) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Z}^i(M) \arrow[r, two heads, "\rho_M"] \arrow[d, "f+g"] & \mathrm{H}^i(M) \arrow[d, "\mathrm{H}(f+g)"] \\
\mathrm{B}^i(N) \arrow[r, hook] & \mathrm{Z}^i(N) \arrow[r, "\rho_N"'] & \mathrm{H}^i(N)
\end{tikzcd}$$

qui nous donne $\mathrm{H}(f+g) \circ \rho_M = \rho_N \circ (f+g) = (\mathrm{H}(f) + \mathrm{H}(g)) \circ \rho_M$. En utilisant le fait que ρ_M est un épimorphisme, on en déduit le résultat.

Définition 3.3.13. Soit A un DG $\mathbb{K}$-anneau, soit M un DG A-module à droite, et soit N un DG A-module à gauche. On sait que $M \otimes_A N$ est un $\mathbb{K}$-module gradué. Nous en faisons un DG $\mathbb{K}$-module avec la différentielle de la Définition (3.2.3).

Définition 3.3.14. Soit A un DG $\mathbb{K}$-anneau, soient M et N des DG A-modules à gauche. Le $\mathbb{K}$-modules gradué $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ est transformé en DG $\mathbb{K}$-module avec la différentielle de la Définition (3.2.3).

Pour M et N des DG A-modules, généralisant (3.2.7)n on a l'égalité

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)}(M, N) = \mathrm{Z}^0(\mathrm{Hom}_A(M, N))$$

Proposition 3.3.15. *Soit A un DG anneau.*

(1) La catégorie $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ admet des produits. Étant donné une collection $\{M_x\}_{x\in X}$ de DG A-modules, leur produit $M = \prod_{x\in X} M_x$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ est $M := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ où $M^i := \prod_{x\in X} M_x^i$.

(2) La catégorie $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ admet des sommes directes. Étant donné une collection $\{M_x\}_{x\in X}$ de DG A-modules, leur somme directe $M = \bigoplus_{x\in X} M_x$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ est $M := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M^i$ où $M^i := \bigoplus_{x\in X} M_x^i$.

(3) Le foncteur H *commute avec les produits et le sommes directes.*

Preuve. On va montrer les résultats pour les produits, celui avec les somme directes étant dual.

(1) : Déjà, on remarque bien que l'objet définit est bien un DG A-module, dont la différentielle est le produit de celle de M_x, autrement dit, pour $(m_x)_{x\in X} \in M^i$, on a $\mathrm{d}_{\prod_{x\in X} M_x}((m_x)_{x\in X}) = (d_{M_x}(m_x))_{x\in X}$. Ceci nous permet de vérifier alors directement les propriétés que la différentielle doit vérifier (c.f. Définition (3.3.9)).

De plus, le fait que c'est leur produit, c'est-à-dire qu'il vérifie la propriété universelle, est une vérification immédiate degré par degré.

(3) : Le fait que H commute avec les produits est un calcul direct. En effet, on remarque que $\mathrm{Ker}(\mathrm{d}^i_{\prod_{x\in X} M_x}) = \prod_{x\in X} \mathrm{Ker}(\mathrm{d}^i_{M_x})$ et de même $\mathrm{Im}(\mathrm{d}^{i-1}_{\prod_{x\in X} M_x}) = \prod_{x\in X} \mathrm{Im}(\mathrm{d}^{i-1}_{M_x})$. Donc $\mathrm{H}^i(\prod_{x\in X} M_x) = \prod_{x\in X} \mathrm{H}^i(M_x)$. □

3.4. DG Catégories.

Nous avons vu les catégories graduées. Voici la version DG.

Définition 3.4.1. Une *catégorie DG $\mathbb{K}$-linéaire* est une catégorie $\mathbb{K}$-linéaire C, munie d'une structure DG $\mathbb{K}$-module sur chacun des $\mathbb{K}$-modules de morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1)$. Les conditions sont celles-ci :

(1) Pour tout objet M, l'automorphisme identité id_M est un cocycle de degré 0 dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M, M)$.

(2) Pour tout triplet d'objets $M_0, M_1, M_2 \in \mathrm{C}$, l'homomorphisme de composition
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_1, M_2) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_2)$$
est un homomorphisme strict de DG $\mathbb{K}$-modules.

La différentielle dans une catégorie DG $\mathbb{K}$-linéaire C est parfois noté d_{C} ; par exemple
$$\mathrm{d}_{\mathrm{C}} \colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1)^i \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1)^{i+1}.$$

Convention 3.4.2. On écrira souvent "DG catégorie" au lieu de l'expression plus longue "DG catégorie $\mathbb{K}$-linéaire".

Si C' est une sous-catégorie pleine d'une DG catégorie C, alors bien sûr C' est elle-même une DG catégorie.

Définition 3.4.3. Soit C une DG catégorie.

(1) Un morphisme $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M, N)^i$ est appelé un *morphisme de degré i*.

(2) Un morphisme $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M, N)$ est appelé un *cocycle* si $\mathrm{d}_{\mathrm{C}}(\phi) = 0$.

(3) Un morphisme $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M, N)$ est appelé un *morphisme strict* s'il est un cocycle de degré 0.

Lemme 3.4.4. *Soit* C *une catégorie DG, et pour* $i = 0, 1, 2$ *soit* $\phi_i \colon M_i \to M_{i+1}$ *un morphisme dans* C *de degré* k_i.

(1) Le morphisme $\phi_1 \circ \phi_0$ *est de degré* $k_0 + k_1$, *et*
$$\mathrm{d}_{\mathrm{C}}(\phi_1 \circ \phi_0) = \mathrm{d}_{\mathrm{C}}(\phi_1) \circ \phi_0 + (-1)^{k_1} \cdot \phi_1 \circ \mathrm{d}_{\mathrm{C}}(\phi_0).$$

(2) Si ϕ_0 *et* ϕ_1 *sont des cocycles, alors* $\phi_1 \circ \phi_0$ *l'est aussi.*

(3) Si ϕ_1 *est un cobord, et* ϕ_0 *et* ϕ_2 *sont des cocycles, alors* $\phi_2 \circ \phi_1 \circ \phi_0$ *est un cobord.*

Preuve. (1) Clair.

(2) Découle de *(1)*.

(3) Soit $\phi_1 = \mathrm{d}_{\mathrm{C}}(\psi_1)$ pour un certain morphisme $\psi_1 \colon M1 \to M2$ degré $k_1 - 1$. Alors
$$\phi_2 \circ \phi_1 \circ \phi_0 = \mathrm{d}_{\mathrm{C}}((-1)^{k_2} \cdot \phi_2 \circ \psi_1 \circ \phi_0).$$
□

Le lemme précédent rend possible la définition suivante.

Définition 3.4.5. Soit C une catégorie DG.

(1) La *sous-catégorie stricte* de C est la catégorie Str(C), avec les mêmes objets que C, mais avec seulement des morphismes stricts. Ainsi
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Str(C)}}(M, N) = \mathrm{Z}^0(\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M, N)).$$

(2) La *catégorie d'homotopie* de C est la catégorie Ho(C), avec les mêmes objets que C et avec ensemble de morphismes
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho(C)}}(M, N) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M, N)).$$

(3) On note $\mathrm{P} \colon \mathrm{Str(C)} \to \mathrm{Ho(C)}$ le foncteur qui est l'identité sur les objets et envoi les morphismes stricts à leur classe d'homotopie.

Les catégories Str(C) et Ho(C) sont linéaires, et le foncteur d'inclusion $\mathrm{Str(C)} \to \mathrm{C}$ et le foncteur de projection $\mathrm{P} \colon \mathrm{Str(C)} \to \mathrm{Ho(C)}$ sont linéaires. Le premier est fidèle, et le second est plein.

Exemple 3.4.6. Si A est une catégorie DG, alors pour tout objet $x \in A$, son ensemble d'endomorphismes $A := \mathrm{End}_{\mathrm{A}}(x)$ est un anneau DG. Inversement, chaque DG anneau A peut être considéré comme une catégorie DG A avec un seul objet.

Exemple 3.4.7. Soit A un anneau DG. L'ensemble des DG A-modules forme une catégorie DG $\mathrm{DGMod}\, A$, dans laquelle les DG $\mathbb{K}$-modules des morphismes sont
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{DGMod}\, A}(M, N) := \mathrm{Hom}_A(M, N)$$
On notera souvent $\mathbf{C}(A) := \mathrm{DGMod}\, A$. La sous-catégorie stricte ici est
$$\mathrm{Str}(\mathrm{DGMod}\, A) = \mathrm{DGMod}_{\mathrm{str}}\, A = \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A).$$

Proposition 3.4.8. *Soit* $\phi \colon M \to N$ *un isomorphisme de degré i dans une catégorie DG* C. *Supposons que* ϕ *est un cocycle. Alors son inverse* $\phi^{-1} \colon N \to M$ *est aussi un cocycle.*

Preuve. D'après la règle de Leibniz et le fait que id_M est un cocycle, on a

$$\begin{aligned} 0 &= \mathrm{d}_{\mathrm{C}}(\mathrm{id}_M) \\ &= \mathrm{d}_{\mathrm{C}}(\phi^{-1} \circ \phi) \\ &= \mathrm{d}_{\mathrm{C}}(\phi^{-1}) \circ \phi + (-1)^{-i} \cdot \phi^{-1} \circ \mathrm{d}_{\mathrm{C}}(\phi) \\ &= \mathrm{d}_{\mathrm{C}}(\phi^{-1}) \circ \phi. \end{aligned}$$

Comme ϕ est un isomorphisme, on en déduit que $\mathrm{d}_{\mathrm{C}}(\phi^{-1}) = 0$.

□

3.5. **DG Foncteurs.**

Ici C et D sont des catégories DG $\mathbb{K}$-linéaires. Quand on oublie les différentielles, C et D deviennent des catégories $\mathbb{K}$-linéaires graduées. On peut donc parler de foncteurs $\mathbb{K}$-linéaires gradués $\mathrm{C} \to \mathrm{D}$. Rappelons qu'un homomorphisme strict de DG $\mathbb{K}$-modules est de degré 0 et commute avec les différentielles.

Définition 3.5.1. Soient C et D des catégories DG $\mathbb{K}$-linéaires. Un foncteur $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ est appelé un *foncteur DG $\mathbb{K}$-linéaire* s'il vérifie cette condition :

— Pour toute paire d'objets $M_0, M_1 \in \mathrm{C}$, la fonction

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(F(M_0), F(M_1))$$

est un homomorphisme strict de DG $\mathbb{K}$-modules.

Autrement dit, F est un foncteur DG si c'est un foncteur gradué, et $\mathrm{d}_{\mathrm{D}} \circ F = F \circ \mathrm{d}_{\mathrm{C}}$ comme homomorphismes de degré 1 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(F(M_0), F(M_1))$.

Convention 3.5.2. Nous écrirons généralement "foncteur DG" au lieu de l'expression plus longue "foncteur DG $\mathbb{K}$-linéaire".

Exemple 3.5.3. Soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme d'anneaux DG, et soit A et B les catégories DG à objet unique correspondantes. Alors f donne lieu à un foncteur DG $F\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$.

Définition 3.5.4. Soient $F, G\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ des foncteurs DG.

(1) Un *morphisme de degré i de foncteurs DG* $\eta\colon F \to G$ est un morphisme de degré i de foncteurs gradués.
(2) Soit $\eta\colon F \to G$ un morphisme de degré i de foncteurs DG. Pour tout objet $M \in \mathrm{C}$ il existe un morphisme de degré $i+1$ $\mathrm{d}_{\mathrm{D}}(\eta_M)\colon F(M) \to G(M)$ dans D. On définit la collection de morphismes $\mathrm{d}_{\mathrm{D}}(\eta) := \{\mathrm{d}_{\mathrm{D}}(\eta_M)\}_{M \in \mathrm{C}}$.
(3) Un morphisme strict de foncteurs DG est un morphisme de degré 0 de foncteurs gradués $\eta\colon F \to G$ tel que $\mathrm{d}_{\mathrm{D}}(\eta) = 0$.

Proposition 3.5.5. *La collection de morphismes* $\mathrm{d}_{\mathrm{D}}(\eta)$ *est un morphisme de degré* $i+1$ *de foncteurs DG* $F \to G$.

Preuve. C'est une simple vérification. Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M, N)^j$, alors on a

$$\begin{aligned} (-1)^j \cdot G(\phi) \circ \mathrm{d}(\eta_M) &= \mathrm{d}(G(\phi) \circ \eta_M) - \mathrm{d}(G(\phi)) \circ \eta_M \\ &= (-1)^{i \cdot j} \cdot \mathrm{d}(\eta_n \circ F(\phi)) - \mathrm{d}(G(\phi)) \circ \eta_M \\ &= (-1)^{i \cdot j} \cdot (\mathrm{d}(\eta_n) \circ F(\phi) + (-1)^i \eta_N \, \mathrm{d}(F(\phi))) - \mathrm{d}(G(\phi)) \circ \eta_M \\ &= (-1)^{i \cdot j} \cdot \mathrm{d}(\eta_n) \circ F(\phi) + \underbrace{(-1)^{(j+1) \cdot i} \cdot \eta_N \, \mathrm{d}(F(\phi)) - \mathrm{d}(G(\phi)) \circ \eta_M}_{=0} \end{aligned}$$

Donc, $G(\phi) \circ \mathrm{d}(\eta_M) = (-1)^{(i+1) \cdot j} \cdot \mathrm{d}(\eta_n) \circ F(\phi)$.

□

Proposition 3.5.6. *Soit* $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ *un DG foncteur. Alors* F *induit des foncteurs linéaires* $\mathrm{Str}(F)\colon \mathrm{Str}(\mathrm{C}) \to \mathrm{Str}(\mathrm{D})$ *et* $\mathrm{Ho}(F)\colon \mathrm{Ho}(\mathrm{C}) \to \mathrm{Ho}(\mathrm{D})$.

Preuve. Comme F est un foncteur DG, il envoie les 0-cocycles dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M, N)$ vers des 0-cocycles dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(F(M), F(N))$ .Idem pour 0-cobords.

□

Par abus de notation, et lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion, on écrira parfois F au lieu de $\mathrm{Str}(F)$ ou $\mathrm{Ho}(F)$.

Remarque. Soient A et C des catégories DG et supposons que A est petite. On définit $\mathrm{DGFun}(\mathrm{A}, \mathrm{C})$ comme étant l'ensemble des foncteurs DG $F\colon \mathrm{A} \to \mathrm{C}$. Alors $\mathrm{DGFun}(\mathrm{A}, \mathrm{C})$ est une catégorie DG. En effet,

$\mathbb{K}$-*linéarité :* On voit facilement, que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun}(\mathrm{A},\mathrm{C})}(F, G)$ est muni d'une structure de $\mathbb{K}$-module puisque C est $\mathbb{K}$-linéaire. Il suffit de poser pour $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun}(\mathrm{A},\mathrm{C})}(F, G)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\alpha + \lambda \cdot \beta := \{\alpha_A + \lambda \cdot \beta_A\}_{A \in \mathrm{A}}$. De même, la composition (verticale) $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun}(\mathrm{A},\mathrm{C})}(G, H) \times \mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun}(\mathrm{A},\mathrm{C})}(F, G) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun}(\mathrm{A},\mathrm{C})}(F, H)$, $\alpha, \beta \mapsto \alpha * \beta$ est $\mathbb{K}$-bilinéaire, puisque puisque C est $\mathbb{K}$-linéaire.

DG : Il est clair que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun(A,C)}}(F,G)$ se décompose en $\bigoplus_{i\in\mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun(A,C)}}(F,G)^i$ où chaque $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun(A,C)}}(F,G)^i$ est un $\mathbb{K}$-module. On a également,

$$\mathrm{d}\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun(A,C)}}(F,G)^i \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun(A,C)}}(F,G)^{i+1}$$

, $\mathrm{d}(\eta) = \{\mathrm{d_C}(\eta_A)\}_{A\in\mathrm{A}}$. Cette formules nous permet de vérifier qu'on a bien un DG $\mathbb{K}$-module. On a bien sûr que $\mathrm{id}_F\, \mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun(A,C)}}(F,F)$ est un 0 cocycle. Finalement, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun(A,C)}}(G,H) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun(A,C)}}(F,G) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{DGFun(A,C)}}(F,H)$, $\alpha\otimes\beta \mapsto \{\alpha_A\otimes\beta_A\}_{A\in\mathrm{A}}$ est un homomorphisme strict de DG $\mathbb{K}$-modules puisque C est une DG catégorie.

3.6. **Complexes dans les Catégories Abéliennes.**

Dans cette section M est une catégorie abélienne $\mathbb{K}$-linéaire.

Un *complexe d'objets de* M, ou un *complexe dans* M, est un diagramme

$$(\cdots \to M^{-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{M}}^{-1}} M^0 \xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{M}}^{0}} M^1 \xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{M}}^{1}} M^2 \to \cdots) \tag{3.6.1}$$

d'objets et de morphismes dans M, tels que $\mathrm{d}_{\mathrm{M}}^{i+1}\circ \mathrm{d}_{\mathrm{M}}^{i} = 0$. La collection d'objets $M := \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ n'est rien d'autre qu'un objet gradué de M. La collection de morphismes $\mathrm{d_M} := \{\mathrm{d}_{\mathrm{M}}^{i}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ est appelée *différentielle* ou *opérateur de cobord*. Ainsi un complexe est un couple $(M,\mathrm{d_M})$ composé d'un objet gradué M et d'une différentielle $\mathrm{d_M}$ sur celui-ci. On écrit parfois d au lieu de $\mathrm{d_M}$ ou $\mathrm{d}_{\mathrm{M}}^{i}$. À d'autres moments, nous laissons la différentielle implicite et nous référons simplement au complexe comme M.

Soit N un autre complexe dans M. Un *morphisme strict de complexes* $\phi\colon M\to N$ est une collection $\phi = \{\phi^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de morphismes $\phi^i\colon M^i \to N^i$ dans M, telle que

$$\mathrm{d}_{\mathrm{N}}^{i}\circ\phi^i = \phi^{i+1}\circ \mathrm{d}_{\mathrm{M}}^{i}\,. \tag{3.6.2}$$

Notons qu'un morphisme strict $\phi\colon M\to N$ peut être vu comme un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M^i \arrow[r, "\mathrm{d}_{\mathrm{M}}^{i}"] \arrow[d, "\phi^i"'] & M^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\phi^{i+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N^i \arrow[r, "\mathrm{d}_{\mathrm{N}}^{i}"] & N^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

dans M. L'automorphisme identité id_M du complexe M est un morphisme strict.

Notons $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$ la catégorie des complexes dans M, avec morphismes stricts. C'est une catégorie abélienne $\mathbb{K}$-linéaire. En effet, la somme directe des complexes est la somme directe degré par degré, c'est-à-dire $(M\oplus N)^i = M^i\oplus N^i$. Idem pour les noyaux et les conoyaux. Si N est une sous-catégorie abélienne pleine de M, alors $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{N})$ est une sous-catégorie abélienne pleine de $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$.

Un objet unique $M^0\in\mathrm{M}$ peut être vu comme un complexe

$$M := (\cdots \to 0 \to M^0 \to 0 \to \cdots)$$

où M^0 est en degré 0 ; la différentielle de ce complexe est bien sûr nulle. L'application $M^0\mapsto M$ est un foncteur $\mathbb{K}$-linéaire pleinement fidèle $\mathrm{M}\to\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$.

Soient M et N des complexes dans M. Il existe un $\mathbb{K}$-module gradué $\mathrm{Hom_M}(M,N)$. C'est un DG $\mathbb{K}$-module avec la différentielle d donnée par

$$\mathrm{d}(\phi) := \mathrm{d}_N\circ\phi - (-1)^i\cdot\phi\circ\mathrm{d}_M \tag{3.6.3}$$

pour $\phi\in\mathrm{Hom_M}(M,N)^i$.

Ainsi, un élément $\phi\in\mathrm{Hom_M}(M,N)^i$ est une collection $\phi=\{\phi^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ de morphismes $\phi^j\colon M^j\to N^{j+i}$. Pour $i=2$, cela ressemble au diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & M^j \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[drr, "\phi^j"] & M^{j+1} \arrow[r, "\mathrm{d}"] \arrow[drr, "\phi^{i+1}"] & M^{j+2} \arrow[r, "\mathrm{d}"] & M^{j+3} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N^j \arrow[r, "\mathrm{d}"] & N^{j+1} \arrow[r] & N^{j+2} \arrow[r] & N^{j+3} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Attention : puisque ϕ n'a pas besoin de commuter avec les différentielles, ce n'est en général pas un diagramme commutatif !

Pour un triplet de complexes M_0, M_1, M_2 et de degrés i_0, i_1 il existe des homomorphismes $\mathbb{K}$-linéaires

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom_M}(M_1,M_2)^{i_1}\otimes\mathrm{Hom_M}(M_0,M_1)^{i_0} & \to & \mathrm{Hom_M}(M_0,M_2)^{i_0+i_1} \\
\phi_1\otimes\phi_0 & \mapsto & \phi_1\circ\phi_0.
\end{array}$$

Lemme 3.6.4. *L'homomorphisme de composition*

$$\mathrm{Hom_M}(M_1,M_2)\otimes\mathrm{Hom_M}(M_0,M_1)\to\mathrm{Hom_M}(M_0,M_2)$$

est un homomorphisme strict de DG $\mathbb{K}$*-modules.*

Preuve. Il est clairement $\mathbb{K}$-linéaire et strict. Il faut donc démontrer qu'il commute avec les différentielles, i.e. que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_1, M_2) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_0, M_1))^i \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{d}_\otimes"'] & (\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_0, M_2))^i \arrow[d, "\mathrm{d}"'] \\
(\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_1, M_2) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_0, M_1))^{i+1} \arrow[r] & (\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_0, M_2))^{i+1}
\end{tikzcd}.$$

Un calcul direct le montre. Soit $f \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_1, M_2)^k$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_0, M_1)^{i-k}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_\otimes(f \otimes g) &= \mathrm{d}(f) \otimes g + (-1)^k f \otimes \mathrm{d}(g) \\
&= \mathrm{d}(f) \circ g + (-1)^k f \circ \mathrm{d}(g) \\
&= \mathrm{d}(f \circ g).
\end{aligned}$$

□

Le lemme justifie la définition suivante.

Définition 3.6.5. Soit $\mathbf{C}(\mathrm{M})$ la catégorie DG $\mathbb{K}$-linéaire dont les objets sont les complexes dans M, et dont les DG $\mathbb{K}$-modules des morphismes sont $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M, N)$.

Il est clair, que les morphismes stricts de complexes définis en dans cette section sont les mêmes que ceux définis précédemment. En d'autres termes, $\mathrm{Str}(\mathbf{C}(\mathrm{M})) = \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$.

Lorsque $\mathrm{M} = \mathrm{Mod}\, A$ pour un anneau A, il n'y a pas de distinction entre les complexes et les modules DG. La proposition suivante et la version DG d'une précédente.

Proposition 3.6.6. *Soit A un anneau. Étant donné un complexe $M \in \mathbf{C}(\mathrm{Mod}\, A)$, on défini le DG A-module $F(M) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} M^i$, avec différentielle $\mathrm{d} := \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{d}^i_M$. Alors le foncteur $F \colon \mathbf{C}(\mathrm{Mod}\, A) \to \mathrm{DGMod}\, A$ est un isomorphisme de catégories DG.*

Preuve. On a déjà vu se résultat dans le cas gradué. On vérifie facilement que la différentielle définie satisfait les propriétés nécessaire, en se rappelant notamment que A est concentré en degré 0. De même, l'application F sur les morphismes $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}(\mathbf{C}(\mathrm{Mod}\, A))}(M, N)$ a bien $\mathrm{Hom}_{\mathrm{DGMod}\, A}(M, N)$ comme domaine d'arrivé, à nouveau puisque A est concentré en degré 0, et c'est un homomorphisme strict de DG $\mathbb{K}$-modules. Finalement, il est alors facile de voir que F constitue un isomorphisme de DG catégories, en construisant explicitement sont inverse par exemple.

□

3.7. **La Suite de Cohomologie Exacte Longue.**

Comme dans la section précédente, $\mathbb{M}$ est une catégorie abélienne $\mathbb{K}$-linéaire. Nous donnons ici une preuve de l'existence et de la fonctorialité de la suite de cohomologie exacte longue. Pour l'existence on utilisera le théorème de Freyd-Mitchell et pour la fonctorialité, pour rester dans l'esprit du livre on le fera avec les éléments généralisés. Pour un traitement de cette partie avec uniquement des éléments généralisés voir [8, Section 3.7].

Considérons une suite exacte courte

(3.7.1) $$E = (0 \to L \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} N \to 0)$$

dans la catégorie abélienne $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$. Cela signifie que ϕ et ψ sont des morphismes dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$, et à chaque degré i on a une suite exacte courte

$$0 \to L^i \xrightarrow{\phi^i} M^i \xrightarrow{\psi^i} N^i \to 0$$

dans M.

Théorème 3.7.2 (Suite de Cohomologie Exacte Longue)**.** *Soit* M *une catégorie abélienne. Étant donné une suite exacte courte*

$$E = (0 \to L \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} N \to 0)$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$*, la suite*

$$\cdots \to \mathrm{H}^i(L) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(\phi)} \mathrm{H}^i(M) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(\psi)} \mathrm{H}^i(N) \xrightarrow{\delta^i_E} \mathrm{H}^{i+1}(L) \to \cdots$$

dans M *est exacte. Le morphisme $\delta^i_E \colon \mathrm{H}^i(N) \to \mathrm{H}^{i+1}(L)$ est appelé le i-ème morphisme de connexion de la suite exacte courte E.*

Preuve. C'est une application directe du Lemme du Serpent. En effet, considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Y}^i(L) \arrow[r, "\mathrm{Y}^i(\phi)"] \arrow[d, "\mathrm{d}_M"] & \mathrm{Y}^i(M) \arrow[r, "\mathrm{Y}^i(\psi)"] \arrow[d, "\mathrm{d}_L"] & \mathrm{Y}^i(N) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{d}_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Z}^{i+1}(L) \arrow[r, "\mathrm{Z}^{i+1}(\phi)"] & \mathrm{Z}^{i+1}(M) \arrow[r, "\mathrm{Z}^{i+1}(\psi)"] & \mathrm{Z}^{i+1}(N) &
\end{tikzcd}$$

avec le lignes qui sont exactes. Alors en appliquant le lemme du serpent, on trouve notre suite exacte

$$\mathrm{H}^i(L) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(\phi)} \mathrm{H}^i(M) \xrightarrow{\mathrm{H}^i(\psi)} \mathrm{H}^i(N) \xrightarrow{\delta^i_E} \mathrm{H}^{i+1}(L) \xrightarrow{\mathrm{H}^{i+1}(\phi)} \mathrm{H}^{i+1}(M) \xrightarrow{\mathrm{H}^{i+1}(\psi)} \mathrm{H}^{i+1}(N)\ .$$

Ainsi, on le fait pour chaque i et on a le résultat.

□

Proposition 3.7.3. *Soit* $\chi\colon E \to E'$ *un morphisme de suites exactes courtes dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$*. À savoir* $\chi = (\chi_L, \chi_M, \chi_N)$ *dans le diagramme commutatif suivant avec lignes exactes*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\chi_L"] & M \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\chi_M"] & N \arrow[r] \arrow[d, "\chi_N"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r, "\phi'"] & M' \arrow[r, "\psi'"] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$*. Alors, pour tout* i*, le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{H}^i(N) \arrow[r, "\delta^i_E"] \arrow[d, "\mathrm{H}^i(\chi_N)"] & \mathrm{H}^{i+1}(L) \arrow[d, "\mathrm{H}^{i+1}(\chi_L)"] \\
\mathrm{H}^i(N') \arrow[r, "\delta^i_{E'}"'] & \mathrm{H}^{i+1}(L')
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Preuve. Pour faciliter les notations, on note $\overline{\chi_N} \coloneqq \mathrm{H}^i(\chi_N)$.

Soit $\bar{n} \in \Gamma(U, \mathrm{H}^i(N))$ pour un $U \in \mathrm{M}$. Alors on a un triplet de connexion sur $V \twoheadrightarrow U$, $n \in \Gamma(V, \mathrm{Z}^i(N))$, $m \in \Gamma(V, M^i))$ et $l \in \Gamma(V, \mathrm{Z}^{i+1}(L))$ tels que $\pi_N(n) = \bar{n}$, $\psi(m) = n$, $\phi(l) = \mathrm{d}(m)$, $\pi_L(l) = \delta_V(\bar{n}) = \delta^i_E(\bar{n})$ et $\overline{\chi_L}(\delta^i_E(\bar{n})) = \overline{\chi_L}(\pi_L(l)) = \pi_{L'}(\chi_L(l))$.

On considère le triplet $(\chi_N(n), \chi_M(m), \chi_L(l))$ alors $\pi_{N'}(\chi_N(n)) = \overline{\chi_N}(\bar{n})$, $\psi'(\chi_M(m)) = \chi_N(\psi(m)) = \chi_N(n)$ et $\mathrm{d}(\chi_M(m)) = \chi_M(\phi(l)) = \phi(\chi_L(l))$. Ainsi, c'est un triplet de connexion de $\overline{\chi_N}(\bar{n})$. Donc $\delta^i_{E'}(\overline{\chi_N}(\bar{n})) = \pi_{L'}(\chi_L(l))$ i.e. $\delta^i_{E'}(\overline{\chi_N}(\bar{n})) = \overline{\chi_L}(\delta^i_E(\bar{n}))$ comme on voulait montrer.

□

3.8. La DG Catégorie $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$.

Nous combinons maintenant le matériel des sections précédentes. Rappelons que étant donné une catégorie abélienne M, la catégorie des complexes $\mathbf{C}(\mathrm{M})$ est une catégorie DG. Pour un complexe $M \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$ on a l'anneau DG $\mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M)$. La multiplication dans cet anneau est la composition.

Définition 3.8.1. Soit M une catégorie abélienne, et soit A un anneau DG. Un *DG A-module dans* M est un objet $M \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$, ainsi qu'un homomorphisme d'anneaux DG $f\colon A \to \mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M)$.

Si M est un A-module DG dans M, alors, après oubli des différentielles, M devient un A-module gradué dans M.

Définition 3.8.2. Soit M une catégorie abélienne, soit A un anneau DG et soient M, N des A-modules DG dans M. On a déjà introduit le $\mathbb{K}$-module gradué $\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M, N)$. Celui-ci est transformé en un $\mathbb{K}$-module DG avec différentielle

$$\mathrm{d}(\phi) \coloneqq \mathrm{d}_N \circ \phi - (-1)^i \cdot \phi \circ \mathrm{d}_M$$

pour $\phi \in \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M, N)^i$.

Comme nous l'avons vu précédemment, étant donné des morphismes

$$\phi_k \in \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M_k, M_{k+1})^{i_k}$$

pour $k \in \{0, 1\}$, on a

$$\phi_1 \circ \phi_0 \in \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M_0, M_1)^{i_0+i_1},$$

et

$$\mathrm{d}(\phi_1 \circ \phi_0) = \mathrm{d}(\phi_1) \circ \phi_0 + (-1)^{i_1} \cdot \phi \circ \mathrm{d}(\phi_0).$$

Aussi l'automorphisme identité id_M appartient à $\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M_0, M_1)^0$, et $\mathrm{d}(\mathrm{id}_M) = 0$.

Définition 3.8.3. Soit M une catégorie abélienne, et soit A un anneau DG. La catégorie DG des A-modules DG dans M est notée $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$. Les DG $\mathbb{K}$-modules des morphismes sont

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(A,\mathrm{M})}(M, N) \coloneqq \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M, N).$$

La composition est celle dans $\mathbf{C}(\mathrm{M})$.

Remarquons que l'oubli de l'action de A est un DG foncteur fidèle $\mathbf{C}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{C}(\mathrm{M})$.

Exemple 3.8.4. Si $A = \mathbb{K}$, alors $\mathbf{C}(A, \mathrm{M}) = \mathbf{C}(\mathrm{M})$; et si $\mathrm{M} = \mathrm{Mod}\,\mathbb{K}$, alors $\mathbf{C}(A, \mathrm{M}) = \mathbf{C}(A) = \mathrm{DGMod}\,A$.

Définition 3.8.5. Soit M une catégorie abélienne, et soit A un anneau DG.

(1) La catégorie stricte de $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ est notée $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$.

(2) La catégorie d'homotopique de $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ est notée $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$.

Autrement dit : un morphisme $\phi \colon M \to N$ dans $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ est strict si et seulement s'il est de degré 0 et $\phi \circ \mathrm{d}_M = \mathrm{d}_N \circ \phi$. Les morphismes dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ sont les classes d'homotopie des morphismes stricts.

Un foncteur additif $F \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ entre catégories abéliennes est dit *fidèlement exact* si pour toute suite E dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, la suite E est exacte si et seulement si la suite $F(E)$ dans N est exacte.

Proposition 3.8.6. *La catégorie* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ *est une catégorie abélienne* $\mathbb{K}$*-linéaire, et les foncteurs d'oubli*

$$\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M}) \xrightarrow{F} \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M}) \xrightarrow{\mathrm{Und}} \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$$

sont fidèlement exacts.

Preuve. Remarquons déjà que ces foncteurs sont clairement fidèles. Si des morphismes sont différents après avoir oublier les structures respectives, alors ils étaient clairement différents dans la catégorie de départ. De même, ils sont clairement exacts.

Il suffit de montrer que $M \to N \to L$ exacte si et seulement si $F(M) \to F(N) \to F(L)$ exacte. On va le faire pour F, en remarquant que la seule propriété qu'on utilisera sera sa fidélité, et donc la même preuve s'applique à Und.

Supposons que $F(M) \xrightarrow{F(f)} F(N) \xrightarrow{F(g)} F(L)$. Alors $F(g) \circ F(f) = 0$ donc pas fidélité $g \circ f = 0$, donc $\operatorname{Im} f \hookrightarrow \operatorname{Ker} g$.

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "f"] & & N \arrow[r, "g"] \arrow[dl, two heads, "p"] & L \\
& \operatorname{Coker} f & \operatorname{Ker} g \arrow[u, hook, "i"'] &
\end{tikzcd},$$

il induit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[rr, "F(f)"] & & F(N) \arrow[rr, "F(g)"] \arrow[dll, "F(p)"'] \arrow[dl, two heads, "q"] & & F(L) \\
F(\operatorname{Coker} f) & \operatorname{Coker} F(f) \arrow[l, dashed, "\beta"] & & \operatorname{Ker} F(g) \arrow[ul, hook, "j"] & F(\operatorname{Ker} g) \arrow[l, dashed, "\alpha"] \arrow[ull, "F(i)"']
\end{tikzcd}$$

où les flèches en pointillés découlent des propriétés universelles. Puisque $\operatorname{Ker} F(g) = \operatorname{Im} F(f) = \operatorname{Ker} \operatorname{Coker} F(f)$ on a $q \circ j = 0$. Ainsi, $F(p) \circ F(i) = \beta \circ q \circ j \circ \alpha = 0$ et par fidélité $p \circ i = 0$. Finalement, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Ker} g \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, hook, dashed, shift left] & N \arrow[r, two heads, "p"] & \operatorname{Coker} f \\
& \operatorname{Im} f \arrow[u, hook] \arrow[ul, hook, dashed, shift left] &
\end{tikzcd}$$

où à nouveau, les flèches en pointillés découlent des propriétés universelles. On en déduit que $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ comme souhaité.

□

Comme précédemment, étant donné un module DG $M \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ et un entier i, on peut considérer les objets de degré i, cocycles $\mathrm{Z}^i(M)$, décocycles $\mathrm{Y}^i(M)$, cobords $\mathrm{B}^i(M)$ et la cohomologie $\mathrm{H}^i(M)$. Ce sont tous des objets de M. Lorsque M varie on obtient des foncteurs linéaires

$$\mathrm{Z}, \mathrm{Y}, \mathrm{B}, \mathrm{H} \colon \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M}). \tag{3.8.7}$$

Ces objets sont liés par les suites exactes suivantes dans M :

$$0 \to \mathrm{Z}^i(M) \to M^i \xrightarrow{\mathrm{d}_M^i} M^{i+1}, \tag{3.8.8}$$

$$M^{i-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_M^{i-1}} M^i \to \mathrm{Y}^i(m) \to 0, \tag{3.8.9}$$

$$0 \to \mathrm{B}^i(M) \to \mathrm{Z}^i(M) \to \mathrm{H}^i(M) \to 0, \tag{3.8.10}$$

$$0 \to \mathrm{H}^i(M) \to \mathrm{Y}^i(M) \to \mathrm{B}^{i+1}(M) \to 0. \tag{3.8.11}$$

Proposition 3.8.12. *Le foncteur* Z *est exact à gauche, et le foncteur* Y *dans est exact à droite.*

Preuve. Il suffit de considérer chaque degré séparément, on peut également ignorer le DG anneau A, car oublier son action est fidèlement exact. Soit $F^i \colon \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ le foncteur qui envoie un module gradué M à sa composante de degré i, M^i. C'est un foncteur exact.

Maintenant, d'après les formules précédentes, on a que Z^i est le noyau du morphisme de foncteurs $\mathrm{d}^i \colon F^i \to F^{i+1}$. Donc par la Proposition (2.5.15), on obtient que Z^i est exact à gauche.

Analogue pour Y^i.

□

Proposition 3.8.13. *Soit* $\{M_x\}_{x\in X}$ *une collection d'objets de* $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$*, indexée par un ensemble* X*. Supposons que pour tout* $i \in \mathbb{Z}$ *la somme directe* $M^i := \bigoplus_{x\in X} M_x^i$ *existe dans* M*. Alors l'objet gradué* $M := \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{G}(\mathrm{M})$ *a une structure canonique de DG* A*-module dans* M*, et* M *est une somme directe de la collection* $\{M_x\}_{x\in X}$ *dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$*.*

Preuve. On voit que M peut être muni d'un structure canonique de complexe sur M via $\bigoplus_{x\in X} M_x^i \xrightarrow{\bigoplus_{x\in X} \mathrm{d}^i_{M_x}} \bigoplus_{x\in X} M_x^{i+1}$.

Maintenant pour ce qui de l'action de A. On dispose d'homomorphisme de DG anneaux $\rho_x \colon A \to \mathrm{End}(M_x)$ pour tout $x \in X$. On va définir notre homomorphisme de DG anneaux $\rho \colon A \to \mathrm{End}(M)$ degré par degré. Soit $i \in \mathbb{Z}$, on observe qu'on a une morphisme canonique

$$\prod_{x\in X} \mathrm{Hom}(M_x^j, M_x^{i+j}) \to \mathrm{Hom}(\bigoplus_{x\in X} M_x^j, \bigoplus_{y\in X} M_y^{i+j}).$$

induit par les inclusions $M_y^{i+j} \to \bigoplus_{y\in X} M_y^{i+j}$. Cela donne un morphisme de DG anneaux canonique

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \prod_{x\in X} \prod_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M_x^j, M_x^{i+j}) \to \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \prod_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(M^j, M^{i+j}) =: \mathrm{End}(M).$$

Donc finalement, on pose pour $i \in \mathbb{Z}$, $a \in A^i$

$$\rho^i(a) = (\rho_x^i(a))_{x\in X} \in \mathrm{End}(M)^i$$

comme souhaité.

La vérification du fait que c'est bien une somme directe est simple.

□

Remarque. Puisque $\mathbf{M}(\mathbb{K})$ a des sommes directes infinies, la proposition ci-dessus montre que $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ a des sommes directes infinies.

Proposition 3.8.14. *Étant donné un anneau DG* A*, soit* $A^\natural$ *l'anneau gradué obtenu en oubliant la différentielle. Considérons le foncteur d'oubli* $\mathrm{Und} \colon \mathbf{C}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{C}(A^\natural,\mathrm{M})$ *qui oublie les différentielles des DG modules, c'est-à-dire* $\mathrm{Und}(M, \mathrm{d}_M) := M$*.*

(1) Und *est un foncteur gradué pleinement fidèle.*

(2) Sur les catégories strictes, $\mathrm{Str}(\mathrm{Und}) \colon \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$ *est un foncteur additif fidèlement exact.*

Preuve. Vérifications claires. On indique seulement que Und est plein du fait que les morphismes ne commutent pas nécessairement avec les différentielles.

□

Un objet gradué $M = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ dans M est dit *majoré* si l'ensemble $\{i \mid M^i \neq 0\}$ est borné au-dessus. De même, nous définissons les objets *minorés* et les objets *bornés.*

Définition 3.8.15. Nous définissons $\mathbf{C}^-(A,\mathrm{M})$, $\mathbf{C}^+(A,\mathrm{M})$ et $\mathbf{C}^{\mathrm{b}}(A,\mathrm{M})$ comme étant les sous-catégories pleines de $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$ consistant en les DG modules bornés au-dessus, bornés en dessous et bornés respectivement.

Les symboles "−", "+" et "b" et "⟨vide⟩" (le symbole vide) sont appelés *indicateurs de délimitation.* Nous utiliserons généralement le symbole "$\star$" pour désigner un indicateur de délimitation non spécifié.

Remarque. Au lieu d'un anneau DG A on peut prendre une petite catégorie DG $\mathbb{K}$-linéaire A. On définit alors la catégorie DG $\mathbb{K}$-linéaire $\mathbf{C}(\mathrm{A},\mathrm{M}) := \mathrm{DGFun}(\mathrm{A}, \mathbf{C}(\mathrm{M}))$. C'est une généralisation $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$: quand A admet un seul objet x, et qu'on écrit $A := \mathrm{End}_{\mathrm{A}}(x)$, alors le foncteur $F \mapsto F(x)$ est un isomorphisme de DG catégories $\mathbf{C}(\mathrm{A},\mathrm{M}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{C}(A,\mathrm{M})$.

3.9. DG Foncteurs Contravariants.

Dans cette section, nous abordons, de manière systématique, la question des flèches inversées dans les catégories DG. Comme toujours, on travaille sur un anneau de base commutatif $\mathbb{K}$.

Définition 3.9.1. Soit C et D des DG catégories. Un *foncteur DG contravariant* $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ consiste en une fonction $F\colon \mathrm{Ob}(\mathrm{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathrm{D})$, et pour chaque paire d'objets $M_0, M_1 \in \mathrm{Ob}(\mathrm{C})$ un homomorphisme

$$F\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_0, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(F(M_1), F(M_0))$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Les conditions sont :

(1) Unités : $F(\mathrm{id}_M = \mathrm{id}_{F(M)})$.

(2) Composition inversée graduée : supposons que pour $k \in \{0,1\}$ on dispose des morphismes $\phi_k \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_k, M_{k+1}))^{i_k}$. Alors il y a égalité

$$F(\phi_1 \circ \phi_0) = (-1)^{i_0 \cdot i_1} \cdot F(\phi_0) \circ F(\phi_1)$$

dans $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(F(M_2), F(M_0))^{i_0+i_1}$.

Attention : un foncteur DG contravariant n'est pas un foncteur contravariant après l'oubli de la gradation.

Définition 3.9.2. Soit C une catégorie DG. La *DG catégorie de opposée* C^{op} a le même ensemble d'objets. Les DG $\mathbb{K}$-modules des morphismes sont

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}^{\mathrm{op}}}(M_0, M_1) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_1, M_0).$$

La composition $\circ^{\mathrm{op}}$ de C^{op} est celle de C inversée et multipliée par des signes :

$$\phi_0 \circ^{\mathrm{op}} \phi_1 := (-1)^{i_0 \cdot i_1} \cdot \phi_1 \circ \phi_0$$

pour des morphismes $\phi_k \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M_k, M_{k+1}))^{i_k}$.

Des vérifications immédiates nous donnent la proposition suivante

Proposition 3.9.3. *Soit* C, D *et* E *des DG catégories.*

(1) Les opérations $\mathrm{Op}\colon \mathrm{C} \to \mathrm{C}^{\mathrm{op}}$ *et* $\mathrm{Op}\colon \mathrm{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{C}$ *sont des DG foncteurs contravariants.*

(2) Si $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ *est un DG foncteur contravariant, alors la composition* $F \circ \mathrm{Op}\colon \mathrm{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}$ *est un DG foncteur, et vice versa.*

(3) Si $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ *et* $G\colon \mathrm{D} \to \mathrm{E}$ *sont des DG foncteurs contravariants, alors la composition* $G \circ F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{E}$ *est un DG foncteur.*

Les définitions précédentes ont du sens pour les catégories graduées, en oubliant les différentielles. Ainsi pour des catégories graduées C et D on peut parler de foncteurs gradués contravariants $\mathrm{C} \to \mathrm{D}$, et de la catégorie graduée C^{op}.

Soient M et N des catégories abéliennes, et soit $F\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un foncteur linéaire contravariant. Pour un objet gradué $M = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{G}(\mathrm{M})$ définissons l'objet gradué

(3.9.4) $$\mathbf{G}(F)(M) := \{N^i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{G}(\mathrm{N}),\ N^i := F(M^{-i}) \in \mathrm{N}.$$

Considérons ensuite une paire d'objets $M_0, M_1 \in \mathbf{G}(\mathrm{M})$ et un morphisme de degré i, $\phi\colon M_0 \to M_1$ dans $\mathbf{G}(\mathrm{M})$. Ainsi

$$\phi = \{\phi^j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}(\mathrm{M})}(M_0, M_1)^i,$$

où $\phi^j \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M_0^j, M_1^{j+i})$. Soient $N_k := \mathbf{G}(F)(M_k)$ pour $k \in \{0,1\}$. Pour $j \in \mathbb{Z}$, on définit

(3.9.5) $$\psi^j := (-1)^{i\cdot j} \cdot F(\phi^{-j-i}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N_0^j, N_1^{j+i}).$$

En les rassemblant on obtient un morphisme

(3.9.6) $$\mathbf{G}(F)(\phi) := \{\psi^j\}_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{G}(\mathrm{M})}(N_0, N_1)^i.$$

Lemme 3.9.7. *Les formules* (3.9.4) *et* (3.9.6) *produisent un foncteur gradué* $\mathbf{G}(F)\colon \mathbf{G}(\mathrm{M}) \to \mathbf{G}(\mathrm{N})$.

Preuve. [8, Lemma 3.9.8].

□

Considérons maintenant un complexe $(M, \mathrm{d}_M) \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$. Celui-ci est composé d'un objet gradué $M = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{G}(\mathrm{M})$ et d'une différentielle $\mathrm{d}_M = \{\mathrm{d}_M^i\}_{i\in\mathbb{K}}$. On peut voir d_M comme un élément de $\mathrm{End}_{\mathbf{G}(\mathrm{M})}(M)^1$. Nous spécifions une différentielle $\mathrm{d}_{\mathbf{C}(F)(M)}$ sur l'objet gradué $\mathbf{G}(F)(M) \in \mathbf{G}(\mathrm{N})$ comme suit :

(3.9.8) $$\mathrm{d}_{\mathbf{C}(F)(M)} := -\mathbf{G}(F)(\mathrm{d}_M) \in \mathrm{End}_{\mathbf{G}(\mathrm{N})}(\mathbf{G}(F)(M))^1.$$

Plus précocement, la composante

$$\mathrm{d}^i_{\mathbf{C}(F)(M)} := \mathbf{G}(F)(M)^i = F(M^{-i}) \to F(M^{-i-1}) = \mathbf{G}(F)(M)^{i+1}$$

de $\mathrm{d}_{\mathbf{C}(F)(M)}$ est donnée par

(3.9.9) $$\mathrm{d}^i_{\mathbf{C}(F)(M)} = (-1)^{i+1} \cdot F(\mathrm{d}_M^{-i-1})\colon F(M^{-i}) \to F(M^{-i-1}).$$

On a déjà introduit la sous-catégorie $\mathbf{C}^\star(\mathrm{N}) \subseteq \mathbf{C}(\mathrm{N})$ pour une condition de délimitation donnée. Chaque condition de délimitation a une *condition de délimitation inversée* $-\star$ évidente.

Théorème 3.9.10. *Soient* M *et* N *des catégories abéliennes, et soit* $F\colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ *un foncteur linéaire contravariant. Les formules* (3.9.4), (3.9.6) *et* (3.9.9) *donnent un DG foncteur contravariant*

$$\mathbf{C}(F)\colon \mathbf{C}(\mathrm{M}) \to \mathbf{C}(\mathrm{N}).$$

Pour chaque condition de délimitation $\star$ *on a* $\mathbf{C}(F)(\mathbf{C}^{\star}(\mathrm{M}) \subseteq \mathbf{C}^{-\star}(\mathrm{M})$, *où* $-\star$ *est la condition de délimitation inversée.*

Remarque. Soit $\mathrm{M} = \mathrm{N} \coloneqq \operatorname{Mod} \mathbb{K}$, et on considère le foncteur additif contravariant $F \coloneqq \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K})$ de M vers lui-même. Soit $M \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$; on peut voir M comme un complexe de $\mathbb{K}$-modules ou comme un DG $\mathbb{K}$-module. Alors, par une simple vérification on voit $\mathbf{C}(F)(M) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(M, \mathbb{K})$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$.

Définition 3.9.11. Soit A un anneau DG et soit M une catégorie abélienne. La *catégorie inversée* de $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ est la DG catégorie $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})^{\mathrm{flip}}\colon \mathbf{C}(A^{\mathrm{op}}, \mathrm{M}^{\mathrm{op}})$.

Théorème 3.9.12. *Soit A un anneau DG et soit* M *une catégorie abélienne. Alors :*

(1) Il existe un isomorphisme canonique des DG catégories

$$\operatorname{Flip}\colon \mathbf{C}(A, \mathrm{M})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{C}(A^{\mathrm{op}}, \mathrm{M}^{\mathrm{op}}) = \mathbf{C}(A, \mathrm{M})^{\mathrm{flip}}$$

(2) Pour tout condition de délimitation $\star$ *on a*

$$\operatorname{Flip}(\mathbf{C}^{\star}(A, \mathrm{M})^{\mathrm{op}}) = \mathbf{C}^{-\star}(A^{\mathrm{op}}, \mathrm{M}^{\mathrm{op}}).$$

(3) L'isomorphisme induit sur les catégories strictes

$$\operatorname{Str}(\operatorname{Flip})\colon \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A^{\mathrm{op}}, \mathrm{M}^{\mathrm{op}})$$

est un foncteur exact, pour les structures de catégories abéliennes respectives.

(4) Pour tout entier i, le foncteur Str(Flip) *fait le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})^{\mathrm{op}} \arrow[r, "\operatorname{Str}(\operatorname{Flip})", "\cong"'] \arrow[dr, "\mathrm{H}^{i}"'] & \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A^{\mathrm{op}}, \mathrm{M}^{\mathrm{op}}) \arrow[d, "\mathrm{H}^{-i}"] \\ & \mathrm{M}^{\mathrm{op}} \end{tikzcd}$$

commutatif, à un isomorphisme de foncteurs linéaires près.

Preuve. [8, Theorem 3.9.16]. □

Remarque. Le théorème permet de remplacer un foncteur DG contravariant $F\colon \mathbf{C}(A, \mathrm{M}) \to \mathrm{D}$ par un foncteur DG usuel, covariant $F \circ \operatorname{Flip}^{-1}\colon \mathbf{C}(A^{\mathrm{op}}, \mathrm{M}^{\mathrm{op}}) \to \mathrm{D}$. Ce remplacement va être très utile lors de la discussion de propriétés formelles, telles que l'existence de foncteurs dérivés.

Comme précédemment, nous fixons une catégorie abélienne $\mathbb{K}$-linéaire M et un DG anneau A. Dans ce chapitre nous étudions le foncteur de translation et le cône standard d'un morphisme strict, le tout dans le contexte de la DG catégorie $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$. Nous étudions ensuite les propriétés des DG foncteurs $F\colon \mathbf{C}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{C}(B,\mathrm{N})$ entre ces catégories DG.

4.1. **Le Foncteur de Translation.**

Ici et plus tard, le mot *opérateur* est utilisé comme synonyme de "morphisme dans une catégorie linéaire".

Définition 4.1.1. Soit $M = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un objet gradué dans M. La *translation de M* est l'objet

$$\mathrm{T}(M) = \{\mathrm{T}(M)^i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbf{G}(\mathrm{M}), \text{ où } \mathrm{T}(M)^i := M^{i+1}.$$

Définition 4.1.2 (L'opérateur petit t)**.** Soit $M = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un objet gradué dans M. On définit

$$\mathrm{t}_M\colon M \to \mathrm{T}(M)$$

comme le morphisme de degré -1 des objets gradués de M, qui pour tout degré i est le morphisme d'identité $\mathrm{t}_M\,|_{M^i} := \mathrm{id}_{M^i}\colon M^i \mapsto \mathrm{T}(M)^{i-1}$ de l'objet M^i dans M.

On note que le morphisme $\mathrm{t}_M\colon M \to \mathrm{T}(M)$ est un isomorphisme de degré -1 dans la catégorie graduée $\mathbf{G}(\mathrm{M})$.

Définition 4.1.3. Pour $M \in \mathbf{G}(\mathrm{M})$ on définit le morphisme $\mathrm{t}_M^{-1}\colon\ \mathrm{T}(M) \to M$ dans $\mathbf{G}(\mathrm{M})$ comme étant l'inverse de t_M. Bien sûr, le morphisme t_M^{-1} est de degré $+1$.

Définition 4.1.4. Soit $M = \{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un DG A-module dans M. La *translation* de M est l'objet

$$\mathrm{T}(M) \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$$

défini comme suit.

(1) En tant qu'object gradué de M, il est tel que spécifié dans la Définition (4.1.1).

(2) La différentielle $\mathrm{d}_{\mathrm{T}(M)}$ est défini par la formule

$$\mathrm{d}_{\mathrm{T}(M)} := -\,\mathrm{t}_M \circ \mathrm{d}_M \circ \mathrm{t}_M^{-1}\,.$$

(3) Soit $f_M\colon A \to \mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M)$ l'homomorphisme de DG anneau qui détermine l'action de A sur M. Alors

$$f_{\mathrm{T}(M)}\colon A \to \mathrm{End}_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}(M))$$

est défini par

$$f_{\mathrm{T}(M)}(a) := (-1)^j \cdot \mathrm{t}_M \circ f_M(a) \circ \mathrm{t}_M^{-1}$$

pour $a \in A^j$.

Ainsi, la différentielle $\mathrm{d}_{\mathrm{T}(M)} = \{\mathrm{d}^i_{\mathrm{T}(M)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ rend le diagramme suivant commutatif pour tout i :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}(M)^i \arrow[r, "\mathrm{d}^i_{\mathrm{T}(M)}"] & \mathrm{T}(M)^{i+1} \\
M^{i+1} \arrow[u, "\mathrm{t}_M"] \arrow[r, "-\,\mathrm{d}^{i+1}_M"] & M^{i+2} \arrow[u, "\mathrm{t}_M"']
\end{tikzcd}$$

Et la structure de A-module à gauche rend le diagramme suivant commutatif pour tout i et tout $a \in A^j$:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}(M)^i \arrow[r, "f_{\mathrm{T}(M)}(a)"] & \mathrm{T}(M)^{i+j} \\
M^{i+1} \arrow[u, "\mathrm{t}_M"] \arrow[r, "(-1)^j\cdot f_M(a)"] & M^{i+1+j} \arrow[u, "\mathrm{t}_M"']
\end{tikzcd}$$

Proposition 4.1.5. *Les morphismes t_M et t_M^{-1} sont des cocycles*

Preuve. Il suffit de le voir pour t_M. Comme il est de degré -1, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\mathrm{t}_M) &= \mathrm{d}_{\mathrm{T}(M)} \circ \mathrm{t}_M + \mathrm{t}_M \circ \mathrm{d}_M \\
&= (-\,\mathrm{t}_M \circ \mathrm{d}_M \circ \mathrm{t}_M^{-1}) \circ \mathrm{t}_M + \mathrm{t}_M \circ \mathrm{d}_M \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Définition 4.1.6. Étant donné un morphisme $\phi \in \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M,N)^i$ on définit le morphisme
$$\mathrm{T}(\phi) \in \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(\mathrm{T}(M),\mathrm{T}(N))^i$$
par
$$\mathrm{T}(\phi) := (-1)^i \cdot \mathrm{t}_N \circ \phi \circ \mathrm{t}_M^{-1}\,.$$
Plus précisément, $\phi = \{\phi^j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, alors $\mathrm{T}(\phi)^j = (-1)^i \cdot \mathrm{t}_N \circ \phi^{j+1} \circ \mathrm{t}_M^{-1}$. On a le diagramme commutatif suivant

(4.1.7)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{T}(M)^j \arrow[r, "\mathrm{T}(\phi)^j"] & \mathrm{T}(N)^{j+i} \\ M^{j+1} \arrow[u, "\mathrm{t}_M"] \arrow[r, "(-1)^i\cdot\phi^{j+1}"] & N^{j+1+i} \arrow[u, "\mathrm{t}_M"'] \end{tikzcd}$$

Théorème 4.1.8. *Soit* M *une catégorie abélienne et soit A un DG anneau.*

(1) Les formules $M \mapsto \mathrm{T}(M)$ et $\phi \mapsto \mathrm{T}(\phi)$ définissent un DG foncteur $\mathrm{T}\colon \mathbf{C}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{C}(A,\mathrm{M})$.

(2) La collection $\mathrm{t} := \{\mathrm{t}_M\}_{M\in\mathbf{C}(A,\mathrm{M})}$ est un isomorphisme de degré -1 $\mathrm{t}\colon \mathrm{Id} \to \mathrm{T}$ de DG foncteurs de $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$ vers elle-même.

Preuve. *(1) :* Soient $\phi_1\colon M_0 \to M_1$ et $\phi_2\colon M_1 \to M_2$ de degrés respectifs i_1 et i_2. Alors
$$\begin{aligned} \mathrm{T}(\phi_2\circ\phi_1) &= (-1)^{i_1+i_2}\cdot \mathrm{t}_{M_2} \circ (\phi_2\circ\phi_1)\circ \mathrm{t}_{M_0}^{-1} \\ &= (-1)^{i_1+i_2}\cdot \mathrm{t}_{M_2} \circ \phi_2 \circ (\mathrm{t}_{M_1}^{-1}\circ \mathrm{t}_{M_1})\circ\phi_1\circ \mathrm{t}_{M_0}^{-1} \\ &= \mathrm{T}(\phi_2)\circ\mathrm{T}(\phi_1). \end{aligned}$$
On a clairement, $\mathrm{T}(\mathrm{id}_M) = \mathrm{id}_\mathrm{M}$ et $\mathrm{T}(\lambda\cdot\phi+\psi) = \lambda\cdot\mathrm{T}(\phi)+\mathrm{T}(\psi)$, pour $\lambda\in\mathbb{K}$ et $\phi, psi \in \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M_0,M_1)^i$. Donc T est un foncteur $\mathbb{K}$-linéaire gradué.

On sait que $\mathrm{d}\circ\mathrm{t} = -\,\mathrm{t}\circ\mathrm{d}$ et $\mathrm{d}\circ\mathrm{t}^{-1} = -\,\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{d}$. Ceci implique que pour tout morphisme ϕ dans $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$, on a $\mathrm{T}(\mathrm{d}(\phi)) = \mathrm{d}(\mathrm{T}(\phi))$. Donc T est un foncteur DG.

(2) : Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M_0,M_1)^i$. On doit montrer que $\mathrm{t}_{M_1}\circ\phi = (-1)^i\cdot\mathrm{T}(\phi)\circ\mathrm{t}_{M_0}$ en tant qu'éléments de $\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M_0,\mathrm{T}(M_1))^{i+1}$. Or, on a par définition
$$\mathrm{T}(\phi)\circ\mathrm{t}_{M_0} = ((-1)^i\cdot\mathrm{t}_{M_1}\circ\phi\circ\mathrm{t}_{M_0}^{-1})\circ\mathrm{t}_{M_0} = (-1)^i\cdot\mathrm{t}_{M_1}\circ\phi.$$
□

Définition 4.1.9. On appelle T le *foncteur de translation* de la DG catégorie $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$.

Une conséquence directe du théorème précédant est

Corollaire 4.1.10.

(1) Le foncteur T *est un automorphisme de la DG catégorie $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$.*

(2) Pour tout $k,l\in\mathbb{Z}$ on a l'égalité de foncteurs $\mathrm{T}^k\circ\mathrm{T}^l = \mathrm{T}^{k+l}$.

Proposition 4.1.11. *Soit $M \in \mathbf{C}(A,\mathrm{M})$.*

(1) On a l'égalité $\mathrm{t}_{\mathrm{T}(M)} = -\,\mathrm{T}(\mathrm{d}_M)$ de morphismes de degré -1, $\mathrm{T}(M)\to\mathrm{T}^2(M)$ dans $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$.

(2) On a l'égalité $\mathrm{t}_{\mathrm{T}^{-1}(M)} = -\,\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{d}_M)$ de morphismes de degré -1, $\mathrm{T}^{-1}(M)\to\mathrm{T}(\mathrm{T}^{-1}(M)) = M = \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{T}(M))$ dans $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$.

Preuve. On voit que *(2)* découle de *(1)*, et *(1)* est un simple calcul,
$$\mathrm{T}(\mathrm{t}_M) = -\,\mathrm{t}_{\mathrm{T}(M)}\circ\mathrm{t}_M\circ\mathrm{t}_M^{-1} = -\,\mathrm{t}_{\mathrm{T}(M)}\,.$$

Proposition 4.1.12. *Soit $M\in\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$ et $i\in\mathbb{Z}$. On a l'égalité $\mathrm{d}_{\mathrm{T}^i(M)} = \mathrm{T}^i(\mathrm{d}_M)$ dans* $\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(\mathrm{T}^i(M),\mathrm{T}^i(M))^1$.

Preuve. On fait des récurrences. [8, Proposition 4.1.12]

□

4.2. **Le Triangle Standard d'un Morphisme Strict.**

Définition 4.2.1. Soit $\phi\colon M\to N$ un morphisme strict dans $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$. Le *cône standard de ϕ* est l'objet $\mathrm{Cone}(\phi)\in\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$ défini comme suit. En tant que A-module gradué dans M, on pose
$$\mathrm{Cone}(\phi) := N\oplus\mathrm{T}(M).$$
La différentielle $\mathrm{d}_{\mathrm{Cone}}$: si on exprime le module gradué sous forme de colonne
$$\mathrm{Cone}(\phi) = \begin{bmatrix} N \\ \mathrm{T}(M)\end{bmatrix},$$

alors $\mathrm{d}_{\mathrm{Cone}}$ est la multiplication à gauche par la matrice

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Cone}} := \begin{bmatrix} \mathrm{d}_N & \phi \circ \mathrm{t}_M^{-1} \\ 0 & \mathrm{d}_{\mathrm{T}(M)} \end{bmatrix}$$

de morphismes de A-modules de degré 1 dans M.

En d'autre termes, $\mathrm{d}^i_{\mathrm{Cone}} \colon \mathrm{Cone}(\phi)^i \to \mathrm{Cone}(\phi)^{i+1}$ est $\mathrm{d}^i_{\mathrm{Cone}} = \mathrm{d}^i_N + \mathrm{d}^i_{\mathrm{T}(M)} + \phi^{i+1} \circ \mathrm{t}_M^{-1}$.

On note

$$e_\phi \colon N \to N \oplus \mathrm{T}(M) \text{ et } p_\phi \colon N \oplus \mathrm{T}(M) \to \mathrm{T}(M), \tag{4.2.2}$$

l'inclusion et la projection respectivement. En terme de matrices en on

$$e_\phi = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_N \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } p_\phi = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{\mathrm{T}(M)} \end{bmatrix}.$$

Le cône standard de ϕ se trouve dans la séquence exacte

$$0 \to N \xrightarrow{e_\phi} \mathrm{Cone}(\phi) \xrightarrow{p_\phi} \mathrm{T}(M) \to 0$$

dans la catégorie abélienne $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$.

Définition 4.2.3. Soit $\phi \colon M \to N$ un morphisme dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$. La suite

$$M \xrightarrow{\phi} N \xrightarrow{e_\phi} \mathrm{Cone}(\phi) \xrightarrow{p_\phi} \mathrm{T}(M)$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ est appelé le *triangle standard* associé à ϕ.

Un simple vérification nous donne que la construction du cône est fonctorielle, au sens suivant.

Proposition 4.2.4. *Soit*

$$\begin{array}{ccc} M_0 & \xrightarrow{\phi_0} & N_0 \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \chi} \\ M_1 & \xrightarrow{\phi_1} & N_1 \end{array}$$

un diagramme commutatif dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$. *Alors*

$$(\chi, \mathrm{T}(\psi)) \colon \mathrm{Cone}(\phi_0) \to \mathrm{Cone}(\phi_1) \tag{4.2.5}$$

est in morphisme dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, *et le diagramme suivant dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ *commute*

$$\begin{array}{ccccccc} M_0 & \xrightarrow{\phi_0} & N_0 & \xrightarrow{e_{\phi_0}} & \mathrm{Cone}(\phi_0) & \xrightarrow{p_{\phi_0}} & \mathrm{T}(M_0) \\ \downarrow{\scriptstyle \psi} & & \downarrow{\scriptstyle \chi} & & \downarrow{\scriptstyle (\chi, \mathrm{T}(\psi))} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{T}(\psi)} \\ M_1 & \xrightarrow{\phi_1} & N_1 & \xrightarrow{e_{\phi_1}} & \mathrm{Cone}(\phi_1) & \xrightarrow{p_{\phi_1}} & \mathrm{T}(M_1) \end{array}$$

4.3. **La Jauge d'un Foncteur Gradué.**

Définition 4.3.1. Soit $F \colon \mathbf{C}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{C}(B, \mathrm{N})$ un foncteur gradué. Pour tout objet $M \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ on pose

$$\gamma_{F,M} := \mathrm{d}_{F(M)} - F(\mathrm{d}_M) \in \mathrm{Hom}_{B,\mathrm{N}}(F(M), F(M))^1.$$

La collection de morphismes $\gamma_F := \{\gamma_{F,M}\}_{M \in \mathbf{C}(A,\mathrm{M})}$ est appelé *la jauge de* F.

Théorème 4.3.2. *Soit* $F \colon \mathbf{C}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{C}(B, \mathrm{N})$ *un foncteur gradué. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) F est un DG foncteur.

(2) La jauge γ_F est un morphisme de degré 1 de foncteurs $\gamma_F \colon F \to F$.

Preuve. Rappelons que F est un DG foncteur si et seulement si

$$(F \circ \mathrm{d}_{A,\mathrm{M}})(\phi) = (\mathrm{d}_{B,\mathrm{N}} \circ F)(\phi)$$

pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M_0, M_1)^i$, et que γ_F est morphisme de degré 1 de foncteurs si et seulement si

$$\gamma_{F,M_1} \circ F(\phi) = (-1)^i \cdot F(\phi) \circ \gamma_{F,M_0}$$

pour tout $\phi \in \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M_0, M_1)^i$.

On calcule que

$$F(\mathrm{d}_{A,\mathrm{M}}(\phi)) = F(\mathrm{d}_{M_1}) \circ F(\phi) - (-1)^i \cdot F(\phi) \circ F(\mathrm{d}_{M_0})$$

et

$$\mathrm{d}_{B,\mathrm{N}}(F(\phi)) = \mathrm{d}_{F(M_1)} \circ F(\phi) - (-1)^i \cdot F(\phi) \circ \mathrm{d}_{F(M_0)}.$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}(F \circ \mathrm{d}_{A,\mathrm{M}} - \mathrm{d}_{B,\mathrm{N}} \circ F)(\phi) &= (F(\mathrm{d}_{M_1}) - \mathrm{d}_{F(M_1)}) \circ F(\phi) - (-1)^i \cdot F(\phi) \circ (F(\mathrm{d}_{M_0}) - \mathrm{d}_{F(M_0)}) \\ &= -\gamma_{F,M_1} \circ F(\phi) + (-1)^i \cdot F(\phi) \circ \gamma_{F,M_0}.\end{aligned}$$

On en déduit le résultat.

□

4.4. **L'Isomorphisme de Translation d'un DG Foncteur.**

On considère ici des catégories abéliennes M et N, et des DG anneaux A et B. Le foncteur de translation de la DG catégorie $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ sera noté $\mathrm{T}_{A,\mathrm{M}}$. Pour un objet $M \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$, on a le petit opérateur t, $\mathrm{t}_M \in \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M, \mathrm{T}_{A,\mathrm{M}}(M))^{-1}$. C'est un isomorphisme dans la catégorie $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$, et de même pour la catégorie $\mathbf{C}(B, \mathrm{N})$.

Définition 4.4.1. Soit $F \colon \mathbf{C}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{C}(B, \mathrm{N})$ un DG foncteur. Pour un objet $M \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$, soit

$$\tau_{F,M} \colon F(\mathrm{T}_{A,\mathrm{M}}(M)) \to \mathrm{T}_{B,\mathrm{N}}(F(M))$$

l'isomorphisme de degré 0

$$\tau_{F,M} := \mathrm{t}_{F(M)} \circ F(\mathrm{t}_M)^{-1}$$

dans $\mathbf{C}(B, \mathrm{N})$, appelé *isomorphisme de translation* du foncteur F en M.

L'isomorphisme $\tau_{F,M}$ se trouve dans le diagramme commutatif d'isomorphismes dans la catégorie $\mathbf{C}(B, \mathrm{N})$ suivant

$$\begin{tikzcd} F(\mathrm{T}_{A,\mathrm{M}}(M)) \arrow[r, "\tau_{F,M}"] & \mathrm{T}_{B,\mathrm{N}}(F(M)) \\ F(M) \arrow[u, "F(\mathrm{t}_M)"] \arrow[ur, "\mathrm{t}_{F(M)}"'] & \end{tikzcd} .$$

Proposition 4.4.2. $\tau_{F,M}$ *est un isomorphisme dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(B, \mathrm{N})$.

Preuve. Il est clair que $\tau_{F,M}$ est un isomorphisme dans $\mathbf{C}(B, \mathrm{N})$. Donc il reste a voir qu'il est un morphisme strict. Or on sait que t_M est un cocycle, donc $F(\mathrm{t}_M)$ aussi. De même, $\mathrm{t}_{F(M)}$ est un cocycle, d'où $\tau_{F,M} = \mathrm{t}_{F(M)} \circ F(\mathrm{t}_M)^{-1}$ est un cocycle.

□

Proposition 4.4.3. *Soit* $F \colon \mathbf{C}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{C}(B, \mathrm{N})$ *un DG foncteur. Alors la collection*

$$\tau_F := \{\tau_{F,M}\}_{M \in \mathbf{C}(A,\mathrm{M})}$$

est un isomorphisme

$$\tau_F \colon F \circ \mathrm{T}_{A,\mathrm{M}} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{T}_{B,\mathrm{N}} \circ F$$

de foncteurs $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(B, \mathrm{N})$.

La phrase résumant ce théorème est "Un DG foncteur commute avec les translations".

Preuve. D'après ce qui précède, le seul point qu'il reste à montrer est que τ_F est une transformation naturelle.

Soit $\phi \colon M_0 \to M_1$ un morphisme dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$. On doit démontrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} (F \circ \mathrm{T}_{A,\mathrm{M}})(M_0) \arrow[r, "\tau_{F,M_0}"] \arrow[d, "(F \circ \mathrm{T}_{A,\mathrm{M}})(\phi)"'] & (\mathrm{T}_{B,\mathrm{N}} \circ F)(M_0) \arrow[d, "(\mathrm{T}_{B,\mathrm{N}} \circ F)(\phi)"] \\ (F \circ \mathrm{T}_{A,\mathrm{M}})(M_1) \arrow[r, "\tau_{F,M_1}"'] & (\mathrm{T}_{B,\mathrm{N}} \circ F)(M_0) \end{tikzcd}$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(B, \mathrm{N})$. Ceci sera vrai si le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} (F \circ \mathrm{T}_{A,\mathrm{M}})(M_0) \arrow[d, "(F \circ \mathrm{T}_{A,\mathrm{M}})(\phi)"'] & M_0 \arrow[l, "F(\mathrm{t}_{M_0})"'] \arrow[r, "\mathrm{t}_{F(M_0)}"] & (\mathrm{T}_{B,\mathrm{N}} \circ F)(M_0) \arrow[d, "(\mathrm{T}_{B,\mathrm{N}} \circ F)(\phi)"] \\ (F \circ \mathrm{T}_{A,\mathrm{M}})(M_1) & M_1 \arrow[l, "F(\mathrm{t}_{M_1})"] \arrow[r, "\mathrm{t}_{F(M_1)}"'] & (\mathrm{T}_{B,\mathrm{N}} \circ F)(M_0) \end{tikzcd}$$

dans $\mathbf{C}(B, \mathrm{N})$ est commutatif. Mais cette commutativité découle du fait que les opérateurs petit t sont des isomorphismes de DG foncteurs.

□

Un calcul direct nous donne le résultat suivant

Proposition 4.4.4. *Pour tout entier k, l'isomorphisme de translation du DG foncteur* T^k *est* $\tau_{\mathrm{T}^k} = (-1)^k \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{T}^{k+1}}$, *où* $\mathrm{id}_{\mathrm{T}^{k+1}}$ *est l'automorphisme identité du foncteur* T^{k+1}.

4.5. **Triangles Standards et DG Foncteurs.**

Soit $F\colon \mathbf{C}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{C}(B,\mathrm{N})$ un DG foncteur. Étant donné $\phi\colon M_0 \to M_1$ un morphisme dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$, on a un morphisme $F(\phi)\colon F(M_0) \to F(M_1)$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(B,\mathrm{N})$, ainsi que des objets $F(\mathrm{Cone}_{A,\mathrm{M}}(\phi))$ et $\mathrm{Cone}_{B,\mathrm{N}}(F(\phi))$ dans $\mathbf{C}(B,\mathrm{N})$. Après oubli de la différentielle, on a

$$\mathrm{Cone}_{A,\mathrm{M}}(\phi) \cong M_1 \oplus \mathrm{T}_{A,\mathrm{M}}(M_0) \tag{4.5.1}$$

dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$. Puisque F est un foncteur linéaire, il commute avec les somme directes finies, donc

$$F(\mathrm{Cone}_{A,\mathrm{M}}(\phi)) \cong F(M_1) \oplus F(\mathrm{T}_{A,\mathrm{M}}(M_0)) \tag{4.5.2}$$

dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$. Par définition, on a un isomorphisme canonique,

$$\mathrm{Cone}_{B,\mathrm{N}}(F(\phi)) \cong F(M_1) \oplus \mathrm{T}_{B,\mathrm{N}}(F(M_0)) \tag{4.5.3}$$

dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$. Attention, ces isomorphismes peuvent ne pas commuter avec les différentielles. Les différentielles sur à droite sont des matrices diagonales, mais à côtés gauches, ce sont des matrices triangulaires supérieures.

Lemme 4.5.4. *Soient $F, G\colon \mathbf{G}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{G}(B,\mathrm{N})$ des foncteurs gradués, et soit $\eta\colon F \to G$ un morphisme de foncteurs de degré j. On suppose que $M \cong M_0 \oplus M_1$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$, avec les inclusion $e_i\colon M_i \to M$ et les projections $p_i\colon M \to M_i$. Alors*

$$\eta_M = (G(e_0), G(e_1)) \circ (\eta_{M_0}, \eta_{M_1}) \circ (F(p_0), F(p_1)),$$

en tant que morphismes de degré j de $F(M) \to G(M)$ dans $\mathbf{G}(B,\mathrm{N})$

En d'autres termes, le lemme dit que le diagramme suivant est commutatif dans $\mathbf{G}(B,\mathrm{N})$

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[r, "{(F(p_0),F(p_1))}"] \arrow[d, "\eta_M"'] & F(M_0) \oplus F(M_1) \arrow[d, "{(\eta_{M_0},\eta_{M_1})}"] \\
G(M) & G(M_0) \oplus G(M_1) \arrow[l, "{(G(e_0),G(e_1))}"]
\end{tikzcd}.$$

Preuve. On regarde les diagrammes commutatifs suivant pour $i \in \{0,1\}$

$$\begin{tikzcd}
F(M) \arrow[r, "F(p_i)"] \arrow[d, "\eta_M"'] & F(M_i) \arrow[r, "F(e_i)"] \arrow[d, "\eta_{M_i}"] & F(M) \arrow[d, "\eta_M"] \\
G(M) \arrow[r, "G(p_i)"'] & G(M_i) \arrow[r, "G(e_i)"'] & G(M)
\end{tikzcd}.$$

Alors,

$$\sum_{i\in\{0,1\}} G(e_i) \circ \eta_{M_i} \circ F(p_i) = \sum_{i\in\{0,1\}} \eta_M \circ F(e_i) \circ F(p_i) = \eta_M \circ \underbrace{\left(\sum_{i\in\{0,1\}} F(e_i) \circ F(p_i) \right)}_{=\mathrm{id}_{F(M)}} = \eta_M$$

.

□

Théorème 4.5.5. *Soit $F\colon \mathbf{C}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{C}(B,\mathrm{N})$ un DG foncteur, et $\phi\colon M_0 \to M_1$ un morphisme dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$. On défini l'isomorphisme*

$$\mathrm{cone}(F,\phi)\colon F(\mathrm{Cone}_{A,\mathrm{M}}(\phi)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Cone}_{B,\mathrm{N}}(F(\phi))$$

dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$ comme étant

$$\mathrm{cone}(F,\phi)\colon (\mathrm{id}_{F(M_1)}, \tau_{F,M_0}).$$

Alors

(1) L'isomorphisme $\mathrm{cone}(F,\phi)$ commute avec les différentielles, donc c'est un isomorphisme de $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$.

(2) Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
F(M_0) \arrow[r, "F(\phi)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & F(M_1) \arrow[r, "F(e_\phi)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & F(\mathrm{Cone}_{A,\mathrm{M}}(\phi)) \arrow[r, "F(p_\phi)"] \arrow[d, "{\mathrm{cone}(F,\phi)}"'] & F(\mathrm{T}_{A,\mathrm{M}}(M_0)) \arrow[d, "\tau_{F,M_0}"'] \\
F(M_0) \arrow[r, "F(\phi)"'] & F(M_1) \arrow[r, "e_{F(\phi)}"'] & \mathrm{Cone}_{B,\mathrm{N}}(F(\phi)) \arrow[r, "p_{F(\phi)}"'] & \mathrm{T}_{B,\mathrm{N}}(F(M_0))
\end{tikzcd}$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(B,\mathrm{N})$ est commutatif.

La phrase résumant ce théorème est "Un foncteur DG envoie des triangles standard vers des triangles standards".

Preuve. [8, Theorem 4.5.5]

□

Une conséquence immédiate de ce théorème est la suivante.

Corollaire 4.5.6. *Sous les conditions du théorème précédant, le diagramme,*

$$\begin{tikzcd} F(M_0) \arrow[r, "F(\phi)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & F(M_1) \arrow[r, "F(e_\phi)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & F(\mathrm{Cone}_{A,\mathrm{M}}(\phi)) \arrow[r, "\tau_{F,M_0} \circ F(p_\phi)"] \arrow[d, "\mathrm{cone}(F,\phi)"'] & \mathrm{T}_{B,\mathrm{N}}(F(M_0)) \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\ F(M_0) \arrow[r, "F(\phi)"'] & F(M_1) \arrow[r, "e_{F(\phi)}"'] & \mathrm{Cone}_{B,\mathrm{N}}(F(\phi)) \arrow[r, "p_{F(\phi)}"'] & \mathrm{T}_{B,\mathrm{N}}(F(M_0)) \end{tikzcd}$$

est un isomorphisme de triangles dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(B, \mathrm{N})$

4.6. **Exemples de DG Foncteurs.**

Exemple 4.6.1. Ici $A = B = \mathbb{K}$, donc $\mathbf{C}(A, \mathrm{M}) = \mathbf{C}(\mathrm{M})$ et $\mathbf{C}(B, \mathrm{N}) = \mathbf{C}(\mathrm{N})$. Soit $F \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ un foncteur $\mathbb{K}$-linéaire. Il se prolonge en un foncteur $\mathbf{C}(F) \colon \mathbf{C}(\mathrm{M}) \to \mathbf{C}(\mathrm{N})$ comme suit : sur les objets, un complexe

$$M = (\{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}, \{\mathrm{d}^i_M\}_{i\in\mathbb{Z}}) \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$$

va au complexe

$$\mathbf{C}(F)(M) := (\{F(M^i)\}_{i\in\mathbb{Z}}, \{F(\mathrm{d}^i_M)\}_{i\in\mathbb{Z}}) \in \mathbf{C}(\mathrm{N}).$$

Un morphisme $\phi = (\{\phi^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ va au morphisme $\mathbf{C}(F)(M) := (\{F(\phi^i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ dans $\mathbf{C}(\mathrm{N})$. On peut montrer que $\mathbf{C}(F)$ est un foncteur gradué.

Étant donné un complexe $M \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$, soit $N := \mathbf{C}(F)(M) \in \mathbf{C}(\mathrm{N})$. Alors la translation de N est $\mathrm{T}_{\mathrm{N}}(N) = \mathbf{C}(F)(\mathrm{T}_{\mathrm{M}}(M))$; et le petit opérateur t de N est $\mathrm{t}_N = \mathbf{C}(F)(\mathrm{t}_M)$. Donc l'isomorphe de translation

$$\tau_{\mathbf{C}(F)} \colon \mathbf{C}(F) \circ \mathrm{T}_{\mathrm{M}} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{T}_{\mathrm{N}} \circ \mathbf{C}(F)$$

de foncteurs $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M}) \to \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{N})$ est l'automorphisme identité de ce foncteur.

Soit $\phi \colon M_0 \to M_1$ un morphisme dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$, dont l'image par $\mathbf{C}(F)$ est le morphisme $\psi \colon N_0 \to N_1$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{N})$. Alors

$$\mathrm{Cone}(\psi) = N_1 \oplus \mathrm{T}_{\mathrm{N}}(N_0) = \mathbf{C}(F)(\mathrm{Cone}(\phi))$$

en tant qu'objets gradués de N, avec différentielle

$$\mathrm{d}_{\mathrm{Cone}(\psi)} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}_{N_1} & \psi \circ \mathrm{t}^{-1}_{N_0} \\ 0 & \mathrm{d}_{\mathrm{T}(N_0)} \end{bmatrix} = \mathbf{C}(F)(\begin{bmatrix} \mathrm{d}_{M_1} & \phi \circ \mathrm{t}^{-1}_{M_0} \\ 0 & \mathrm{d}_{\mathrm{T}(M_0)} \end{bmatrix}) = \mathbf{C}(F)(\mathrm{d}_{\mathrm{Cone}(\phi)}).$$

On voit que l'isomorphisme de cône $\mathrm{cone}(F, \phi)$ est l'automorphisme identité du DG module $\mathrm{Cone}(\psi)$. La jauge $\gamma_{\mathbf{C}(F)}$ du foncteur gradué $\mathbf{C}(F)$ est nulle, donc c'est un DG foncteur.

Exemple 4.6.2. Soient A et B des DG anneaux, et fixons $N \in \mathrm{DGMod}\, B \otimes A^{\mathrm{op}} = \mathbf{C}(B \otimes A^{\mathrm{op}})$. En d'autres termes, N est un DG B-A-bimodule. Pour tout $M \in \mathbf{C}(A)$ on a un DG $\mathbb{K}$-module $F(M) := N \otimes_A M$. La différentielle de $F(M)$ est

$$\mathrm{d}_{F(M)} = \mathrm{d}_N \otimes \mathrm{id}_M + \mathrm{id}_N \otimes \mathrm{d}_M\,. \tag{4.6.3}$$

Mais $F(M)$ admet une structure de DG B-module : pour tout $b \in B$, $n \in N$ et $m \in M$, l'action est $b \cdot (n \otimes m) := (b \cdot n) \otimes m$. Clairement

$$F \colon \mathbf{C}(A) = \mathrm{DGMod}\, A \to \mathbf{C}(B) = \mathrm{DGMod}\, B$$

est un foncteur linéaire. On va montrer que c'est en fait un foncteur DG.

Soient $M_0, M_1 \in \mathbf{C}(A)$, on considère l'homomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire

$$F \colon\ \mathrm{Hom}_A(M_0, M_1) \to \mathrm{Hom}_B(N \otimes_A M_0, N \otimes_A M_1).$$

Soit $\phi \in \mathrm{Hom}_A(M_0, M_1)^i$. Alors, $F(\phi) \in \mathrm{Hom}_B(N \otimes_A M_0, N \otimes_A M_1)$, est le morphisme que au tenseur homogène $n \otimes M \in (N \otimes_A M_0)^{k+j}$, avec $n \in N^k$ et $m \in M_0^j$, a comme valeur

$$F(\phi)(n \otimes m) = (-1)^{i\cdot k} \cdot n \otimes \phi(m) \in (N \otimes_A M_1)^{k+j+i}.$$

En d'autres termes, $F(\phi) = \mathrm{id}_N \otimes \phi$. On voit que l'homomorphisme $F(\phi)$ est de degré i. Donc F est un foncteur gradué.

Calculons la jauge de F. On a d'après ce qui précède, $\gamma_{F,M} = \mathrm{d}_N \otimes \mathrm{id}_M$, qui est souvent un endomorphisme non nul de $F(M)$. Prenons un morphisme de degré i, $\phi \colon M_0 \to M_1$ dans $\mathbf{C}(A)$. Alors

$$\gamma_{M_1} \circ F(\phi) = (\mathrm{d}_N \otimes \mathrm{id}_{M_1}) \circ (\mathrm{id}_N \otimes \phi) = \mathrm{d}_N \otimes \phi = (-1)^i \cdot (\mathrm{id}_N \otimes \phi) \circ (\mathrm{d}_N \otimes \mathrm{id}_{M_0}) = (-1)^i \cdot F(\phi) \circ \gamma_{M_0}.$$

Donc la jauge de F est un morphisme de degré 1, et donc F est un DG foncteur.

Enfin, déterminons quel est l'isomorphisme de translation τ_F. Soit $M \in \mathbf{C}(A)$. Alors $\tau_{F,M} \colon F(\mathrm{T}_A(M)) \to \mathrm{T}_B(F(M))$ est un isomorphisme dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(B)$. On a $\tau_{F,M} = \mathrm{t}_{F(M)} \circ F(\mathrm{t}_M)^{-1}$. Soit $n \in N^k$ et $m \in M^{j+1}$, de sorte que $n \otimes \mathrm{t}_M(m) \in (N \otimes_A \mathrm{T}_A(M)))^{k+j} = F(\mathrm{T}_A(M))^{k+j}$, un élément de degré $k+j$ de $F(\mathrm{T}_A(M))$. Mais

$$n \otimes \mathrm{t}_M(m) = (-1)^k \cdot (\mathrm{id}_N \otimes \mathrm{t}_M)(n \otimes m) = (-1)^k \cdot F(\mathrm{t}_M)(n \otimes m).$$

Donc

$$\tau_{F,M}(n \otimes \mathrm{t}_M(m)) = (-1)^k \cdot \mathrm{t}_{F(M)}(n \otimes m) \in \mathrm{T}_B(F(M))^{k+j}.$$

Remarquons que lorsque N est concentré en degré 0, on se retrouve dans la situation de l'exemple précédant, où il n'y a pas de signe, et $\tau_{F,M}$ est l'automorphisme identité.

Exemple 4.6.4. Soient A et B des DG anneaux, et fixons $N \in \mathrm{DGMod}\, A \otimes B^{\mathrm{op}} = \mathbf{C}(A \otimes B^{\mathrm{op}})$. Pour tout $M \in \mathbf{C}(A)$ on définit $F(M) := \mathrm{Hom}_A(N, M)$. C'est un DG B-module : pour tout $b \in B^i$ et $\phi \in \mathrm{Hom}_A(N, M)^j$, l'homomorphisme $b \cdot \phi \in \mathrm{Hom}_A(N, M)^{i+j}$ vaut $(b \cdot \phi)(n) := (-1)^{i \cdot (j+k)} \cdot \phi(n \cdot b) \in M^{i+j+k}$ en $n \in N^k$. Comme dans l'exemple précédent,

$$F \colon \mathbf{C}(A) = \mathrm{DGMod}\, A \to \mathbf{C}(B) = \mathrm{DGMod}\, B$$

est un foncteur linéaire.

La valeur de la jauge en $M \in \mathbf{C}(A)$ est $\gamma_{F,M} = \mathrm{Hom}(\mathrm{d}_N, \mathrm{id}_M)$. À savoir pour $\psi \in F(M)^j$ on a $\gamma_{F,M}(\psi) = (-1)^j \cdot \psi \circ \mathrm{d}_N$. On peut vérifier que γ_F est un morphisme de degré 1 de foncteurs gradués. Ainsi, F est un foncteur DG.

La formules pour l'isomorphisme de translation τ_F est comme suit. Soit $M \in \mathbf{C}(A)$. Alors

$$\tau_{F,M} \colon F(\mathrm{T}_A(M)) = \mathrm{Hom}_A(N, \mathrm{T}_A(M)) \to \mathrm{T}_B(F(M)) = \mathrm{T}_B(\mathrm{Hom}_A(N, M))$$

est par définition, $\tau_{F,M} = \mathrm{t}_{F(M)} \circ F(\mathrm{t}_M)^{-1}$. Or, $F(\mathrm{t}_M)^{-1} = \mathrm{Hom}(\mathrm{id}_N, \mathrm{t}_M^{-1})$. Donc pour un $\psi \in F(\mathrm{T}_A(M))^k$, on a $\tau_{F,M}(\psi = \mathrm{t}_{F(M)}(t_M^{-1} \circ \psi) \in \mathrm{T}_B(F(M))^k$.

Voici un denier exemple, cette fois-ci c'est un foncteur contravariant.

Exemple 4.6.5. Soit A un anneau commutatif. Fixons un complexe $N \in \mathbf{C}(A)$. Pour tout $M \in \mathbf{C}(A)$ soit $F(M) := \mathrm{Hom}_A(M, N) \in \mathbf{C}(A)$. Pour tout morphisme de degré i, $\phi colon M_0 \to M_1$ dans $\mathbf{C}(A)$ soit $F(\phi) \colon F(M_1) \to F(M_0)$ le morphisme de degré i, $F(\phi) := \mathrm{Hom}_A(\phi, \mathrm{id}_N)$.

Un calcul direct, montre que

$$F \colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(A)}(M_0, M_1) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(A)}(F(M_1), F(M_0))$$

est un homomorphisme strict de DG $\mathbb{K}$-modules. Il satisfait les conditions pour être un DG foncteur contravariant, $F \colon \mathbf{C}(A) \to \mathbf{C}(A)$. Pour les DG foncteurs contravariants on ne parle pas d'isomorphismes de translation ou de jauges.

Dans ce chapitre, on introduit les catégories triangulées et les foncteurs triangulés. Nous prouvons que pour un DG anneau A et une catégorie abélienne M, la catégorie d'homotopie $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ est triangulée. Nous prouvons aussi qu'un DG foncteur $F\colon \mathbf{C}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{C}(B, \mathrm{N})$ induit un foncteur triangulé $F\colon \mathbf{K}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{K}(B, \mathrm{N})$.

5.1. **Catégories Triangulés.**

Définition 5.1.1. Soit K une catégorie additive. Un *foncteur de translation* sur K est un automorphisme additif T de K. La paire (K, T) est appelée une *catégorie* T*-additive*.

Définition 5.1.2. Supposons que $(\mathrm{K}, \mathrm{T_K})$ et $(\mathrm{L}, \mathrm{T_L})$ sont des catégories T-additives. Un *foncteur* T*-additif* entre elles est un couple (F, τ), constitué d'un foncteur additif $F\colon \mathrm{K} \to \mathrm{L}$, et un isomorphisme

$$\tau\colon F \circ \mathrm{T_K} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{T_L} \circ F$$

de foncteurs $\mathrm{K} \to \mathrm{L}$, appelé *isomorphisme de translation*.

Définition 5.1.3. Soient $(\mathrm{K}_i, \mathrm{T}_i)$ des catégories T-additives, pour $i = 0, 1, 2$, et soient

$$(F_i, \tau_i)\colon (\mathrm{K}_{i-1}, \mathrm{T}_{i-1}) \to (\mathrm{K}_i, \mathrm{T}_i)$$

des foncteurs T-additifs. La composition

$$(F, \tau) = (F_2, \tau_2) \circ (F_1, \tau_1)$$

est le foncteur T-additif $(\mathrm{K}_0, \mathrm{T}_0) \to (\mathrm{K}_2, \mathrm{T}_2)$, défini comme suit : le foncteur est $F\colon F_2 \circ F_1$, et l'isomorphisme de translation $\tau\colon F \circ \mathrm{T}_0 \xrightarrow{\simeq} \mathrm{T}_2 \circ F$ est $\tau := \tau_2 \circ F_2(\tau_1)$.

Définition 5.1.4. Supposons que $(\mathrm{K}, \mathrm{T_K})$ et $(\mathrm{L}, \mathrm{T_L})$ sont des catégories T-additives, et

$$(F, \tau), (G, \nu)\colon (\mathrm{K}, \mathrm{T_K}) \to (\mathrm{L}, \mathrm{T_L})$$

sont des foncteurs T-additifs. Un *morphisme de foncteurs* T*-additifs*

$$\eta\colon (F, \tau) \to (G, \nu)$$

est un morphisme de foncteurs $\eta\colon F \to G$, tel que pour tout objet $M \in \mathrm{K}$, le diagramme suivant dans L, soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(\mathrm{T_K}(M)) \arrow[r, "\tau_M"] \arrow[d, "\eta_{\mathrm{T_K}(M)}"'] & \mathrm{T_L}(F(M)) \arrow[d, "\mathrm{T_L}(\eta_M)"] \\
G(\mathrm{T_K}(M)) \arrow[r, "\nu_M"'] & \mathrm{T_L}(G(M))
\end{tikzcd}$$

Définition 5.1.5. Soit $(\mathrm{K}, \mathrm{T_K})$ une catégorie T-additive. Un *triangle* dans $(\mathrm{K}, \mathrm{T_K})$, est un diagramme

$$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$$

dans K.

Parfois, lorsque les noms des morphismes dans le triangle ci-dessus ne sont pas importants, nous pouvons utiliser la notation plus compacte

$$L \to M \to N \xrightarrow{\triangle} . \tag{5.1.6}$$

Définition 5.1.7. Soit $(\mathrm{K}, \mathrm{T_K})$ une catégorie T-additive. On suppose que

$$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$$

et

$$L' \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} N' \xrightarrow{\gamma'} \mathrm{T}(L')$$

sont des triangles dans $(\mathrm{K}, \mathrm{T_K})$. Un *morphisme de triangles* entre eux, est un diagramme commutatif dans K

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"] & N \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\chi"] & \mathrm{T}(L) \arrow[d, "\mathrm{T}(\phi)"] \\
L' \arrow[r, "\alpha'"] & M' \arrow[r, "\beta'"] & N' \arrow[r, "\gamma'"] & \mathrm{T}(L')
\end{tikzcd} .$$

Un morphisme de triangles (ϕ, ψ, χ) est appelé un isomorphisme si ϕ, ψ et χ sont tous des isomorphismes.

Remarque. Des fois on écrit le triangle

$$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$$

comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, "\gamma"'] & \\ L \arrow[rr, "\alpha"] & & M \arrow[ul, "\beta"'] \end{tikzcd} .$$

Définition 5.1.8. Une *catégorie triangulée* est une catégorie T-additive $(\mathrm{K}, \mathrm{T}_\mathrm{K})$, munie d'un ensemble de triangles appelés *triangles distingués.* Les axiomes suivants doivent être satisfaits :

(TR1) (a) Tout triangle isomorphe à un triangle distingué est aussi un triangle distingué.

(b) Pour tout morphisme $\alpha\colon L \to M$ dans K, on a un triangle distingué

$$L \xrightarrow{\alpha} M \to N \to \mathrm{T}(L).$$

(c) Pour tout objet M, le triangle

$$M \xrightarrow{\mathrm{id}_M} M \to 0 \to \mathrm{T}(M)$$

est distingué.

(TR2) Un triangle

$$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$$

est distingué si et seulement si le triangle

$$M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L) \xrightarrow{-\mathrm{T}(\alpha)} \mathrm{T}(M)$$

est distingué.

(TR3) Supposons que

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"] & N \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{T}(L) \\ L' \arrow[r, "\alpha'"] & M' \arrow[r, "\beta'"] & N' \arrow[r, "\gamma'"] & \mathrm{T}(L') \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif dans K dans lequel les lignes sont des triangles distingués. Alors il existe un morphisme $\chi\colon N \to N'$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"] & N \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\chi"] & \mathrm{T}(L) \arrow[d, "\mathrm{T}(\phi)"] \\ L' \arrow[r, "\alpha'"] & M' \arrow[r, "\beta'"] & N' \arrow[r, "\gamma'"] & \mathrm{T}(L') \end{tikzcd}$$

soit un morphisme de triangles.

(TR4) (Axiome de l'octaèdre) : Supposons qu'on nous donne ces trois triangles distingués :

$$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\gamma} P \to \mathrm{T}(L),$$

$$M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\epsilon} R \to \mathrm{T}(M),$$

$$L \xrightarrow{\beta\circ\alpha} N \xrightarrow{\delta} Q \to \mathrm{T}(L).$$

Alors il existe un triangle distingué

$$P \xrightarrow{\phi} Q \xrightarrow{\psi} R \xrightarrow{\rho} \mathrm{T}(P)$$

qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & M \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\beta"'] & P \arrow[r] \arrow[d, "\phi"'] & \mathrm{T}(L) \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
L \arrow[r, "\beta\circ\alpha"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & \mathrm{T}(L) \arrow[d, "\mathrm{T}(\alpha)"'] \\
M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\gamma"'] & N \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\delta"'] & R \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{T}(M) \arrow[d, "\mathrm{T}(\gamma)"'] \\
P \arrow[r, "\phi"] & Q \arrow[r, "\psi"] & R \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{T}(P)
\end{tikzcd}$$

Remarque. L'objet N du point (b) de l'axiome (TR1) est appelé *cône* du morphisme α. L'axiome (TR3) garantit une sorte de fonctorialité faible du cône. L'axiome (TR2) dit que si on "tourne" un triangle distingué on reste un triangle distingué.

Remarque. L'axiome (TR4) est censé remplacer l'isomorphisme

$$(N/L)/(M/L) \cong N/M$$

pour les objets $L \subseteq M \subseteq N$ dans une catégorie abélienne M. Voir [1, Section IV.2.9]

5.2. **Foncteurs Triangulés et Cohomologiques.**

Supposons que $(\mathrm{K}, \mathrm{T}_{\mathrm{K}})$ et $(\mathrm{L}, \mathrm{T}_{\mathrm{L}})$ sont des catégories T-additives.

Définition 5.2.1. (1) Un *foncteur triangulé* de K vers L est un foncteur T-additif $(F, \tau)\colon \mathrm{K} \to \mathrm{L}$ qui satisfait cette condition : pour tout triangle distingué

$$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}_{\mathrm{K}}(L)$$

dans K, le triangle

$$F(L) \xrightarrow{F(\alpha)} F(M) \xrightarrow{F(\beta)} F(N) \xrightarrow{\tau_{\mathrm{L}}\circ F(\gamma)} \mathrm{T}_{\mathrm{L}}(F(L))$$

est un triangle distingué dans L.

(2) Soit $(G, \nu)\colon \mathrm{K} \to \mathrm{L}$ un autre foncteur triangulé. Un *morphisme de foncteurs triangulés* $\eta\colon (F, \tau) \to (G, \nu)$ est un morphisme de foncteurs T-additifs.

Parfois, on laisse l'isomorphisme de translation τ implicite et on parle de F comme un foncteur triangulé.

Définition 5.2.2. Soit K une catégorie triangulé. Une *sous-catégorie triangulée pleine* de K est une sous-catégorie $\mathrm{L} \subseteq \mathrm{K}$ satisfaisant les conditions :

(1) L est une sous-catégorie additive pleine.
(2) L est fermé par translations, i.e. $L \in \mathrm{L}$ si et seulement si $\mathrm{T}(L) \in \mathrm{L}$.
(3) L est fermé sous triangles distingués, c'est-à-dire si $L' \to L \to L'' \xrightarrow{\Delta}$ est un triangle distingué dans K tel que $L', L \in \mathrm{L}$, alors $L'' \in \mathrm{L}$ aussi.

Observons que L est elle-même triangulée, et que l'inclusion $\mathrm{L} \to \mathrm{K}$ est un foncteur triangulé.

Proposition 5.2.3. *Soient* $(\mathrm{K}_i, \mathrm{T}_i)$ *des catégories triangulées, pour* $i = 0, 1, 2$, *et soient* $(F_i, \tau_i)\colon (\mathrm{K}_{i-1}, \mathrm{T}_{i-1}) \to (\mathrm{K}_i, \mathrm{T}_i)$ *des foncteurs triangulés. On défini le foncteur le foncteur* T*-additif* $(F, \tau) := (F_2, \tau_2) \circ (F_1, \tau_1)$*. Alors,* $(F, \tau)\colon (\mathrm{K}_0, \mathrm{T}_0) \to (\mathrm{K}_2, \mathrm{T}_2)$ *est un foncteur triangulé.*

Preuve. Il suffit de montrer qu'il envoi des triangles distingués vers des triangles distingués. Ceci découle directement des définitions.

□

Définition 5.2.4. Soit K une catégorie triangulé, et M une catégorie abélienne.

(1) Un *foncteur cohomologique* $F\colon \mathrm{K} \to \mathrm{M}$ est un foncteur additif, tel que pour tout triangle distingué

$$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$$

dans K, la suite

$$F(L) \xrightarrow{F(\alpha)} F(M) \xrightarrow{F(\beta)} F(N)$$

est exacte dans M.

(2) Un *foncteur contravariant cohomologique* $F\colon \mathrm{K} \to \mathrm{M}$ est un foncteur contravariant additif, tel que pour tout triangle distingué

$$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$$

dans K, la suite

$$F(N) \xrightarrow{F(\beta)} F(M) \xrightarrow{F(\alpha)} F(L)$$

est exacte dans M.

Proposition 5.2.5. *Soit* $F\colon \mathrm{K} \to \mathrm{M}$ *un foncteur cohomologique, et soit*

$$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$$

un triangle distingué dans K*. Alors la suite*

$$\cdots \to F(\mathrm{T}^i(L)) \xrightarrow{F(\mathrm{T}^i(\alpha))} F(\mathrm{T}^i(M)) \xrightarrow{F(\mathrm{T}^i(\beta))} F(\mathrm{T}^i(N)) \xrightarrow{F(\mathrm{T}^i(\gamma))} F(\mathrm{T}^{i+1}(L)) \xrightarrow{F(\mathrm{T}^{i+1}(\alpha))} F(\mathrm{T}^{i+1}(M)) \to \cdots$$

dans M *est exacte,*

Preuve. Par l'axiome ((TR2)), on a les triangles distingués :

$$\mathrm{T}^i(L) \xrightarrow{(-1)^i\cdot \mathrm{T}^i(\alpha)} \mathrm{T}^i(M) \xrightarrow{(-1)^i\cdot \mathrm{T}^i(\beta)} \mathrm{T}^i(N) \xrightarrow{(-1)^i\cdot \mathrm{T}^i(\gamma)} \mathrm{T}^{i+1}(L),$$

$$\mathrm{T}^i(M) \xrightarrow{(-1)^i\cdot \mathrm{T}^i(\beta)} \mathrm{T}^i(N) \xrightarrow{(-1)^i\cdot \mathrm{T}^i(\gamma)} \mathrm{T}^{i+1}(L) \xrightarrow{(-1)^{i+1}\cdot \mathrm{T}^{i+1}(\alpha)} \mathrm{T}^{i+1}(M),$$

$$\mathrm{T}^i(N) \xrightarrow{(-1)^i\cdot \mathrm{T}^i(\gamma)} \mathrm{T}^{i+1}(L) \xrightarrow{(-1)^{i+1}\cdot \mathrm{T}^{i+1}(\alpha)} \mathrm{T}^{i+1}(M) \xrightarrow{(-1)^{i+1}\cdot \mathrm{T}^{i+1}(\beta)} \mathrm{T}^{i+1}(N).$$

On conclut avec la définition d'un foncteur cohomologique, en notant que la multiplication des morphismes dans une suite exacte par -1 préserve l'exactitude.

□

Proposition 5.2.6. *Soit* K *une catégorie triangulé. Pour tout* $P \in \mathrm{K}$*, le foncteur*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(P, -)\colon \mathrm{K} \to \mathrm{Mod}\,\mathbb{K}$$

est un foncteur cohomologique, et le foncteur

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(-, P)\colon \mathrm{K} \to \mathrm{Mod}\,\mathbb{K}$$

est un foncteur cohomologique contravariant.

Preuve. On va démontrer l'énoncé covariant. L'énoncé contravariant est similaire.

Soit $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$ un triangle distingué dans K. On doit montrer que la suite

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(P, L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_P, \alpha)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(P, M) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_P, \beta)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(P, N)$$

dans $\mathrm{Mod}\,\mathbb{K}$ est exacte. D'après la Proposition (5.3.1), il suffit de montrer que pour tout $\psi\colon P \to M$ t.q. $\beta \circ \psi = 0$, il y a un certain $\phi\colon P \to L$ t.q. $\psi = \alpha \circ \phi$. Il faut montrer que le diagramme ci-dessous (flèches pleines)

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, dashed, "\phi"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{T}(P) \arrow[d, dashed, "\mathrm{T}(\phi)"] \\
L \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r, "\beta"] & N \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{T}(L)
\end{tikzcd}$$

peut être complété (flèches pointillées). Ceci découle du fait qu'avec ((TR2)) et ((TR3)) on obtient un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{T}(P) \arrow[r, "-\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{T}(\phi)"] & \mathrm{T}(P) \arrow[d, "\mathrm{T}(\psi)"] \\
M \arrow[r, "\beta"] & N \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{T}(L) \arrow[r, "-\mathrm{T}(\alpha)"] & \mathrm{T}(M)
\end{tikzcd} .$$

Donc, $\mathrm{T}(\psi) = \mathrm{T}(\alpha \circ \phi)$ i.e. $\psi = \alpha \circ \phi$, comme on le souhaitait.

□

5.3. **Quelques Propriétés des Catégories Triangulées.**

Dans cette partie, on va voir quelques résultats généraux sur les catégories triangulées.

Proposition 5.3.1. *Soit* K *une catégorie triangulé. Si* $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$ *un triangle distingué dans* K*, alors* $\beta \circ \alpha = 0$

Preuve. Par (TR1) et (TR3), on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & L \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{T}(L) \arrow[d, "\mathrm{T}(\mathrm{id})"'] \\ L \arrow[r, "\alpha"] & M \arrow[r, "\beta"] & N \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{T}(L) \end{tikzcd}.$$

Donc, $\beta \circ \alpha$ se factorise par 0.

□

Proposition 5.3.2. *Soit* K *une catégorie triangulé, et soit*

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\phi"] & M \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\psi"] & N \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\chi"] & \mathrm{T}(L) \arrow[d, "\mathrm{T}(\phi)"] \\ L' \arrow[r, "\alpha'"] & M' \arrow[r, "\beta'"] & N' \arrow[r, "\gamma'"] & \mathrm{T}(L') \end{tikzcd}$$

un morphisme de triangles distingués. Si ϕ *et* ψ *sont des isomorphismes, alors* χ *est aussi un isomorphisme.*

Preuve. Soit $P \in \mathbb{K}$, et soit $F \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(P, -)$. Alors on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} F(L) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d, "F(\phi)"] & F(M) \arrow[r, "F(\beta)"] \arrow[d, "F(\psi)"] & F(N) \arrow[r, "F(\gamma)"] \arrow[d, "F(\chi)"] & F(\mathrm{T}(L)) \arrow[r, "F(\mathrm{T}(\alpha))"] \arrow[d, "F(\mathrm{T}(\phi))"] & F(\mathrm{T}(M)) \arrow[d, "F(\mathrm{T}(\psi))"] \\ F(L') \arrow[r, "F(\alpha')"] & F(M') \arrow[r, "F(\beta')"] & F(N') \arrow[r, "F(\gamma')"] & F(\mathrm{T}(L')) \arrow[r, "F(\mathrm{T}(\alpha'))"] & F(\mathrm{T}(M')) \end{tikzcd}$$

dans Mod $\mathbb{K}$. On sait que les lignes sont exactes, et alors par le lemme des cinq, on a que

$$F(\chi)\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(P, N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(P, N')$$

est un isomorphisme de groupes abéliens. En oubliant la structure, on voit que $F(\chi)$ est un isomorphisme d'ensembles.

On considère le foncteur de Yoneda, $\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}\colon \mathrm{K} \to \mathrm{Fun}(\mathrm{K}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$. Il existe un morphisme $\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}(\chi)\colon \mathrm{Y}_{\mathrm{K}}(N) \to \mathrm{Y}_{\mathrm{K}}(N')$ dans $\mathrm{Fun}(\mathrm{K}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$. Pour tout objet $P \in \mathrm{K}$, soit $F \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(P, -)$ comme ci-dessus, on a $\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}(N)(P) = F(N)$ et $\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}(N')(P) = F(N')$. Le calcul ci-dessus montre que

$$F(\chi) = \mathrm{Y}_{\mathrm{K}}(\chi)(P)\colon \mathrm{Y}_{\mathrm{K}}(N)(P) \to \mathrm{Y}_{\mathrm{K}}(N')(P)$$

est un isomorphisme dans Set. Donc $\mathrm{Y}_{\mathrm{K}}(\chi)$ est un isomorphisme de $\mathrm{Fun}(\mathrm{K}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Set})$. D'après le lemme de Yoneda, le morphisme $\chi\colon N \to N'$ dans K est un isomorphisme.

□

Corollaire 5.3.3. *Supposons que* $F, G\colon \mathrm{K} \to \mathrm{L}$ *soient des foncteurs triangulés entre catégories triangulées, et* $\eta\colon F \to G$ *soit un morphisme de foncteurs triangulés. Soit* $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$ *un triangle distingué dans* K. *Si* η_L *et* η_M *sont des isomorphismes, alors* η_N *est un isomorphisme*

Preuve. Il suffit de regarder le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} F(L) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d, "\eta_L"] & F(M) \arrow[r, "F(\beta)"] \arrow[d, "\eta_M"] & F(N) \arrow[r, "\tau_{F,L} \circ F(\gamma)"] \arrow[d, "\eta_N"] & \mathrm{T}_{\mathrm{L}}(F(L)) \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathrm{L}}(\eta_L)"] \\ G(L) \arrow[r, "G(\alpha)"] & G(M) \arrow[r, "G(\beta)"] & G(\beta) \arrow[r, "\tau_{G,L} \circ G(\gamma)"] & \mathrm{T}_{\mathrm{L}}(G(L)) \end{tikzcd}.$$

□

Corollaire 5.3.4. *Soit* K *une catégorie triangulé, et soit* $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$ *un triangle distingué. Les deux conditions ci-dessous sont équivalentes.*

(1) $\alpha\colon L \to M$ *est un isomorphisme.*

(2) $N \cong 0$.

Preuve. Il suffit de regarder le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & L \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & 0 \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d] & {} \\ L \arrow[r, "\alpha"'] & M \arrow[r] & N \arrow[r, "\Delta"'] & {} \end{tikzcd}.$$

□

Définition 5.3.5. Soit K une catégorie triangulée, et soit $\alpha\colon L \to M$ un morphisme dans K. D'après l'axiome (TR1)(b) il existe un triangle distingué

$$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$$

dans K. L'objet N est appelé un *cône de* α, et le triangle distingué est appelé un *triangle distingué construit sur* α.

Corollaire 5.3.6. *Dans la situation de la définition précédente, l'objet* N *et le triangle distingué sont uniques à isomorphisme près.*

Preuve. Si $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta'} N' \xrightarrow{\gamma'} \mathrm{T}(L)$ est un autre triangle distingué construit sur α, alors la Proposition (5.3.2) donne directement qu'ils sont isomorphes.

□

Remarque. En général l'isomorphisme dans le corollaire de ci-dessus $N \to N'$ n'est pas unique, et donc le cône de α n'est pas fonctoriel dans le morphisme α.

Proposition 5.3.7. *Soit* K *une catégorie triangulé, et soit* $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$ *un triangle distingué. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) Le morphisme γ *est nul.*

(2) Il existe un morphisme $\tau\colon M \to L$ *tel que* $\tau \circ \alpha = \mathrm{id}_L$.

Preuve. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii) :* On sait que le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(-, L)$ est cohomologique. Alors avec la Proposition (5.2.5) on trouve

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(M, L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\alpha, \mathrm{id}_L)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(L, L) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\mathrm{T}^{-1}(\gamma), \mathrm{id}_L)} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(\mathrm{T}^{-1}(N, L).$$

Puisque $\mathrm{Hom}(\mathrm{T}^{-1}(\gamma), \mathrm{id}_L)$ est nul, alors il existe un morphisme $\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(M, L)$ tel que $\mathrm{id}_L = \mathrm{Hom}(\alpha, \mathrm{id}_L)(\tau) = \tau \circ \alpha$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i) :* Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(N, N) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \gamma)"'] & \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(N, \mathrm{T}(L)) \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \mathrm{T}(\alpha))"'] \arrow[dr, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \mathrm{id})"] & \\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(N, \mathrm{T}(M)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \mathrm{T}(\tau))"'] & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(N, \mathrm{T}(L)) \end{tikzcd}$$

dans Mod $\mathbb{K}$. Comme l'homomorphisme $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \mathrm{id})$ est bijectif, il s'ensuit que $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}, \mathrm{T}(\alpha))$ est injectif. Mais la colonne est une suite exacte, et donc $\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_N, \gamma) = 0$. On en déduit que $\gamma = \mathrm{Hom}(\mathrm{id}_N, \gamma)(\mathrm{id}_N) = 0$.

□

Lemme 5.3.8. *Soient* M, M' *des objets dans une catégorie triangulé* K. *Considérons les morphismes canoniques*

$$M \xrightarrow{e} M \oplus M' \xrightarrow{p} M \ \text{et} \ M' \xrightarrow{e'} M \oplus M' \xrightarrow{p'} M'.$$

Alors

$$M \xrightarrow{e} M \oplus M' \xrightarrow{p'} \xrightarrow{0} \mathrm{T}(M)$$

est un triangle distingué dans K.

Preuve. [8, Lemma 5.3.11]

□

Définition 5.3.9. Soit K une catégorie linéaire, et soient $M, N \in \mathrm{K}$.

(1) L'objet M est appelé un *rétracté* de N s'il existe des morphismes $M \xrightarrow{e} N \xrightarrow{p} M$ tels que $p \circ e = \mathrm{id}_M$. Le morphisme $e\colon M \to N$ est appelé un plongement.

(2) L'objet M est appelé *facteur direct* de N s'il existe un objet $M' \in \mathrm{K}$ et un isomorphisme $M \oplus M' \cong N$. Le morphisme correspondant $e\colon M \to N$ est appelé un plongement.

Notons que dans les deux situations ci-dessus le plongement $e\colon M \to N$ est un monomorphisme dans K.

Théorème 5.3.10. *Soit* K *une catégorie triangulée, et soit* $e\colon M \to N$ *un morphisme dans* K*. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Il existe un morphisme $e'\colon M' \to N$ *dans* K *tel que*

$$(e, e')\colon M \oplus M' \to N$$

soit un isomorphisme. En d'autre termes, M *est un facteur direct de* N*, avec plongement* $e\colon M \to N$*.*

(2) Il existe un morphisme $p\colon N \to M$ *dans* K *tel que* $p \circ e = \mathrm{id}_M$*. En d'autres termes,* M *est appelé un rétracté de* N *avec plongement* $e\colon M \to N$*.*

Preuve. *(i)* $\Rightarrow$ *(ii) :* On a déjà vu que c'est vrai dans des catégories seulement linéaires.

(ii) $\Rightarrow$ *(i) :* Soit $M \xrightarrow{e} N \xrightarrow{\beta} M' \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(M)$ le triangle distingué construit sur e. Alors on sait que $\gamma = 0$ d'après la Proposition (5.3.7). De plus, par le lemme précédent, $M \xrightarrow{\epsilon} M \oplus M' \xrightarrow{\pi'} \xrightarrow{0} \mathrm{T}(M)$ est également un triangle distingué. Alors avec (TR2) et (TR3) on obtient un morphisme θ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}^{-1}(M') \arrow[r, "0"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M \arrow[r, "\epsilon"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & M \oplus M' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, dashed, "\theta"] & M' \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
\mathrm{T}^{-1}(M') \arrow[r, "0"] & M \arrow[r, "e"] & N \arrow[r, "\beta"] & M'
\end{tikzcd}.$$

Alors, θ est un isomorphisme. Finalement, on pose $e' := \theta \circ \epsilon'$ où $\epsilon'\colon M' \to M \oplus M'$ est le plongement.

□

Définition 5.3.11. Soit K une catégorie triangulée. Une *sous-catégorie pleine triangulée saturée* de K est une sous-catégorie pleine triangulée $\mathrm{K}' \subseteq \mathrm{K}$ qui est fermée dans K sous isomorphismes et sous prendre un facteur direct d'une somme.

Définition 5.3.12. Soit K une catégorie triangulée et soit $Z \subseteq \mathrm{Ob}(\mathrm{K})$ un ensemble d'objets. La *sous-catégorie pleine triangulée saturée de* K *engendrée par* Z est la plus petite sous-catégorie pleine triangulée saturée $\mathrm{K}' \subseteq \mathrm{K}$ telle que $Z \subseteq \mathrm{Ob}(K')$.

Proposition 5.3.13. *Soit* K *une catégorie triangulée, soit soit* $Z \subseteq \mathrm{Ob}(\mathrm{K})$ *un ensemble d'objets, et soit* $\mathrm{K}' \subseteq \mathrm{K}$ *la sous-catégorie pleine triangulée saturée de* K *engendrée par* Z*. Un objet* $M \in \mathrm{K}$ *appartient à* K' *si et seulement s'il existe une suite* $M_0, \dots, M_r$ *d'objets de* K*, tels que* $M_r = M$*, et pour tout* $i \leqslant r$ *au moins une des conditions suivantes est vérifiée :*

(1) $M_i \in Z$*.*

(2) Il existe un isomorphisme $M_i \cong \mathrm{T}^p(M_j)$ *dans* K *pour un certain* $j < i$ *et* $p \in \mathbb{Z}$*.*

(3) Il existe un triangle distingué $M_j \to M_k \to M_i \xrightarrow{\Delta}$ *dans* K *pour des* $j, k < i$*.*

(4) Mi est un facteur direct de M_j *dans* K *pour un* $j < i$*.*

Preuve. La partie "si" est claire. L'inverse est une simple vérification du fait que les conditions définissent une sous-catégorie pleine triangulée saturée contenant Z, et c'est donc K' par minimalité.

□

Proposition 5.3.14. *Soient* K *et* L *des catégories triangulées, soient* $F, G\colon \mathrm{K} \to \mathrm{L}$ *des foncteurs triangulés, et soit* $\zeta\colon F \to G$ *un morphisme de foncteurs triangulés. Soit* K' *la sous-catégorie pleine de* K *sur les objets* M *telle que* $\zeta_M\colon F(M) \to G(M)$ *est un isomorphisme dans* L*. Alors* K' *est une sous-catégorie triangulée pleine saturée de* K*.*

Preuve. C'est une simple vérification des conditions nécessaires. On rappelle seulement la Proposition (2.5.4).

□

Corollaire 5.3.15. *Soient* K *et* L *des catégories triangulées, soit* $F\colon \mathrm{K} \to \mathrm{L}$ *un foncteur triangulé, et soit* K' *le noyau de* F*, i.e.* $\mathrm{K}' \subseteq \mathrm{K}$ *est la sous-catégorie pleine sur les objets* $M \in \mathrm{K}$ *telle que* $F(M) = 0$*. Alors* K' *est une sous-catégorie triangulée pleine saturée de* K*.*

Preuve. On applique la proposition précédente avec $G = 0$.

□

5.4. **La Catégorie d'Homotopie est Triangulée.**

La catégorie stricte $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ et la catégorie d'homotopie $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ ont déjà été introduites. Elles ont les mêmes objets que $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$. Les $\mathbb{K}$-modules des morphismes sont

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})}(M_0, M_1) = \mathrm{Z}^0(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(A,\mathrm{M})}(M_0, M_1))$$

et

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(M_0, M_1) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(A,\mathrm{M})}(M_0, M_1)).$$

On a une foncteur additif plein $\mathrm{P}\colon \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ qui est l'identité sur les objets, et sur les morphismes il envoie un homomorphisme à sa classe d'homotopie. Les morphismes dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ seront souvent notés, comme $\bar{\phi}$.

Considérons le foncteur de translation T. Comme T est un DG foncteur de $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ vers elle-même, il se restreint à un foncteur linéaire de $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ vers elle-même, et il induit un foncteur linéaire $\bar{\mathrm{T}}$ de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ vers elle-même, tel que $\mathrm{P} \circ \mathrm{T} = \bar{\mathrm{T}} \circ \mathrm{P}$.

Proposition 5.4.1. *(1) La catégorie $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, munie du foncteur de translation T, est une catégorie T-additive.*

(2) La catégorie $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$, munie du foncteur de translation $\bar{\mathrm{T}}$, est une catégorie T-additive.

(3) Soit $\tau\colon\ \mathrm{P} \circ \mathrm{T} \xrightarrow{\simeq} \bar{\mathrm{T}} \circ \mathrm{P}$ l'automorphisme identité. Alors la paire

$$(\mathrm{P}, \tau)\colon \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$$

est un foncteur T-additif.

Preuve. [8, Proposition 5.4.1].

□

On note désormais T, au lieu de $\bar{\mathrm{T}}$, le foncteur translation de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$.

Définition 5.4.2. Un triangle

$$L \xrightarrow{\bar{\alpha}} M \xrightarrow{\bar{\beta}} N \xrightarrow{\bar{\gamma}} \mathrm{T}(L)$$

dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ est dit *triangle distingué* s'il existe un triangle standard

$$L' \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} N' \xrightarrow{\gamma'} \mathrm{T}(L')$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, et un isomorphisme de triangles dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$

$$\begin{tikzcd}
L' \arrow[r, "\mathrm{P}(\alpha')"] \arrow[d, "\bar{\phi}"'] & M' \arrow[r, "\mathrm{P}(\beta')"] \arrow[d, "\bar{\psi}"'] & N' \arrow[r, "\mathrm{P}(\gamma')"] \arrow[d, "\bar{\chi}"'] & \mathrm{T}(L') \arrow[d, "\mathrm{T}(\bar{\phi})"'] \\
L \arrow[r, "\bar{\alpha}"'] & M \arrow[r, "\bar{\beta}"'] & N \arrow[r, "\bar{\gamma}"'] & \mathrm{T}(L)
\end{tikzcd} .$$

Théorème 5.4.3. *La catégorie T-additive $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$, avec l'ensemble des triangles distingués définis ci-dessus, est une catégorie triangulée.*

Pour la preuve est on aura besoin de certains lemmes.

Lemme 5.4.4. *Soit $M \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$, et considérons le cône standard $N := \mathrm{Cone}(\mathrm{id}_M)$. Alors le DG module N est nul-homotope, c'est-à-dire que $0 \to N$ est un isomorphisme dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$.*

Preuve. On va donner une homotopie θ de 0_N vers id_M. On rappelle que $N := \mathrm{Cone}(\mathrm{id}_M) = M \oplus \mathrm{T}(M) = \begin{bmatrix} M \\ \mathrm{T}(M) \end{bmatrix}$ en tant que modules gradués, avec différentielle sous forme matricielle $\mathrm{d}_N = \begin{bmatrix} \mathrm{d}_M & \mathrm{t}_M^{-1} \\ 0 & \mathrm{d}_{\mathrm{T}(M)} \end{bmatrix}$ où, par définition, $\mathrm{d}_{\mathrm{T}(M)} = -\,\mathrm{t}_M \circ \mathrm{d}_M \circ \mathrm{t}_M^{-1}$. On pose $\theta\colon N \to N$ comme étant le morphisme de degré -1 $\theta := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathrm{t}_M & 0 \end{bmatrix}$. Alors on calcule que

$$\mathrm{d}_N \circ \theta + \theta \circ \mathrm{d}_N = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_M & 0 \\ 0 & \mathrm{id}_{\mathrm{T}(M)} \end{bmatrix} = \mathrm{id}_N .$$

□

Remarque. Voici une généralisation de ce lemme. Considérons un morphisme $\phi\colon M_0 \to M_1$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$. Alors les assertions suivante sont équivalentes :

(1) ϕ est une équivalence d'homotopie.

(2) $\bar{\phi}$ est un isomorphisme dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$.

(3) Le DG module $\mathrm{Cone}(\phi)$ est nul-homotope.

Une fois on aura vu que $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ est une catégorie triangulée, ceci découlera directement du Corollaire (5.3.4).

Lemme 5.4.5. *Considérons un morphisme* $\alpha\colon L \to M$ *dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$*, le triangle standard* $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$ *construit sur* α*, et le triangle standard* $M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\phi} P \xrightarrow{\psi} \mathrm{T}(M)$ *construit sur* β*, dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$*. Donc* $N = \mathrm{Cone}(\alpha)$ *et* $P = \mathrm{Cone}(\beta)$*. Il existe un morphisme* $\rho\colon \mathrm{T}(L) \to P$ *dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ *t.q.* $\bar{\rho}$ *est un isomorphisme dans* $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$*, et le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\bar{\beta}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & N \arrow[r, "\bar{\gamma}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{T}(L) \arrow[r, "-\mathrm{T}(\bar{\alpha})"] \arrow[d, "\bar{\rho}"'] & \mathrm{T}(M) \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\
M \arrow[r, "\bar{\beta}"] & N \arrow[r, "\bar{\phi}"] & P \arrow[r, "\bar{\psi}"] & \mathrm{T}(M)
\end{tikzcd}$$

commute dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$*.*

Preuve. On note que $N = M \oplus \mathrm{T}(L)$ et $P = N \oplus \mathrm{T}(M) = M \oplus \mathrm{T}(L) \oplus \mathrm{T}(M)$ en tant que modules gradués. Ainsi P et d_P ont les écritures matricielles suivantes :

$$P = \begin{bmatrix} M \\ \mathrm{T}(L) \\ \mathrm{T}(M) \end{bmatrix}, \ \mathrm{d}_P = \begin{bmatrix} \mathrm{d}_M & \alpha \circ \mathrm{t}_L^{-1} & \mathrm{t}_M^{-1} \\ 0 & \mathrm{d}_{\mathrm{T}(L)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{d}_{\mathrm{T}(M)} \end{bmatrix}.$$

Définissons les morphismes $\rho\colon \mathrm{T}(L) \to P$ et $\chi\colon P \to \mathrm{T}(L)$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ par

$$\rho \coloneqq \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_{\mathrm{T}(L)} \\ -\mathrm{T}(\alpha) \end{bmatrix}, \ \chi \coloneqq \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{id}_{\mathrm{T}(L)} & 0 \end{bmatrix}.$$

Des calculs directs montrent que $\chi \circ \rho = \mathrm{id}_{\mathrm{T}(L)}$, $\rho \circ \gamma = \rho \circ \chi \circ \phi$ et $\psi \circ \rho = -\mathrm{T}(\alpha)$.

Il reste à prouver que $\rho \circ \chi$ est homotope à id_P. On défini un morphisme de degré -1, $\theta\colon P \to P$ par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{t}_M & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On calcule que $\mathrm{d}_P \circ \theta + \theta \circ \mathrm{d}_P = \mathrm{id}_P - \rho \circ \chi$.

□

Lemme 5.4.6. *Considérons un triangle standard* $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$ *dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$*. Pour tout entier* k*, le triangle*

$$\mathrm{T}^k(L) \xrightarrow{\mathrm{T}^k(\alpha)} \mathrm{T}^k(M) \xrightarrow{\mathrm{T}^k(\beta)} \mathrm{T}^k(N) \xrightarrow{(-1)^k \cdot \mathrm{T}^k(\gamma)} \mathrm{T}^{k+1}(L)$$

est isomorphe, dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$*, à un triangle standard.*

Preuve. C'est un simple application du Corollaire (4.5.6) avec $F = \mathrm{T}$.

□

***Preuve** du Théorème* (5.4.3). [8, Theorem 5.4.3]. On ajoute seulement que dans la démonstration de l'axiome (TR4), on a $\rho\colon R \to \mathrm{T}(P)$ au lieu de $\rho\colon R \to \mathrm{T}(Q)$. De même, dans la même partie, il faut plutôt vérifier que $\chi \circ e_\phi = \psi$ et $O_\phi \circ \omega = \rho$ au lieu de $\omega \circ \psi = e_\phi$ et $\rho \circ \chi = p_\phi$.

□

Une vérification directe donne le résultat suivant.

Lemme 5.4.7. *Soit* $\mathrm{C} \subseteq \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ *une sous-catégorie pleine vérifiant ces trois conditions :*

(1) $\mathrm{C}_{\mathrm{str}}$ *est une sous-catégorie additive pleine de* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$*.*

(2) C *est invariant par translation, i.e.* $M \in \mathrm{C}$ *si et seulement* $\mathrm{T}(M) \in \mathrm{C}$*.*

(3) C *est fermé sous prendre des cônes standards, c'est-à-dire que pour tout morphisme* ϕ *dans* $\mathrm{C}_{\mathrm{str}}$ *l'objet* $\mathrm{Cone}(\phi)$ *appartient à* C*.*

Alors $\mathrm{K} \coloneqq \mathrm{Ho}(\mathrm{C})$ *est une sous-catégorie triangulée pleine de* $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$*.*

Voici une réciproque partielle du corollaire.

Proposition 5.4.8. *Supposons que* $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ *est une sous-catégorie triangulée pleine. Soit* $\mathrm{C} \subseteq \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ *la sous-catégorie pleine sur l'ensemble des objets* $\mathrm{Ob}(\mathrm{K})$*. Alors la DG catégorie* C *satisfait aux conditions du corollaire précédent, et* $\mathrm{K} = \mathrm{Ho}(C)$*.*

Preuve. Du fait que $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ est une sous-catégorie triangulée pleine, le vérifications des conditions du corollaire sont immédiates. On a alors, $\mathrm{Ob}(\mathrm{Ho}(\mathrm{C})) = \mathrm{Ob}(\mathrm{C}) = \mathrm{Ob}(\mathrm{K})$, et pour les morphismes, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ho}(\mathrm{C})}(M, N) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M, N)) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(A,\mathrm{M})}(M, N)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(M, N) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(M, N)$.

□

5.5. **Des DG Foncteurs aux Foncteurs Triangulés.**

Nous ajoutons maintenant un second anneau DG B, et une seconde catégorie abélienne N. Considérons un foncteur DG $F\colon \mathbf{C}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{C}(B,\mathrm{N})$. On sait que l'isomorphisme de translation τ_F est un isomorphisme de DG foncteurs $\tau_F\colon F \circ \mathrm{T}_{A,\mathrm{M}} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{T}_{B,\mathrm{N}} \circ F$. Donc, quand on passe aux catégories d'homotopie, et qu'on écrit $\bar{F} := \mathrm{Ho}(F)$ et $\bar{\tau_F} := \mathrm{Ho}(\tau_F)$, on obtient un foncteur T-additif $(\bar{F}, \bar{\tau_F})\colon \mathbf{K}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{K}(B,\mathrm{N})$.

Si $G\colon \mathbf{C}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{C}(B,\mathrm{N})$ est un autre foncteur DG, alors on a un autre foncteur T-additif $(\bar{G}, \bar{\tau_G})\colon \mathbf{K}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{K}(B,\mathrm{N})$. Et si $\eta\colon F \to G$ est un morphisme strict de foncteurs DG, alors il existe un morphisme de foncteurs additifs $\bar{\eta} := \mathrm{Ho}(\eta)\colon \bar{F} \to \bar{G}$. Cette notation sera utilisée dans le théorème suivant.

Théorème 5.5.1. *Soient A et B des anneaux DG, soit M et N des catégories abéliennes, et soit $F\colon \mathbf{C}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{C}(B,\mathrm{N})$ un DG foncteur.*

(1) Le foncteur T-additif

$$(\bar{F}, \bar{\tau_F})\colon \mathbf{K}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{K}(B,\mathrm{N})$$

est une foncteur triangulé.

(2) Soient $G\colon \mathbf{C}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{C}(B,\mathrm{N})$ est un autre foncteur DG, et $\eta\colon F \to G$ est un morphisme strict de foncteurs DG. Alors

$$\bar{\eta}\colon (\bar{G}, \bar{\tau_G}) \to \overline{(}\bar{G}, \bar{\tau_G})$$

est un morphisme de foncteurs triangulés.

Preuve. *(1) :* Soit un triangle distingué $L \xrightarrow{\bar{\alpha}} M \xrightarrow{\bar{\beta}} N \xrightarrow{\bar{\gamma}} \mathrm{T}(L)$ dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$. Comme on ne s'intéresse qu'aux triangles à isomorphisme près, on peut supposer que c'est l'image sous le foncteur P d'un triangle standard $L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$. On sait qu'existe un triangle standard $L' \xrightarrow{\alpha'} M' \xrightarrow{\beta'} N' \xrightarrow{\gamma'} \mathrm{T}(L')$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(B,\mathrm{N})$, et un diagramme commutatif dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(B,\mathrm{N})$

$$\begin{tikzcd}
F(L) \arrow[r, "F(\alpha)"] \arrow[d, "\phi"'] & F(L) \arrow[r, "F(\beta)"] \arrow[d, "\psi"'] & F(L) \arrow[r, "\tau_{F,L}\circ F(\gamma)"] \arrow[d, "\chi"'] & \mathrm{T}(F(L)) \arrow[d, "\mathrm{T}(\phi)"'] \\
L' \arrow[r, "\alpha'"'] & M' \arrow[r, "\beta'"'] & N' \arrow[r, "\gamma'"'] & \mathrm{T}(L')
\end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes. En appliquant le foncteur P à ce diagramme on obtient le résultat.

(2) : Il suffit de voir que $\bar{\eta}$ est un morphisme de foncteurs T-additifs. On pose, $\mathrm{K} := \mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ et $\mathrm{L} := \mathbf{K}(B,\mathrm{N})$. On doit vérifier que pour tout objet $M \in \mathrm{K}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\bar{F}(\mathrm{T}_{\mathrm{K}}(M)) \arrow[r, "\bar{\tau}_{F,M}"] \arrow[d, "\bar{\eta}_{\mathrm{T}_{\mathrm{K}}(M)}"'] & \mathrm{T}_{\mathrm{L}}(\bar{F}(M)) \arrow[d, "\mathrm{T}_{\mathrm{L}}(\bar{\eta}_M)"] \\
\bar{G}(\mathrm{T}_{\mathrm{K}}(M)) \arrow[r, "\bar{\tau}_{G,M}"'] & \mathrm{T}_{\mathrm{L}}(\bar{G}(M))
\end{tikzcd}$$

est commutatif dans L. Le chemin qui commence par aller vers la droite est représenté dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(B,\mathrm{N})$ par

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}_{\mathrm{L}}(\eta_M) \circ \tau_{F,M} &= \mathrm{t}_{G(M)} \circ \eta_M \circ \mathrm{t}_{F(M)}^{-1} \circ \mathrm{t}_{F(M)} \circ F(\mathrm{t}_M^{-1}) \\
&= \mathrm{t}_{G(M)} \circ \eta_M \circ F(\mathrm{t}_M^{-1})
\end{aligned}$$

et l'autre chemin par $\mathrm{t}_{G(M)} \circ G(\mathrm{t}_M^{-1}) \circ \eta_{\mathrm{T}_{\mathrm{K}}(M)}$. Puisque $\mathrm{t}_{G(M)}$ est un isomorphisme dans $\mathbf{C}(B,\mathrm{N})$, il suffit de montrer que $\eta_M \circ F(\mathrm{t}_M^{-1}) = G(\mathrm{t}_M^{-1}) \circ \eta_{\mathrm{T}_{\mathrm{K}}(M)}$ dans $\mathbf{C}(B,\mathrm{N})$, i.e. que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(\mathrm{T}_{\mathrm{K}}(M)) \arrow[r, "F(\mathrm{t}_M^{-1})"] \arrow[d, "\eta_{\mathrm{T}_{\mathrm{K}}(M)}"'] & F(M) \arrow[d, "\eta_M"] \\
G(\mathrm{T}_{\mathrm{K}}(M)) \arrow[r, "G(\mathrm{t}_M^{-1})"'] & G(M)
\end{tikzcd}.$$

Ceci est vrai car $\eta\colon F \to G$ est un morphisme strict de foncteurs DG.

□

Corollaire 5.5.2. *Pour tout entier k, le couple $\mathrm{T}^k, (-1)^k \cdot \mathrm{id}_{\mathrm{T}^{k+1}}$ est un foncteur triangulé de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ vers elle-même.*

Preuve. On utilise ce qui précède avec la Proposition (4.4.4).

□

5.6. **La Catégorie d'Homotopie Opposée est Triangulée.**

On introduit ici une structure triangulée canonique sur la catégorie d'homotopie opposée $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$. Cela nous donne un moyen de parler de foncteurs triangulés contravariants dont la source est une sous-catégorie plein de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$.

Définition 5.6.1. La catégorie inversée de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ est la catégorie triangulée

$$\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{flip}} := \mathbf{K}(A^{\mathrm{op}},\mathrm{M}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ho}(\mathbf{C}(A^{\mathrm{op}},\mathrm{M}^{\mathrm{op}})).$$

Sont foncteur de translation est noté $\mathrm{T}^{\mathrm{flip}}$.

Puisque $\mathrm{Ho}(\mathbf{C}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}) = \mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$, alors l'isomorphisme $\mathrm{Flip}\colon \mathbf{C}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{C}(A^{\mathrm{op}},\mathrm{M}^{\mathrm{op}})$ induit un isomorphisme $\mathbb{K}$-linéaire de catégories

$$\overline{\mathrm{Flip}} := \mathrm{Ho}(\mathrm{Flip})\colon \mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{flip}}$$

Définition 5.6.2. La catégorie $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$ admet une structure de catégorie triangulée induite par la catégorie inversée $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{flip}}$ sous l'isomorphisme $\overline{\mathrm{Flip}}$. Le foncteur de translation de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$ est noté T^{op}.

On a plus précisément,

$$\mathrm{T}^{\mathrm{op}} = \overline{\mathrm{Flip}}^{-1} \circ \mathrm{T}^{\mathrm{flip}} \circ \overline{\mathrm{Flip}}.$$

Les triangles distingués de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$ sont les images par $\overline{\mathrm{Flip}}^{-1}$ des triangles distingués de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{flip}}$. Et de façon tautologique,

$$(\overline{\mathrm{Flip}},\mathrm{id})\colon \mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{flip}}$$

est un isomorphisme de catégories triangulées.

Définition 5.6.3. Soit $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ une sous-catégorie additive pleine, et supposons que $\mathrm{K}^{\mathrm{flip}}$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{flip}}$. On donne alors à K^{op} la structure triangulée induite à partir de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$.

Autrement dit, la condition sur K dans la définition est que $\mathrm{K}^{\mathrm{flip}} := \overline{\mathrm{Flip}}(\mathrm{K}^{\mathrm{op}}) \subseteq \mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{flip}}$ est une sous-catégorie triangulée. La structure triangulée qu'on met sur K^{op} est telle que $(\overline{\mathrm{Flip}},\mathrm{id})\colon (\mathrm{K}^{\mathrm{op}},\mathrm{T}^{\mathrm{op}}) \to (\mathrm{K}^{\mathrm{flip}},\mathrm{T}^{\mathrm{flip}})$ est un isomorphisme de catégories triangulées.

Définition 5.6.4. Soit L une catégorie triangulée, et soit $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ une sous-catégorie pleine telle que $\mathrm{K}^{\mathrm{op}} \subseteq \mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$ soit triangulée. Un foncteur triangulé contravariant de K vers L est, par définition, un foncteur triangulé $(F,\tau)\colon \mathrm{K}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{L}$.

Théorème 5.6.5. *Soient A et B des anneaux DG, et soient* M *et* N *des catégories abéliennes. Soit* $\mathrm{C} \subseteq \mathbf{C}(A,\mathrm{M})$ *une sous-catégorie pleine, et soit* $F\colon \mathrm{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}(B,\mathrm{N})$ *un foncteur DG. Considérons la catégorie d'homotopie* $K := \mathrm{Ho}(\mathrm{C}) \subseteq \mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ *et le foncteur additif induit* $\bar{F} := \mathrm{Ho}(F)\colon \mathrm{K}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{K}(B,\mathrm{N})$ *. Supposons que* $\mathrm{K}^{\mathrm{op}} \subseteq \mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$ *soit triangulé. Alors il existe un isomorphisme de translation canonique $\bar{\tau}$ tel que*

$$(\bar{F},\bar{\tau})\colon \mathrm{K}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{K}(B,\mathrm{N})$$

est un foncteur triangulé.

Preuve. [8, Theorem 5.6.10].

□

Proposition 5.6.6. *Soit* $\mathrm{C} \subseteq \mathbf{C}(A,\mathrm{M})$ *une sous-catégorie pleine t.q.* $K := \mathrm{Ho}(\mathrm{C})$ *est une sous-catégorie triangulée de* $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$*, et soit* $G\colon \mathrm{C} \to \mathbf{C}(B,\mathrm{N})^{\mathrm{op}}$ *un foncteur DG. Soit* $\bar{G} := \mathrm{Ho}(G)$*. Alors, il existe un isomorphisme de translation $\bar{\nu}$ t.q.* $(\bar{G},\bar{\nu})\colon \mathrm{K} \to \mathbf{K}(B,\mathrm{N})\mathrm{op}$ *est un foncteur triangulé.*

Preuve. On considère le DG foncteur ${}^{\mathrm{flip}}G := \mathrm{Flip} \circ G\colon \mathrm{C} \to \mathbf{C}(B,\mathrm{N})^{\mathrm{flip}}$. Alors il induit ${}^{\mathrm{flip}}\bar{G} = \overline{\mathrm{Flip}} \circ \bar{G}\colon \mathrm{K} \to \mathrm{K} \to \mathbf{K}(B,\mathrm{N})^{\mathrm{flip}}$. Ainsi, par Théorème (5.5.1), on a un isomorphisme de translation ${}^{\mathrm{flip}}\bar{\tau}$ tel que $({}^{\mathrm{flip}}\bar{G},{}^{\mathrm{flip}}\bar{\tau})\colon \mathrm{K} \to \mathbf{K}(B,\mathrm{N})^{\mathrm{flip}}$ soit un foncteur triangulé. Finalement, on revient à $\mathbf{K}(B,\mathrm{N})^{\mathrm{op}}$

$$\bar{G} \circ \mathrm{T} = \overline{\mathrm{Flip}}^{-1} \circ \overline{\mathrm{Flip}} \circ \bar{G} \circ \mathrm{T} \xrightarrow{{}^{\mathrm{flip}}\bar{\tau}} \overline{\mathrm{Flip}}^{-1} \circ \mathrm{T}^{\mathrm{flip}}_{\mathbf{K}(B,\mathrm{N})} \circ {}^{\mathrm{flip}}\bar{G} = \overline{\mathrm{Flip}}^{-1} \circ \mathrm{T}^{\mathrm{flip}}_{\mathbf{K}(B,\mathrm{N})} \circ \overline{\mathrm{Flip}} \circ \bar{G} = \mathrm{T}^{\mathrm{op}}_{\mathbf{K}(B,\mathrm{N})} \circ \bar{G}.$$

On définit $\bar{\nu}$ comme étant l'isomorphisme composé. Par construction $(\bar{G},\bar{\nu})$ est un foncteur triangulé.

□

Ce chapitre est consacré à la théorie générale de la *localisation d'Ore des catégories*. On nous donne une catégorie A et un ensemble multiplicatif de morphismes $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{A}$. La catégorie localisée A_S, obtenue en inversant formellement les morphismes dans S, existe toujours. Le but est d'avoir une présentation des morphismes de A_S sous forme de fractions gauches ou droites.

6.1. **Le Formalisme de la Localisation.**

Nous partirons d'une catégorie A, sans même supposer qu'elle soit linéaire. On utilise la notation A, car il pertinent de penser à une catégorie linéaire A avec un seul objet, qui est juste un anneau A. La raison en est que notre procédure de localisation est la même que celle de la théorie des anneaux non commutatifs - même lorsque la catégorie n'est pas linéaire et elle a plusieurs objets. Lorsque nous traiterons les catégories linéaires, nous récupérerons la localisation théorique des anneaux comme un cas particulier.

L'accent sera mis sur les morphismes plutôt que sur les objets. Ainsi il conviendra d'écrire $\mathrm{A}(M,N) := \mathrm{Hom}_\mathrm{A}(M,N)$ pour $M,N \in \mathrm{Ob}(A)$. On utilise parfois la notation $a \in \mathrm{A}$ pour un morphisme $a \in \mathrm{A}(M,N)$, laissant les objets implicites. Quand on écrit $b \circ a$ pour $a,b \in \mathrm{A}$, on veut implicitement dire que ces morphismes sont composables.

Définition 6.1.1. Soit A une catégorie. Un *ensemble multiplicativement fermé de morphismes* dans A est une sous-catégorie $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{A}$ telle que $\mathrm{Ob}(\mathrm{S}) = \mathrm{Ob}(\mathrm{A})$.

Autrement dit, pour tout couple d'objets $M,N \in \mathrm{A}$ il existe un sous-ensemble $\mathrm{S}(M,N) \subseteq \mathrm{A}(M,N)$, tel que $\mathrm{id}_M \in \mathrm{S}(M,M)$, et tel que pour tout $s \in \mathrm{S}(L,M)$ et $t \in \mathrm{S}(M,N)$, la composition $t \circ s \in \mathrm{S}(L,N)$.

En utilisant notre notation, on peut écrire cela : $\mathrm{id}_M \in \mathrm{S}$, et $s,t \in \mathrm{S}$ implique $t \circ s \in \mathrm{S}$.

Si $\mathrm{A} = A$ est une catégorie linéaire à un objet, à savoir un anneau, alors $\mathrm{S} = S$ est un ensemble multiplicatif au sens de la théorie des anneaux.

Il existe différentes notions de localisation dans la littérature. Nous limitons l'attention à deux d'entre eux. Voici le premier :

Définition 6.1.2. Soit S un ensemble multiplicatif de morphismes dans une catégorie A. Une *localisation* de A en S est un couple $(\mathrm{A}_\mathrm{S}, Q)$, constitué d'une catégorie A_S et d'un foncteur $Q\colon \mathrm{A} \to \mathrm{A}_\mathrm{S}$, appelé foncteur de localisation, ayant les propriétés suivantes :

(Loc1) Il y a égalité $\mathrm{Ob}(\mathrm{A}_\mathrm{S}) = \mathrm{Ob}(\mathrm{A})$, et Q est l'identité sur les objets.

(Loc2) Pour tout $s \in \mathrm{S}$, le morphisme $Q(s) \in \mathrm{A}_\mathrm{S}$ est inversible.

(Loc3) Supposons que B soit une catégorie, et que $F\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ soit un foncteur tel que $F(s)$ soit inversible pour tout $s \in \mathrm{S}$. Alors il existe un unique foncteur $F_\mathrm{S}\colon \mathrm{A}_\mathrm{S} \to \mathrm{B}$ tel que $F_\mathrm{S} \circ Q = F$ comme foncteurs $\mathrm{A} \to \mathrm{B}$

On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S} \arrow[r, "\mathrm{inc}"] & \mathrm{A} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] & \mathrm{B} \\ & \mathrm{A}_\mathrm{S} \arrow[ur, "F_\mathrm{S}"'] & \end{tikzcd}$$

Exemple 6.1.3. Supposons que A ait un seul objet, disons x. Dans ce cas, on a un anneau $A := \mathrm{A}(x,x)$ et un ensemble multiplicatif $S\colon \mathrm{S}(x,x) \subseteq A$. La localisation de A par rapport à S est un anneau $A_S := \mathrm{A}_\mathrm{S}(x,x)$, avec un homomorphisme d'anneaux $Q\colon A \to A_S$, tel que $Q(S) \subseteq (A_S)^\times$. La condition (Loc3) dit que tout homomorphisme d'anneaux $F\colon A \to B$ tel que $F(S) \subseteq B^\times$ se factorise uniquement par A_S.

Théorème 6.1.4. *Soit* S *un ensemble multiplicatif de morphismes dans une catégorie* A. *Une localisation* $(\mathrm{A}_\mathrm{S}, Q)$ *de* A *par rapport à* S*, existe et elle est unique à un isomorphisme près.*

Preuve. [8, Theorem 6.1.4].

□

Proposition 6.1.5. *Soit* S *un ensemble multiplicatif dans une catégorie* A*, soit* B *une catégorie, et soit* $Q\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un foncteur. Considérons l'ensemble multiplicatif* $\mathrm{S}^{\mathrm{op}} \subseteq \mathrm{A}^{\mathrm{op}}$ *et le foncteur* $Q^{\mathrm{op}}\colon \mathrm{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{B}^{\mathrm{op}}$. *Les deux conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(1) La paire (B,Q) *est une localisation de* A *en* S.

(2) La paire $(B^{\mathrm{op}}, Q^{\mathrm{op}})$ *est une localisation de* A^{op} *en* S^{op}.

Preuve. On vérifie qu'il y a une équivalence pour chaque condition de la définition.

(Loc1) : On a $\mathrm{Ob}(A^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(A) = \mathrm{Ob}(B) = \mathrm{Ob}(B^{\mathrm{op}})$, et $Q^{\mathrm{op}} = \mathrm{Op} \circ Q \circ \mathrm{Op}$, donc c'est l'identité sur les objets dans les deux cas.

(Loc2) : Découle tout simplement du fait que qu'un morphisme q est inversible si et seulement si $\mathrm{Op}(q)$ est inversible.

(Loc3) : À chaque fois on se ramène au cas qui nous intéresse avec l'involution Op.

□

Souvent, la localisation A_S n'est pas très intéressante, car il n'y a aucun moyen pratique de décrire les morphismes qu'elle contient. Ce problème sera abordé dans la section suivante.

6.2. **Localisation d'Ore.**

Définition 6.2.1. Soit S un ensemble multiplicatif de morphismes dans une catégorie A. Une *localisation d'Ore à droite* de A par rapport à S est un couple $(\mathrm{A}_\mathrm{S}, Q)$, constitué d'une catégorie A_S et d'un foncteur $Q\colon \mathrm{A} \to \mathrm{A}_\mathrm{S}$, ayant les propriétés suivantes :

(RO1) Il y a égalité $\mathrm{Ob}(\mathrm{A}_\mathrm{S}) = \mathrm{Ob}(\mathrm{A})$, et Q est l'identité sur les objets.

(RO2) Pour tout $s \in \mathrm{S}$, le morphisme $Q(s) \in \mathrm{A}_\mathrm{S}$ est inversible.

(RO3) Tout morphisme $q \in \mathrm{A}_\mathrm{S}$ peut s'écrire $q = Q(a) \circ Q(s)^{-1}$ pour des $a \in \mathrm{A}$ et $s \in \mathrm{S}$.

(RO4) Supposons que $a, b \in \mathrm{A}$ satisfasse $Q(a) = Q(b)$. Alors $a \circ s = b \circ s$ pour un certain $s \in \mathrm{S}$.

Les lettres "RO" veulent dire "right Ore". On appelle l'expression $q = Q(a) \circ Q(s)^{-1}$ une *représentation en fraction à droite de q*. Voici la version gauche de cette définition :

Définition 6.2.2. Soit S un ensemble multiplicatif de morphismes dans une catégorie A. Une *localisation d'Ore à gauche* de A par rapport à S est un couple $(\mathrm{A}_\mathrm{S}, Q)$, constitué d'une catégorie A_S et d'un foncteur $Q\colon \mathrm{A} \to \mathrm{A}_\mathrm{S}$, ayant les propriétés suivantes :

(LO1) Il y a égalité $\mathrm{Ob}(\mathrm{A}_\mathrm{S}) = \mathrm{Ob}(\mathrm{A})$, et Q est l'identité sur les objets.

(LO2) Pour tout $s \in \mathrm{S}$, le morphisme $Q(s) \in \mathrm{A}_\mathrm{S}$ est inversible.

(LO3) Tout morphisme $q \in \mathrm{A}_\mathrm{S}$ peut s'écrire $q = Q(s)^{-1} \circ Q(a)$ pour des $a \in \mathrm{A}$ et $s \in \mathrm{S}$.

(LO4) Supposons que $a, b \in \mathrm{A}$ satisfasse $Q(a) = Q(b)$. Alors $s \circ a = s \circ b$ pour un certain $s \in \mathrm{S}$.

Les lettres "LO" veulent dire "left Ore". On appelle l'expression $q = Q(s)^{-1} \circ Q(a)$ une *représentation en fraction à gauche de q*.

Proposition 6.2.3. *Soit* S *un ensemble multiplicatif dans une catégorie* A*, soit* B *une catégorie, et soit* $Q\colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *un foncteur. Considérons l'ensemble multiplicatif* $\mathrm{S}^{\mathrm{op}} \subseteq \mathrm{A}^{\mathrm{op}}$ *et le foncteur* $Q^{\mathrm{op}}\colon \mathrm{A}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{B}^{\mathrm{op}}$*. Les deux conditions ci-dessous sont équivalentes :*

(1) La paire (B, Q) est une localisation d'Ore à gauche de A *en* S*.*

(2) La paire $(B^{\mathrm{op}}, Q^{\mathrm{op}})$ est une localisation d'Ore à droite de A^{op} *en* S^{op}*.*

Preuve. On a déjà vérifié l'équivalence des deux premières conditions. Les autres se vérifient simplement, en utilisant notamment le fait que le foncteur Op est contravariant involutif, et la définition du foncteur Q^{op}.

□

Ainsi, les résultats suivant seront indiqués pour les localisations d'Ore à droite, ils ont tous des versions "à gauche", avec des preuves identiques (il suffit d'inverser certaines flèches ou compositions), et seront donc omis.

Lemme 6.2.4. *Soit* $(\mathrm{A}_\mathrm{S}, Q)$ *une localisation d'Ore à droite, soient* $a_1, a_2 \in \mathrm{A}$ *et* $s_1, s_2 \in \mathrm{S}$*. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $Q(a_1) \circ Q(s_1)^{-1} = Q(a_2) \circ Q(s_2)^{-1}$ *dans* A_S*.*

(2) Il existe $b_1, b_2 \in \mathrm{A}$ *t.q.* $a_1 \circ b_1 = a_2 \circ b_2$*, et* $s_1 \circ b_1 = s_2 \circ b_2 \in \mathrm{S}$*.*

Preuve. *(ii) ⇒ (i) :* Puisque $Q(s_i)$ et $Q(s_i \circ b_i)$sont inversibles, alors $Q(b_i)$ aussi. Ainsi,

$$Q(a_1) \circ Q(s_1)^{-1} = Q(a_1) \circ Q(b_1) \circ Q(b_1)^{-1} \circ Q(s_1)^{-1} = Q(a_2) \circ Q(b_2) \circ Q(b_2)^{-1} \circ Q(s_2)^{-1} = Q(a_2) \circ Q(s_2)^{-1}.$$

(i) ⇒ (ii) : Par propriété (RO3) il existe $c \in \mathrm{A}$ et $u \in \mathrm{S}$ t.q.

$$Q(s_2)^{-1} \circ Q(s_1) = Q(c) \circ Q(u)^{-1} \text{ i.e. } Q(s_1 \circ u) = Q(s_2 \circ c).$$

On sait que $Q(a_1) = Q(a_2) \circ Q(s_2)^{-1} \circ Q(s_1)$. Donc $Q(a_1) = Q(a_2) \circ Q(c) \circ Q(u)^{-1}$. D'où $Q(a_1 \circ u) = Q(a_2 \circ c)$. Par la propriété (RO4) il existe $v \in \mathrm{S}$ t.q. $a_1 \circ u \circ v = a_2 \circ c \circ v$. De même, il y a $v' \in \mathrm{S}$ t.q. $s_1 \circ u \circ v' = s_2 \circ c \circ v'$.

Avec la propriété (RO3), on a $d \in \mathrm{A}$ et $w \in \mathrm{S}$ t.q. $Q(v)^{-1} \circ Q(v') = Q(d) \circ Q(w)^{-1}$. En réarrangeant, nous obtenons $Q(v' \circ w) = Q(v \circ d)$. Par la propriété (RO4) il existe $w' \in \mathrm{S}$ t.q. $v' \circ w \circ w' = v \circ d \circ w'$. On pose $b_1 := u \circ v \circ d \circ w'$ et $b_2 := c \circ v \circ d \circ w'$. Alors

$$s_1 \circ b_1 = s_1 \circ u \circ v \circ d \circ w' = s_1 \circ u \circ v' \circ w \circ w' = s_2 \circ c \circ v' \circ w \circ w' = s_2 \circ b_2,$$

dans S et

$$a_1 \circ b_1 = a_1 \circ u \circ v \circ d \circ w' = a_2 \circ c \circ v \circ d \circ w' = a_2 \circ b_2.$$

□

Proposition 6.2.5. *Une localisation d'Ore à droite* $(\mathrm{A_S}, Q)$ *est une localisation au sens du premier type.*

Preuve. [8, Proposition 6.2.9].

$\square$

Corollaire 6.2.6. *Soit* S *un ensemble multiplicatif de morphismes dans une catégorie* A. *Supposons que les deux assertions suivantes soient vraies :*

— *La paire* (B, Q) *est une localisation d'Ore à droite ou à gauche de* A *en* S.

— *La paire* (B', Q') *est une localisation d'Ore à droite ou à gauche de* A *en* S.

Alors il existe un unique isomorphisme de localisations $(\mathrm{B}, Q) \cong (\mathrm{B}', Q')$.

Preuve. Découle simplement du fait que d'après la proposition précédente, (B, Q) et (B', Q') sont des localisation du premier type, et sont donc isomorphes.

$\square$

Définition 6.2.7. Soit S un ensemble multiplicatif de morphismes dans une catégorie A. On dit que S est un *ensemble de dénominateurs à droite* s'il satisfait ces deux conditions :

(RD1) (Condition d'Ore à droite) Étant donné $a \in \mathrm{A}$ et $s \in \mathrm{S}$, il existe $b \in \mathrm{A}$ et $t \in \mathrm{S}$ tels que $a \circ t = s \circ b$.

(RD2) (Condition d'annulation à droite) Étant donné $a, b \in \mathrm{A}$ et $s \in \mathrm{S}$ tels que $s \circ a = s \circ b$, il existe $t \in \mathrm{S}$ tel que $a \circ t = b \circ t$.

Voici des diagrammes illustrant la définition :

(6.2.8)
$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, dashed, "t"'] \arrow[dr, dashed, "b"] & \\ M \arrow[dr, "a"'] & & N \arrow[dl, "s"] \\ & L & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, dashed, "t"] & M \arrow[d, bend right, "a"'] \arrow[d, bend left, "b"] & \\ & N \arrow[r, "s"'] & L \end{tikzcd}$$

Définition 6.2.9. Soit S un ensemble multiplicatif de morphismes dans une catégorie A. On dit que S est un *ensemble de dénominateurs à gauche* s'il satisfait ces deux conditions :

(LD1) (Condition d'Ore à gauche) Étant donné $a \in \mathrm{A}$ et $s \in \mathrm{S}$, il existe $b \in \mathrm{A}$ et $t \in \mathrm{S}$ tels que $t \circ a = b \circ s$.

(LD2) (Condition d'annulation à gauche) Étant donné $a, b \in \mathrm{A}$ et $s \in \mathrm{S}$ tels que $a \circ s = b \circ s$, il existe $t \in \mathrm{S}$ tel que $t \circ a = t \circ b$.

Proposition 6.2.10. *Soit* S *un ensemble multiplicatif de morphismes dans une catégorie* A. *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) S *est un ensemble de dénominateurs à gauche dans* A.

(2) S^{op} *est un ensemble de dénominateurs à droite dans* A^{op}.

Preuve. Vérifications simples.

$\square$

Voici le théorème principal concernant la localisation d'Ore.

Théorème 6.2.11. *Les conditions suivantes sont équivalentes pour une catégorie* A *et un ensemble multiplicatif de morphismes* $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{A}$.

(1) La localisation d'Ore à droite $(\mathrm{A_S}, Q)$ *existe.*

(2) S *est un ensemble de dénominateurs à droite.*

Pour la preuve du théorème on aura besoin d'un lemme. Le plus dur est de prouver que *(2)* $\Rightarrow$ *(1)*. L'idée générale est la même que la localisation d'anneaux commutatifs : on considère l'ensemble des paires de morphismes $\mathrm{A} \times \mathrm{S}$, et on définit une relation $\sim$, en espérant que ce soit une relation d'équivalence sue l'ensemble et que l'ensemble quotient $\mathrm{A_S}$ soit un catégorie, et il aura les propriétés souhaitées.

Supposons que S est un ensemble de dénominateurs à droite. Pour tout $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathrm{A})$ considérons l'ensemble

$$(\mathrm{A} \times \mathrm{S})(M, N) := \coprod_{L \in \mathrm{Ob}(\mathrm{A})} \mathrm{A}(L, N) \times \mathrm{S}(L, M).$$

Un élément $(a, s) \in (\mathrm{A} \times \mathrm{S})(M, N)$ peut être vu comme le diagramme

(6.2.12)
$$\begin{tikzcd} & L \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\ M & & N \end{tikzcd}$$

dans A. Ce diagramme représentera éventuellement la fraction à droite $Q(a) \circ Q(s)^{-1} \colon M \to N$.

Définition 6.2.13. On définit une relation $\sim$ sur l'ensemble $\mathrm{A} \times \mathrm{S}$ comme suit : $(a_1, s_1) \sim (a_2, s_2)$ s'il existe $b_1, b_2 \in \mathrm{A}$ t.q. $a_1 \circ b_1 = a_2 \circ b_2$ et $s_1 \circ b_1 = s_2 \circ b_2 \in \mathrm{S}$.

Notons que cette relation impose la condition *(2)* du Lemme (6.2.4). Voici le diagramme commutatif associé, dans lequel nous avons explicité les objets :

(6.2.14)
$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, dashed, "b_1"'] \arrow[dr, dashed, "b_2"] & \\
L_1 \arrow[d, "s_1"'] \arrow[drr, "a_1" near end] & & L_2 \arrow[d, "a_2"] \arrow[dll, "s_2"' near end] \\
M & & N
\end{tikzcd}.$$

Les chemins se terminant en M sont dans S.

Lemme 6.2.15. *Si* S *est un ensemble de dénominateurs à droite, alors la relation* $\sim$ *est une équivalence.*

Preuve. [8, Lemma 6.2.24].

$\square$

Preuve *du Théorème* (6.2.11).

(1) $\Rightarrow$ *(2)* : Prenons $a \in \mathrm{A}$ et $s \in \mathrm{S}$ avec le même domaine d'arrivé. Considérons $q := Q(s)^{-1} \circ Q(a)$. Par (RO3) on a $b \in \mathrm{A}$ et $t \in \mathrm{S}$ t.q. $q = Q(b) \circ Q(t)^{-1}$. Donc $Q(s \circ b) = Q(a \circ t)$. Par (RO4) il y a $u \in \mathrm{S}$ t.q. $(s \circ b) \circ u = (a \circ t) \circ u$. Donc, comme $s \circ (b \circ u) = a \circ (t \circ u)$, et que $t \circ u \in \mathrm{S}$, alors refRD1 est vérifiée.

Pour $a, b \in \mathrm{A}$ et $s \in \mathrm{S}$ t.q. $s \circ a = s \circ b$, on a $Q(s \circ a) = Q(s \circ b)$. Comme $Q(s)$ est inversible, on a $Q(a) = Q(b)$, donc par (RO4), il existe $t \in \mathrm{S}$ t.q. $a \circ t = b \circ t$, et alors (RD2) est vérifiée.

(2) $\Rightarrow$ *(1)* : [8, Theorem 6.2.19] On détaille seulement quelques points.

$\underline{\mathrm{A_S} \text{ est une catégorie :}}$ Avec les notations de la preuve, il faut déjà vérifier que pour $q = \overline{(a, s)} \in \mathrm{A} \times \mathrm{S}(M, N)$ on a $q \circ \mathrm{id}_M = q$ et $\mathrm{id}_N \circ q = q$, où le morphisme identité id_M dans $\mathrm{A_S}$ est $\overline{(\mathrm{id}_M, \mathrm{id}_M)}$. Il suffit de voir les diagrammes commutatifs suivants

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & L \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "\mathrm{id_L}"] & & \\
& M \arrow[dl, "\mathrm{id_M}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id_M}"] & & L \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\
M & & M & & N
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & L \arrow[dl, "\mathrm{id}_L"'] \arrow[dr, "a"] & & \\
& L \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & & N \arrow[dl, "\mathrm{id}_N"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_N"] & \\
M & & N & & N
\end{tikzcd}.$$

Ils nous permettent de dire $q \circ \mathrm{id}_M = \overline{(a \circ \mathrm{id}_L, \mathrm{id}_M \circ s)} = q$ et de même $\mathrm{id}_N \circ q = q$.
Reste à voir l'associativité. Considèrerons le diagramme commutatif pour $q_i = \overline{(a_i, s_i)} \in \mathrm{A} \times \mathrm{S}(M_{i-1}, M_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\begin{tikzcd}
L_1'' \arrow[r] \arrow[d] & L_2' \arrow[r] \arrow[d] & L_3 \arrow[r, "a_3"'] \arrow[d, "s_3"] & M_3 \\
L_1' \arrow[r] \arrow[d] & L_2 \arrow[r, "a_2"'] \arrow[d, "s_2"] & M_2 & \\
L_1 \arrow[r, "a_1"'] \arrow[d, "s_1"] & M_1 & & \\
M_0 & & &
\end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont dans S. Alors, on a que $(q_3 \circ q_2) \circ q_1$ et $q_3 \circ (q_2 \circ q_1)$ peuvent se représenter par la même fraction, donc la composition est associative, comme désiré.

$\underline{Q \text{ est un foncteur :}}$ Clairement $Q(\mathrm{id}) = \mathrm{id}$, et on a pour $a, b \in A$,

$$Q(b) \circ Q(a) = \overline{(b, \mathrm{id}_N)} \circ \overline{(a, \mathrm{id}_M)} = \overline{(b \circ a, \mathrm{id}_M)} = Q(b \circ a),$$

du fait que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & M \arrow[dl, "\mathrm{id}_M"'] \arrow[dr, "a"] & & \\
& M \arrow[dl, "\mathrm{id}_M"'] \arrow[dr, "a"] & & N \arrow[dl, "\mathrm{id}_N"'] \arrow[dr, "b"] & \\
M & & N & & L
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 6.2.16 (Dénominateur commun)**.** *Soit* A *une catégorie, soit* S *un dénominateur à droite dans* A*, et soit* $(\mathrm{A}_\mathrm{S}, Q)$ *la localisation d'Ore à droite. Pour tous les paires de morphismes* $q_1, q_2 \colon M \to N$ *dans* A_S *il y a un dénominateur commun à droite. A savoir on peut écrire* $q_i = Q(a_i) \circ Q(s)^{-1}$ *pour* $a_i \in \mathrm{A}$ *et* $s \in \mathrm{S}$ *convenables.*

Preuve. Soient $q_i = Q(a_i') \circ Q(s_i')^{-1}$ des représentants. Par (RD1) appliqué à $L_1 \to M \leftarrow L_2$, il existe $b \in \mathrm{A}$ et $t \in \mathrm{S}$ tels que la partie du diagramme suivant qui se trouve au-dessus de M soit commutative :

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "b"] & \\
L_1 \arrow[d, "s_1'"'] \arrow[drr, "a_1'" near end] & & L_2 \arrow[d, "a_2'"] \arrow[dll, "s_2'"' near end] \\
M & & N
\end{tikzcd}.$$

On pose $s \coloneqq s_1' \circ t = s_2' \circ b$, $a_1 \coloneqq a_1' \circ t$ et $a_2 \coloneqq a_2' \circ b$. Alors par le Lemme 6.2.4 on obtient $q_i = Q(a_i) \circ Q(s)^{-1}$.

□

Proposition 6.2.17. *Soit* A *une catégorie, soit* $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{A}$ *un ensemble de dénominateurs à droite, et soit* $\mathrm{A}' \subseteq \mathrm{A}$ *une sous-catégorie pleine. On pose* $\mathrm{S}' \coloneqq \mathrm{A}' \cap \mathrm{S}$*. Supposons que ces deux conditions suivantes soient satisfaites :*

(1) S' *est un ensemble de dénominateurs à droite dans* A'*.*

(2) Soit $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{A})$*. S'il existe un morphisme* $s \colon M \to L'$ *dans* S *avec* $L' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{A}')$*, alors il existe un morphisme* $t \colon K' \to M$ *dans* S *avec* $K' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{A}')$*.*

Alors le foncteur canonique $\mathrm{A}'_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{A}_\mathrm{S}$ *est pleinement fidèle.*

Preuve. On note le foncteur d'inclusion par $F \colon \mathrm{A}' \to \mathrm{A}$. On veut prouver que sa localisation $F_{\mathrm{S}'} \colon \mathrm{A}'_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{A}_\mathrm{S}$ est pleinement fidèle.

Soient $L_1', L_2' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{A}')$, et soit $q \colon L_1' \to L_2'$ un morphisme dans A_S. Soit $q = Q(a) \circ Q(s)^{-1}$ une représentation, avec $s \colon M \to L_1'$ un morphisme dans S et $a \colon M \to L_2'$ un morphisme dans A. Ceci est possible car S est un ensemble dénominateur à droite dans A. On peut trouver un morphisme $t \colon K' \to M$ dans S avec $K' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{A}')$. On a le diagramme suivant suivant,

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, "t"] & M \arrow[dl, "s"] \arrow[dr, "a"] & \\
L_1' & & L_2'
\end{tikzcd}.$$

Donc $q = Q(a \circ t) \circ Q(s \circ t)^{-1}$. Or $s \circ t \in \mathrm{S}'$ et $a \circ t \in \mathrm{A}'$, donc q est dans l'image du foncteur $F_{\mathrm{S}'}$. On voit que $F_{\mathrm{S}'}$ est plein.

Soient $p', q' \colon L_1' \to L_2'$ des morphismes dans $\mathrm{A}'_{\mathrm{S}'}$ tels que $F_{\mathrm{S}'}(p') = F_{\mathrm{S}'}(q')$. Notons le foncteur de localisation de A' par $Q' \colon \mathrm{A}' \to \mathrm{A}'_{\mathrm{S}'}$. Comme S' est un dénominateur à droite dans A' , on peut trouver les représentations $p' = Q'(a') \circ Q'(s')^{-1}$ et $q' = Q'(b') \circ Q'(s')^{-1}$ avec les morphismes $s' \colon N' \to L_1'$ dans S' et $a', b' \colon N' \to L_2'$ dans A'. Puisque $F_{\mathrm{S}'}(p') = F_{\mathrm{S}'}(q')$, il existe des morphismes $u, v \colon M \to N'$ dans A t.q. $a' \circ u = b' \circ v$, et $s' \circ u = s' \circ v \in \mathrm{S}$. La condition *(2)*, appliquée au morphisme $s' \circ u \colon M \to L_1'$, dit qu'il existe un morphisme $t \colon K' \to M$ dans S de source $K' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{A}')$. On a le diagramme suivant suivant,

$$\begin{tikzcd}
K' \arrow[r, "t"] & M \arrow[r, "{u,v}"] & N' \arrow[dl, "s'"] \arrow[dr, "{a',b'}"] & \\
 & L_1' & & L_2'
\end{tikzcd}.$$

Ainsi, on a

$$p' = Q'(a' \circ u \circ t) \circ Q'(s' \circ u \circ t)^{-1} = Q'(b' \circ v \circ t) \circ Q'(s' \circ v \circ t)^{-1} = q'.$$

Donc $F_{\mathrm{S}'}$ est fidèle.

□

6.3. **Localisation des Catégories Linéaires.**

Théorème 6.3.1. *Soit* A *une catégorie* $\mathbb{K}$*-linéaire, soit* S *un dénominateur à droite dans* A*, et soit* $(\mathrm{A}_\mathrm{S}, Q)$ *la localisation d'Ore à droite.*

(1) La catégorie A_S *a une structure canonique* $\mathbb{K}$*-linéaire telle que* $Q \colon \mathrm{A} \to \mathrm{A}_\mathrm{S}$ *soit un foncteur* $\mathbb{K}$*-linéaire.*

(2) Supposons que B *soit une autre catégorie* $\mathbb{K}$*-linéaire, et que* $F \colon \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *soit un foncteur* $\mathbb{K}$*-linéaire tel que* $F(s)$ *soit inversible pour tout* $s \in \mathrm{S}$*. Soit* $F_\mathrm{S} \colon \mathrm{A}_\mathrm{S} \to \mathrm{B}$ *la localisation de* F*. Alors* F_S *est un foncteur* $\mathbb{K}$*-linéaire.*

(3) Si A *est une catégorie additive, alors* $\mathrm{A_S}$ *l'est également.*

Preuve. (Adapté de [6, Tag 05QD])

Soient $q_1, q_2 \colon M \to N$ des morphismes dans $\mathrm{A_S}$. On choisit des représentations avec dénominateur commun $q_i = Q(a_i) \circ Q(s)^{-1}$. On définit $q_1 + q_2 \colon Q(a_1 + a_2) \circ Q(s)^{-1}$, et pour $\lambda \in \mathbb{K}$ on pose $\lambda \cdot q_i \coloneqq Q(\lambda \cdot a_i) \circ Q(s)^{-1}$. Dans la suite on va montrer que c'est bien défini et que la composition est bilinéaire. Une fois cela fait, il est clair que Q est un foncteur additif.

Supposons avoir des représentation différentes pour nos $q_i = Q(a_i) \circ Q(s)^{-1} = Q(a_i') \circ Q(s')^{-1}$. Alors, par équivalences des écritures des q_i, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[drr, "\alpha_2"] & & B \arrow[d, "\beta_2"] \arrow[dll, "\beta_1"'] \\
Y_1 \arrow[d, "s"'] \arrow[drr, "{a_1,a_2}"'] & & Y_2 \arrow[d, "{a_1',a_2'}"] \arrow[dll, "s'"] \\
M & & N
\end{tikzcd}.$$

En appliquant (RD1) à $A \to Y_1 \to M \leftarrow Y_1 \leftarrow B \in \mathrm{S}$, on obtient $c_A \in \mathrm{S}$ et $c_B \in \mathrm{A}$ tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "c_A"'] \arrow[dr, "c_B"] & \\
A \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[drr, "\alpha_2"] & & B \arrow[d, "\beta_2"] \arrow[dll, "\beta_1"'] \\
Y_1 \arrow[d, "s"'] \arrow[drr, "{a_1,a_2}"'] & & Y_2 \arrow[d, "{a_1',a_2'}"] \arrow[dll, "s'"] \\
M & & N
\end{tikzcd}.$$

Maintenant, par (RD2) appliqué deux fois, une fois à $s \circ \alpha_1 \circ c_A = s \circ \beta_1 \circ c_B$ et une fois à $s' \circ \beta_2 \circ c_b = s' \circ \alpha_2 \circ c_A$, on obtient $t, t' \in \mathrm{S}$ tels que $\alpha_1 \circ c_A \circ t = \beta_1 \circ c_B \circ t$ et $\beta_2 \circ c_b \circ t' = \alpha_2 \circ c_A \circ t'$. Finalement, on applique (RD1) à $H \to C \leftarrow H'$ on dispose de $u \in \mathrm{S}$ et $k \in \mathrm{A}$, tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "k"] & \\
H \arrow[dr, "t"'] & & H' \arrow[dl, "t'"] \\
& C \arrow[dl, "c_A"'] \arrow[dr, "c_B"] & \\
A \arrow[d, "\alpha_1"'] \arrow[drr, "\alpha_2"] & & B \arrow[d, "\beta_2"] \arrow[dll, "\beta_1"'] \\
Y_1 \arrow[d, "s"'] \arrow[drr, "{a_1,a_2}"'] & & Y_2 \arrow[d, "{a_1',a_2'}"] \arrow[dll, "s'"] \\
M & & N
\end{tikzcd}.$$

On a donc que tous les chemins $K \to Y_1$ et $K \to Y_2$ sont égaux et les chemins $K \to M$ sont dans S. On peut alors tout condensé au diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\
Y_1 \arrow[d, "s"'] \arrow[drr, "{a_1,a_2}"'] & & Y_2 \arrow[d, "{a_1',a_2'}"] \arrow[dll, "s'"] \\
M & & N
\end{tikzcd}$$

qui nous donne la même d'équivalence pour nos q_i. Ainsi, si on pose $v \coloneqq s \circ x = s' \circ y$, on obtient

$$Q(a_1 + a_2) \circ Q(s)^{-1} = Q((a_1 + a_2) \circ x) \circ Q(v)^{-1} = Q((a_1' + a_2') \circ x) \circ Q(v)^{-1} = Q(a_1' + a_2') \circ Q(s')^{-1}.$$

Le fait que la multiplication par un scalaire soit indépendante du choix du représentant découle du fait que si

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ L \arrow[d, "s"'] \arrow[drr, "a" near end] & & L' \arrow[d, "a'"] \arrow[dll, "s'" near end] \\ M & & N \end{tikzcd} \quad \text{commute, alors} \quad \begin{tikzcd} & K \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v"] & \\ L \arrow[d, "s"'] \arrow[drr, "\lambda\cdot a" near end] & & L' \arrow[d, "\lambda\cdot a'"] \arrow[dll, "s'" near end] \\ M & & N \end{tikzcd}$$

commute également, et c'est une équivalence des représentations.

Reste a voir que la composition est bilinéaire. Soient $q_1, q_2 \colon M \to N$, $q_i = Q(a_i) \circ Q(s)^{-1}$ et $q_3 \colon L \to M$, $q_3 = Q(a_3) \circ Q(s_3)$. Alors on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} & & K'' \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "b"] & & \\ & K \arrow[dl, "s_3"'] \arrow[dr, "a_3"] & & K' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "{a_1,a_2,a_1+a_2}"] & \\ L & & M & & N \end{tikzcd}.$$

On a $q_i \circ q_3 = Q(a_i \circ b) \circ Q(s_3 \circ u)^{-1}$. Ainsi,

$$(q_1 + q_2) \circ q_3 = Q((a_1 + a_2) \circ b) \circ Q(s_3 \circ u)^{-1} = Q(a_1 \circ b + a_2 \circ b) \circ Q(s_3 \circ u)^{-1} = q_1 \circ q_3 + q_2 \circ q_3.$$

Soient maintenant $q_1, q_2 \colon M \to N$, $q_i = Q(a_i) \circ Q(s)^{-1}$ et $q_3 \colon N \to P$, $q_3 = Q(a_3) \circ Q(s_3)$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\mathrm{S}\ni b_1'"'] \arrow[dr, "b_2'"] & \\ K \arrow[d, "\mathrm{S}\ni u_1"'] \arrow[dr, phantom, ""] \arrow[rd, shift left=0, ""] \arrow[d] & & K' \arrow[d, "b_2"] \arrow[dll, "\mathrm{S}\ni u_2" near end] \\ Y_1 \arrow[dr, "{a_1,a_2}"'] & & Y_2 \arrow[dl, "s_3"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

obtenu en appliquant (RD1) (on précise que la dernière application de (RD1) est à $K \to Y_1 \leftarrow K'$). On considère $b_1'' := b_1 \circ b_1'$, $b_2'' := b_2 \circ b_2'$ et $s' := u_1 \circ b_1' = u_2 \circ b_2'$. Alors

$$s_3 \circ b_1'' = a_1 \circ u_1 \circ b_1' = a_1 \circ s',$$
$$s_3 \circ b_2'' = a_2 \circ u_2 \circ b_2' = a_2 \circ s'.$$

Donc,

$$s_3 \circ (b_1'' + b_2'') = (a_1 + a_2) \circ s'.$$

D'où le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & & Y \arrow[dl, "s'"'] \arrow[dr, "{b_1'',b_2'',b_1''+b_2''}"] & & \\ & Y_1 \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "{a_1,a_2,a_1+a_2}"'] & & Y_2 \arrow[dl, "s_3"'] \arrow[dr, "a_3"] & \\ M & & N & & P \end{tikzcd}.$$

Ainsi, $q_3 \circ q_i = Q(a_3 \circ b_i'') \circ Q(s \circ s')^{-1}$, donc

$$q_3 \circ q_1 + q_3 \circ q_2 = Q(a_3 \circ b_1'' + a_3 \circ b_2'') \circ Q(s \circ s')^{-1} = Q(a_3 \circ (b_1'' + b_2'')) \circ Q(s \circ s')^{-1} = q_3 \circ (q_1 + q_2).$$

Avec cette structure, il est clair que $Q(a_1) + Q(a_2) = Q(a_1 + a_2)$.

Le points restants sont clairs. (voir [8, Theorem 6.3.1] et la preuve [8, Proposition 6.2.9]).

□

Proposition 6.3.2. *Soit* (K, T) *une catégorie* T*-additive, soit* S *un ensemble dénominateur à droite dans* K *tel que* $\mathrm{T}(\mathrm{S}) = \mathrm{S}$*, et soit* $Q \colon \mathrm{K} \to \mathrm{K}_\mathrm{S}$ *le foncteur de localisation.*

(1) Il existe un unique automorphisme additif T_S *de la catégorie* K_S*, tel que* $\mathrm{T}_\mathrm{S} \circ Q = Q \circ \mathrm{T}$ *comme foncteurs* $\mathrm{K} \to \mathrm{K}_\mathrm{S}$*.*

(2) Soit τ *l'automorphisme identité du foncteur* $Q \circ \mathrm{T}$*. Alors* $(Q, \tau) \colon (\mathrm{K}, \mathrm{T}) \to (\mathrm{K}_\mathrm{S}, \mathrm{T}_\mathrm{S})$ *est un foncteur* T*-additif.*

Preuve. *(1) :* Par l'hypothèse le foncteur $Q \circ \mathrm{T}\colon \mathrm{K} \to \mathrm{K_S}$ envoie les morphismes de S vers des isomorphismes. Par la propriété (Loc3), le foncteur $\mathrm{T_S}\colon \mathrm{K_S} \to \mathrm{K_S}$ vérifiant $\mathrm{T_S} \circ Q = Q \circ \mathrm{T}$ existe et est unique. De même, il existe un unique foncteur $\mathrm{T_S^{-1}}\colon \mathrm{K_S} \to \mathrm{K_S}$ satisfaisant $\mathrm{T_S^{-1}} \circ Q = Q \circ \mathrm{T}^{-1}$. Un calcul facile montre que $\mathrm{T_S^{-1}} \circ \mathrm{T_S} = \mathrm{Id} = \mathrm{T_S} \circ \mathrm{T_S^{-1}}$. Donc $\mathrm{T_S}$ est un automorphisme de $\mathrm{K_S}$. D'après le théorème (6.3.1), le foncteur $\mathrm{T_S}$ est additif.

(2) : Clair.

□

Proposition 6.3.3. *Dans la situation de la proposition précédente, supposons que* $(\mathrm{K}', \mathrm{T}')$ *est une autre catégorie* T*-additive, et* $(F, \nu)\colon (\mathrm{K}, \mathrm{T}) \to (\mathrm{K}', \mathrm{T}')$ *est un foncteur* T*-additif, tel que* $F(s)$ *soit inversible pour tout* $s \in \mathrm{S}$*. Soit* $F_{\mathrm{S}}\colon \mathrm{K_S} \to \mathrm{K}'$ *sa localisation. Alors il existe un unique isomorphisme* $\nu_{\mathrm{S}}\colon F_{\mathrm{S}} \circ \mathrm{T_S} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{T}' \circ F_{\mathrm{S}}$ *de foncteurs* $\mathrm{K_S} \to \mathrm{K}'$*, tel que* $(F, \nu) = (F_{\mathrm{S}}, \nu_{\mathrm{S}}) \circ (Q, \tau)$ *comme foncteurs* T*-additifs* $(\mathrm{K}, \mathrm{T}) \to (\mathrm{K}', \mathrm{T}')$*.*

Preuve. Puisque τ est le morphisme identité, alors $\nu_{\mathrm{S}} := \nu$ fait l'affaire.

□

7. La Catégorie Dérivée $\mathbf{D}(A, \mathrm{M})$

Ici A est un DG anneau et M est une catégorie abélienne $\mathbb{K}$-linéaire. L'anneau de base peut être n'importe quel anneau commutatif non nul, et il restera implicite la plupart du temps.

7.1. **Localisation des Catégories Triangulées.**

Soit K une catégorie triangulée, avec foncteur de translation T. On écrira souvent $a \in \mathrm{K}$ pour un morphisme $a \in \mathrm{K}(M, N)$ laissant les objets implicites.

Proposition 7.1.1. *Supposons que* $H \colon \mathrm{K} \to \mathrm{M}$ *soit un foncteur cohomologique, où* M *est une catégorie abélienne. Soit*

$$\mathrm{S} := \{s \in \mathrm{K} \mid H(\mathrm{T}^i(s)) \text{ est inversible pour tout } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Alors S *est un ensemble dénominateur à gauche et à droite dans* K*.*

Preuve. Il est clair que S est fermé par composition et contient les morphismes identités. Donc c'est un ensemble multiplicatif.

Montrons d'abord (RD1). Supposons avoir des morphismes $L \xrightarrow{a} N \xleftarrow{s} M$ avec $s \in \mathrm{S}$. Il faut trouver des morphismes $L \xleftarrow{t} K \xrightarrow{b} M$ avec $t \in \mathrm{S}$ et tels que $a \circ t = s \circ b$.

Considérons le diagramme commutatif suivant des flèches solides

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "t"] \arrow[d, dashed, "b"] & L \arrow[r, "c\circ a"] \arrow[d, "a"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathrm{T}(K) \arrow[d, dashed, "\mathrm{T}(b)"] \\
M \arrow[r, "s"] & N \arrow[r, "c"] & P \arrow[r] & \mathrm{T}(M)
\end{tikzcd}$$

où la ligne du bas est un triangle distingué construit sur s, et la ligne du haut est un triangle distingué construit sur $c{\circ}a$, puis tourné avec (TR2). Par l'axiome (TR3) il existe un morphisme b rendant le diagramme commutatif. Ainsi $a \circ t = s \circ b$. Puisque $H(\mathrm{T}^i(s))$ sont inversibles pour tout $i \in \mathbb{Z}$, il s'ensuit que $H(\mathrm{T}^i(P)) = 0$.

En effet, de $M \xrightarrow{s} N \xrightarrow{c} P \to \mathrm{T}(M)$ on en tire une suite exacte longue

$$\cdots \to H(\mathrm{T}^{i-1}(P)) \to H(\mathrm{T}^i(M)) \xrightarrow{H(\mathrm{T}^i(s))} H(\mathrm{T}^i(N)) \xrightarrow{H(\mathrm{T}^i(c))} H(\mathrm{T}^i(P)) \to H(\mathrm{T}^{i+1}(M)) \to \cdots .$$

Il est clair que si $H(\mathrm{T}^i(P)) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on a que $H(\mathrm{T}^i(s))$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Inversement, si $H(\mathrm{T}^i(s))$ est un isomorphisme pour tout $i \in \mathbb{Z}$ on va montrer que $H(\mathrm{T}^i(P)) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Remarquons déjà que si $X \xrightarrow{0} Y$, alors il est facile de vérifier que $\operatorname{Ker} 0 = (M, \mathrm{id}_M)$, $\operatorname{Coker} 0 = (N, \mathrm{id}_N)$ et $\operatorname{Im} 0 = 0$. Alors, on considère le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
H(\mathrm{T}^{i-1}(P)) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H(\mathrm{T}^i(M)) \arrow[r, "H(\mathrm{T}^i(s))", "\simeq"'] & H(\mathrm{T}^i(N)) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H(\mathrm{T}^i(P)) \\
& \underbrace{0}_{\operatorname{Ker} H(\mathrm{T}^i(s))} \arrow[ur] & & & \underbrace{0}_{\operatorname{Coker} H(\mathrm{T}^i(s))} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, on obtient les suites exactes $H(\mathrm{T}^i(N)) \xrightarrow{0} H(\mathrm{T}^i(P)) \xrightarrow{0} H(\mathrm{T}^{i+1}(M))$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. Donc $H(\mathrm{T}^i(P)) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Mais alors $H(\mathrm{T}^i(t))$ sont inversibles pour tout $i \in \mathbb{Z}$, donc $t \in \mathrm{S}$.

Prouvons la condition (RD2). Comme on est dans une catégorie additive, cette condition est simplifiée : étant donné $a \in \mathrm{K}$ et $s \in \mathrm{S}$ satisfaisant $s \circ a = 0$, on doit trouver $t \in \mathrm{S}$ satisfaisant $a \circ t = 0$.

Supposons avoir $L \xrightarrow{a} M \xrightarrow{s} N$. On prend le triangle distingué construit sur s et on le tourne pour trouver $P \xrightarrow{b} M \xrightarrow{s} N \to \mathrm{T}(P)$. On obtient la suite exacte

$$\operatorname{Hom}_{\mathrm{K}}(L, P) \xrightarrow{b\circ(-)} \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}}(L, M) \xrightarrow{s\circ(-)} \operatorname{Hom}_{\mathrm{K}}(L, N).$$

Comme $s \circ a = 0$, il existe $c \colon L \to P$ tel que $a = b \circ v$. On prend maintenant le triangle distingué construit sur c et on le tourne pour trouver $K \xrightarrow{t} L \xrightarrow{c} P \to \mathrm{T}(K)$. On sait que $c \circ t = 0$, donc $a \circ t = b \circ c \circ t = 0$. Or $s \in \mathrm{S}$ implique que $H(\mathrm{T}^i(P)) = 0$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$ qui implique à son tours $t \in \mathrm{S}$.

Les versions à gauche (LD1) et (LD2) se prouvent de la même façon.

$\square$

Définition 7.1.2. Un *ensemble de dénominateurs d'origine cohomologique* dans K est un ensemble de dénominateurs $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{K}$ issu d'un foncteur cohomologique H, comme dans la proposition précédente. Les morphismes dans S sont appelés *quasi-isomorphismes relatifs à H*.

Théorème 7.1.3. *Soit* (K,T) *une catégorie triangulée, soit* S *un ensemble de dénominateurs d'origine cohomologique dans* K*, et soit* $(Q,\tau)\colon (\mathrm{K},\mathrm{T}) \to (\mathrm{K}_\mathrm{S},\mathrm{T}_\mathrm{S})$ *le foncteur* T*-additif de la proposition* (6.3.2)*. Alors la catégorie* T*-additive* $(\mathrm{K}_\mathrm{S},\mathrm{T}_\mathrm{S})$ *a une structure triangulée unique telle que les deux propriétés suivantes tiennent :*

(1) La paire (Q,τ) *est un foncteur triangulé.*

(2) Supposons que $(\mathrm{K}',\mathrm{T}')$ *est une autre catégorie triangulée, et* $(F,\nu)\colon (\mathrm{K},\mathrm{T}) \to (\mathrm{K}',\mathrm{T}')$ *est un foncteur triangulé, tel que* $F(s)$ *est inversible pour tout* $s \in \mathrm{S}$*. Soit* $(F_\mathrm{S},\nu_\mathrm{S})\colon (\mathrm{K}_\mathrm{S},\mathrm{T}_\mathrm{S}) \to (\mathrm{K}',\mathrm{T}')$ *le foncteur* T*-additif de la proposition* (6.3.3)*. Alors* $(F_\mathrm{S},\nu_\mathrm{S})$ *est un foncteur triangulé.*

Preuve. [8, Theorem 7.1.3].

□

Proposition 7.1.4. *On se place sous les conditions du théorème et de la proposition précédentes.*

(1) Le foncteur cohomologique $H\colon \mathrm{K} \to \mathrm{M}$ *se factorise en* $H = H_\mathrm{S} \circ Q$*, où* $H_\mathrm{S}\colon \mathrm{K}_\mathrm{S} \to \mathrm{M}$ *est un foncteur cohomologique.*

(2) Soit M *un objet de* K*. L'objet* $Q(M)$ *est nul dans* K_S *si et seulement si les objets* $H(\mathrm{T}^i((M))$ *sont nuls dans* M *pour tout* i*.*

Preuve. *(1) :* L'existence et l'unicité du foncteur $H\mathrm{S}$ sont par la propriété universelle (Loc3). Soit $K \to M \to N \to \mathrm{T}(K)$ un triangle distingué dans K_S, alors on peut supposer qu'il est $K \xrightarrow{Q(a)} M \xrightarrow{Q(b)} N \xrightarrow{Q(c)} \mathrm{T}(K)$ avec $a,b,c \in \mathrm{K}$. Alors lorsqu'on applique H_S on obtient $H_\mathrm{S}(K) \xrightarrow{H_\mathrm{S}(Q(a))} H_\mathrm{S}(M) \xrightarrow{H_\mathrm{S}(Q(b))} H_\mathrm{S}(N)$ i.e. $H(K) \xrightarrow{H(a)} H(M) \xrightarrow{H(b)} H(N) \xrightarrow{H(c)}$, qui est exacte puisque H est cohomologique.

(2) : Puisque H_S est un foncteur additif, si $Q(M) = 0$, alors $H(M) = H_\mathrm{S}(Q(M))$ aussi. Et bien sûr $Q(M) = 0$ si et seulement si $Q(\mathrm{T}^i(M)) = 0$ pour tout i.

Pour la réciproque, soit $\phi\colon 0 \to M$ le morphisme nul dans K. Si $H(\mathrm{T}^i(M)) = 0$ pour tout i, alors $H(\mathrm{T}^i(\phi))\colon 0 \to H(\mathrm{T}^i(M))$ sont des isomorphismes pour tout i. Alors $\phi \in \mathrm{S}$, et donc $Q(\phi)\colon 0 \to Q(M)$ est un isomorphisme dans K_S.

□

Proposition 7.1.5. *Soit* K *une catégorie triangulée, soit* S *un ensemble de dénominateurs d'origine cohomologique dans* K*, et soit* K' *une sous-catégorie triangulée pleine de* K*. Alors* $\mathrm{S}' := \mathrm{K}' \cap \mathrm{S}$ *est un ensemble de dénominateurs d'origine cohomologique dans* K'*, la localisation d'Ore* $\mathrm{K}'_{\mathrm{S}'}$ *existe et* $\mathrm{K}'_{\mathrm{S}'}$ *est une catégorie triangulée.*

Preuve. Soit $H\colon \mathrm{K} \to \mathrm{M}$ un foncteur cohomologique qui détermine S. Le foncteur $H|_{K'}\colon \mathrm{K}' \to \mathrm{M}$ est aussi cohomologique, et l'ensemble des morphismes S' vérifie

$$S' = \{s \in \mathrm{K}' \mid H|_{\mathrm{K}'}(\mathrm{T}^i(s)) \text{ est inversible pour tout } i \in \mathbb{Z}\}.$$

Donc on applique (7.1.1) et (7.1.3).

□

Dans la proposition, le foncteur de localisation est noté $Q'\colon \mathrm{K}' \to \mathrm{K}'_{\mathrm{S}'}$.

Proposition 7.1.6. *Dans la situation de la proposition précédente, soit* $F\colon \mathrm{K}' \to \mathrm{E}$ *un foncteur triangulé vers une catégorie triangulée* E*. Supposons que pour tout* $s \in \mathrm{S}'$*, le morphisme* $F(s)$ *est un isomorphisme dans* E*. Alors il existe un unique foncteur triangulé* $F_{\mathrm{S}'}\colon \mathrm{K}'_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{E}$ *qui prolonge* F *;* $F_{\mathrm{S}'} \circ Q' = F$ *comme foncteurs* $\mathrm{K}' \to \mathrm{E}$*.*

Proposition 7.1.7. *C'est vu dans la preuve de* (7.1.3)*.*

□

En particulier on peut regarder le foncteur $F\colon \mathrm{K}' \xrightarrow{\mathrm{inc}} \mathrm{K} \xrightarrow{Q} \mathrm{K}_\mathrm{S}$, et son extension $F_{\mathrm{S}'}\colon \mathrm{K}'_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{K}_\mathrm{S}$. On s'intéresse aux conditions suffisantes pour que le foncteur $F_{\mathrm{S}'}$ soit pleinement fidèle.

Proposition 7.1.8. *Soit* K *une catégorie triangulée, soit* S *un ensemble de dénominateurs d'origine cohomologique dans* K*, et soit* $K' \subseteq \mathrm{K}$ *une sous-catégorie triangulée pleine. Définissons* $\mathrm{S}' := \mathrm{K}' \cap \mathrm{S}$*. Supposons que l'une de conditions suivantes soit satisfaite :*

(1) Soit $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K})$*. S'il existe un morphisme* $s\colon M \to L$ *dans* S *avec* $L \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K}')$*, alors il existe un morphisme* $t\colon K \to M$ *dans* S *avec* $K \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K}')$*.*

(2) Soit $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K})$*. S'il existe un morphisme* $s\colon L \to M$ *dans* S *avec* $L \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K}')$*, alors il existe un morphisme* $t\colon M \to K$ *dans* S *avec* $K \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K}')$*.*

Alors le foncteur $F_{\mathrm{S}'}\colon \mathrm{K}'_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{K}_\mathrm{S}$ *est pleinement fidèle.*

Preuve. On sait que S' un ensemble dénominateur d'origine cohomologique, donc il est un ensemble dénominateur à gauche et à droite dans K'. Ainsi, on applique la proposition (6.2.17) dans le cas *(1)* pour voir que $F_{\mathrm{S}'}\colon \mathrm{K}'_{\mathrm{S}'} \to \mathrm{K}_{\mathrm{S}}$ est pleinement fidèle.

En passant aux catégories opposées, on conclut avec la condition *(2)*.

□

7.2. **Définition de la Catégorie Dérivée.**

On spécialise maintenant à la catégorie triangulée $K = \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. On rappelle qu'on a le foncteur de cohomologie $\mathrm{H}\colon \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$. Alors par les définitions, il est facile de voir le lemme suivant.

Lemme 7.2.1. *Supposons que $\phi, \psi\colon M \to N$ soient des morphismes dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ tels que $\psi - \phi$ soit un cobord dans $\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M, N)$. Alors $\mathrm{H}(\phi) = \mathrm{H}(\psi)$, comme morphismes de $\mathrm{H}(M) \to \mathrm{H}(N)$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$.*

Ainsi, il existe un foncteur induit

$$\mathrm{H}\colon \mathbf{K}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M}). \tag{7.2.2}$$

On s'intéressera à sa composante de degré 0, H^0. Bien entendu, toutes les autres composantes peuvent être récupérées à partir de H^0 grâce au foncteur de translation : $\mathrm{H}^i = \mathrm{H}^0 \circ \mathrm{T}^i$.

Proposition 7.2.3. *Soit* M *une catégorie abélienne et soit A un anneau DG. Alors le foncteur $\mathrm{H}^0\colon \mathbf{K}(A, \mathrm{M}) \to$ M est cohomologique.*

Preuve. Il est clair que H^0 est additif. Considérons un triangle distingué

$$L \xrightarrow{\alpha} M \xrightarrow{\beta} N \xrightarrow{\gamma} \mathrm{T}(L)$$

dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. On doit montrer que

$$\mathrm{H}^0(L) \xrightarrow{\mathrm{H}^0(\alpha)} \mathrm{H}^0(M) \xrightarrow{\mathrm{H}^0(\beta)} \mathrm{H}^0(N)$$

est exacte dans M.

On peut supposer que le triangle distingué est image d'un triangle standard dans $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$, donc que $N = \mathrm{Cone}(\alpha)$ et les morphismes sont $\beta = e_\alpha$ et $\gamma = p_\alpha$. En notation matricielle on a $N = \begin{bmatrix} M \\ \mathrm{T}(L) \end{bmatrix}$, $\mathrm{d}_N = \begin{bmatrix} \mathrm{d}_M & \alpha \circ \mathrm{t}_L^{-1} \\ 0 & \mathrm{d}_{\mathrm{T}(L)} \end{bmatrix}$ et $\beta = \begin{bmatrix} \mathrm{id}_M \\ 0 \end{bmatrix}$.

On note $\bar\beta := \mathrm{H}^0(\beta)$ et $\alpha := \mathrm{H}^0(\alpha)$. Alors comme on a un triangle distingué on a $\beta \circ \alpha = 0$, donc $\bar\beta \circ \bar\alpha = 0$. Donc il reste a voir l'inclusion inverse. Pour cela on travaille dans le cas de la catégorie des modules grâce au théorème de Freyd-Mitchell.

Soit $\bar m \in \mathrm{Ker}(\bar\beta)$, alors $\bar m \in \mathrm{H}^0(M)$ et $\bar\beta(\bar m) = 0$. Soit $m \in \mathrm{Z}^0(M)$ tel que $\pi_M(m) = \bar m$, alors en notation matricielle

$$\beta(m) = \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Z}^0(N) \subseteq N^0 = \begin{bmatrix} M^0 \\ L^1 \end{bmatrix}.$$

Comme $\bar\beta(\bar m) = \pi_M(\beta(m)) = 0$ dans $\mathrm{H}^0(M)$ nous donne un $n \in N^{-1}$ tel que $\mathrm{d}_N(n) = \beta(m)$. En notation matricielle, $n = \begin{bmatrix} m' \\ l \end{bmatrix}$ avec $m' \in M^{-1}$ et $l \in L^0$. Donc

$$\begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}_M & \alpha \\ 0 & -\mathrm{d}_L \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m' \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}_M(m') + \alpha(l) \\ -\mathrm{d}_L(l) \end{bmatrix}.$$

Ainsi, $l \in \mathrm{Z}^0(L)$. Lorsqu'on prend sa classe, $\bar l := \pi_L(l) \in \mathrm{H}^0(L)$, on obtient

$$\bar\alpha(\bar l) = \pi_M(\alpha(l)) = \pi_M(m - \mathrm{d}_M(m')) = \pi_M(m) = \bar m$$

dans $\mathrm{H}^0(M)$ comme souhaité.

□

Définition 7.2.4. Un morphisme ϕ dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ est appelé un *quasi-isomorphisme* si les morphismes $\mathrm{H}^i(\phi)$ dans M sont des isomorphismes pour tout i. L'ensemble des quasi-isomorphismes dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ est noté $\mathbf{S}(A, \mathrm{M})$.

Le foncteur H^0 étant cohomologique, $\mathbf{S}(A, \mathrm{M})$ est un ensemble de dénominateurs d'origine cohomologique (Proposition (7.1.1)) ; donc le théorème (7.1.3) s'y applique, et la définition suivante a du sens.

Définition 7.2.5. Soient M une catégorie abélienne $\mathbb{K}$-linéaire et A un anneau DG. La *catégorie dérivée des DG A-modules dans* M est la catégorie triangulée $\mathbb{K}$-linéaire

$$\mathbf{D}(A, \mathrm{M}) := \mathbf{K}(A, \mathrm{M})_{\mathbf{S}(A,\mathrm{M})}.$$

Le foncteur de localisation triangulé correspondant est

$$Q\colon \mathbf{K}(A, \mathrm{M}) \to \mathbf{D}(A, \mathrm{M}).$$

On a aussi le foncteur additif $\mathrm{P}\colon \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ qui envoie un morphisme strict de DG modules à sa classe d'homotopie.

Définition 7.2.6. Soient M une catégorie abélienne et A un anneau DG. On défini le foncteur

$$\tilde{Q} \coloneqq Q \circ P\colon \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{D}(A,\mathrm{M}).$$

On obtient ainsi un digramme commutatif de foncteurs additifs

$$\begin{tikzcd} \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M}) \arrow[r, "\mathrm{P}"'] \arrow[rr, bend left, "\tilde{Q}"] & \mathbf{K}(A,\mathrm{M}) \arrow[r, "Q"'] & \mathbf{D}(A,\mathrm{M}) \end{tikzcd} \tag{7.2.7}$$

qui sont toute l'identité sur les objets.

Il est parfois commode de décrire les morphismes dans $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$ en fonction du foncteur $\bar{Q}$. Un morphisme $s \in \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$ est appelé un quasi-isomorphisme si $\mathrm{P}(s)$ est un quasi-isomorphisme dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$; c'est-à-dire si $\mathrm{H}(s)$ est un isomorphisme de $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$.

Proposition 7.2.8. *(1) Tout morphisme ϕ dans $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$ peut s'écrire comme une fraction à droite $\phi = \tilde{Q}(a) \circ \tilde{Q}(s)^{-1}$ où $a, s \in \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$ et s est un quasi-isomorphisme.*

(2) Soit $a \in \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$. Alors $\tilde{Q}(a) = 0$ dans $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$ ssi il existe un quasi-isomorphisme s dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$ tel que $a \circ s$ est un cobord dans $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$.

Preuve. *(1) :* Découle du fait que P est plein et de (RO3).

(2) : Écrivons $\bar{a} \coloneqq \mathrm{P}(a) \in \mathbf{K}(A,\mathrm{M})$. Puisque $Q(\bar{a}) = 0$, d'après (RO4), il existe un quasi-isomorphisme $\bar{s} \in \mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ tel que $\bar{a} \circ \bar{s} = 0$ dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$. On choisi un quasi-isomorphisme $s \in \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$ tel que $\bar{s} = \mathrm{P}(s)$. Alors $\mathrm{P}(a \circ s) = 0$, et cela signifie que $a \circ s$ est un cobord.

□

Bien sûr, il existe une version gauche de cette proposition.

Définition 7.2.9. Un foncteur $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ entre catégories est dit *conservateur* si pour tout morphisme ϕ dans C, ϕ est un isomorphisme si et seulement si $F(\phi)$ est un isomorphisme

D'après la proposition (7.1.4) le foncteur de cohomologie s'étend uniquement à un foncteur

$$\mathrm{H}\colon \mathbf{D}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M}). \tag{7.2.10}$$

Corollaire 7.2.11. *Le foncteur $\mathrm{H}\colon \mathbf{D}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$ est conservateur.*

Preuve. Une implication est triviale. Pour l'autre implication, supposons que ϕ est un morphisme dans $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$ tel que $\mathrm{H}(\phi)$ est un isomorphisme. On peut écrire ϕ sous la forme d'une fraction à droite : $\phi = Q(a) \circ Q(s)^{-1}$, où $a \in \mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ et $s \in \mathbf{S}(A,\mathrm{M})$. Alors $\mathrm{H}(\phi) = \mathrm{H}(Q(a)) \circ \mathrm{H}(Q(s))^{-1}$, et on voit que $\mathrm{H}(Q(a))$ est un isomorphisme. Mais $\mathrm{H}(a) = \mathrm{H}(Q(a))$, donc en fait $a \in \mathbf{S}(A,\mathrm{M})$ aussi. Donc $Q(a)$ est un isomorphisme dans $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$. Il s'ensuit que ϕ est un isomorphisme dans $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$.

□

Remarque. Ici $\mathrm{M} = \mathbf{M}(\mathbb{K})$, donc $\mathbf{K}(A,\mathrm{M}) = \mathbf{K}(A)$. Alors le foncteur $\mathrm{H}^0\colon \mathbf{K}(A) \to \mathbf{M}(\mathbb{K})$ est coréprésentable par l'objet $A \in \mathbf{K}(A)$. Autrement dit, $\mathrm{H}^0 \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(A,-)$. En effet, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(A,M) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}_A(A,M)) \cong \mathrm{H}^0(M)$, puisqu'on s'intéresse aux morphismes strictes tels que $\phi \circ f_A(a) = f_M(a) \circ \phi$, donc $\phi \mapsto \phi(1)$ nous donne la bijection. Reste a montrer qu'elle est naturelle. On le voit grâce au diagramme suivant pour $\phi\colon M \to N$,

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(A,M) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\mathrm{id},\phi)"'] & \mathrm{H}^0(M) \arrow[d, "\mathrm{H}^0(\phi)"] \\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(A,N) \arrow[r] & \mathrm{H}^0(N) \end{tikzcd},$$

qui commute car un chemin nous donne $\phi \circ f(1)$ et l'autre $\phi(f(1))$.

7.3. Conditions de Délimitation dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$.

Définition 7.3.1. Nous définissons $\mathbf{K}^-(A,\mathrm{M})$, $\mathbf{K}^+(A,\mathrm{M})$ et $\mathbf{K}^{\mathrm{b}}(A,\mathrm{M})$ comme étant les sous-catégories pleines de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ consistant respectivement en les DG modules bornés au-dessus, bornés en dessous et bornés.

Bien sûr, $\mathbf{K}^{\mathrm{b}}(A,\mathrm{M}) = \mathbf{K}^-(A,\mathrm{M}) \cap \mathbf{K}^+(A,\mathrm{M})$. Les sous-catégories $\mathbf{K}^\star(A,\mathrm{M})$, pour $\star \in \{-,+,\mathrm{b}\}$, sont des sous-catégories triangulées pleine de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$; en effet, les opérations de translation et de cône préservent les différentes conditions de délimitation. On note que $\mathbf{K}^\star(A,\mathrm{M}) = \mathrm{Ho}(\mathbf{C}^\star(A,\mathrm{M}))$.

Soit $\mathbf{S}^\star(A,\mathrm{M}) \coloneqq \mathbf{K}^\star(A,\mathrm{M}) \cap \mathbf{S}(A,\mathrm{M})$, la catégorie des quasi-isomorphismes dans $\mathbf{K}^\star(A,\mathrm{M})$. Le théorème (7.1.3) s'applique ici, on peut donc localiser

Définition 7.3.2. Pour $\star \in \{-,+,\mathrm{b}\}$ on pose
$$\mathbf{D}^\star(A,\mathrm{M}) := \mathbf{K}^\star(A,\mathrm{M})_{\mathbf{S}^\star(A,\mathrm{M})},$$
la localisation d'Ore de $\mathbf{K}^\star(A,\mathrm{M})$ par rapport à $\mathbf{S}^\star(A,\mathrm{M})$

Voici un autre type de condition de délimitation.

Définition 7.3.3. Pour $\star \in \{-,+,\mathrm{b}\}$ on pose $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})^\star$ comme étant la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$ des complexes M dont la cohomologie $\mathrm{H}(M)$ est bornée de type $\star$.

Bien sûr, $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})^\star$ est une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$.

Proposition 7.3.4. *Soit* $0 \to L \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} N \to 0$ *une suite exacte courte dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$. *Alors il existe un morphisme* $\theta\colon N \to \mathrm{T}(L)$ *dans* $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$ *tel que* $L \xrightarrow{Q(\phi)} M \xrightarrow{Q(\psi)} N \xrightarrow{\theta} \mathrm{T}(L)$ *soit un triangle distinguée dans* $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$.

Preuve. [8, Proposition 7.3.5].

□

Définition 7.3.5. Soit $M \in \mathbf{C}(M)$ et $i \in \mathbb{Z}$. La *troncature intelligente de* M *en dessous de* i est le complexe
$$\mathrm{smt}^{\leqslant i}(M) := (\cdots \to M^{i-2} \xrightarrow{\mathrm{d}} M^{i-1} \xrightarrow{\mathrm{d}} \mathrm{Z}^i(M) \to 0 \to \cdots).$$
La *troncature intelligente de* M *au dessus de* i est le complexe
$$\mathrm{smt}^{\geqslant i}(M) := (\cdots \to 0 \to \mathrm{Y}^i(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} M^{i+1} \xrightarrow{\mathrm{d}} M^{i+2} \to \cdots).$$

Notons que $\mathrm{smt}^{\leqslant i}(M)$ est un sous-complexe de M, alors que $\mathrm{smt}^{\geqslant i}(M)$ est un complexe quotient de M. En notant l'inclusion et la projection par e et p, respectivement, on obtient une suite
$$\mathrm{smt}^{\leqslant i}(M) \xrightarrow{e} M \xrightarrow{p} \mathrm{smt}^{\geqslant i+1}(M)$$
dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$. Cette suite est fonctorielle en M, mais n'est pas une suite exacte en général.

Rappelons qu'un DG anneau A est dit non positif si $A^i = 0$ pour tout $i > 0$.

Proposition 7.3.6. *Soit A un DG anneau non positif*

(1) La différentielle de tout $M \in \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$ *est* A^0*-linéaire.*

(2) Les troncatures intelligentes sont des foncteurs de $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$ *vers elle-même.*

Preuve. Le point *(2)* est clair. Soit $f\colon A \to \mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M)$ et $a \in A^0$, alors
$$\mathrm{d}(f(a)) = \mathrm{d}_M \circ f(a) - f(a) \circ \mathrm{d}_M,$$
ce qui nous donne, du fait que f est un homomorphisme de DG anneaux,
$$f(\mathrm{d}_A(a)) = \mathrm{d}_M \circ f(a) - f(a) \circ \mathrm{d}_M\,.$$
Ainsi, $\mathrm{d}_A(a) \in A^1 = 0$, donc on $\mathrm{d}_M \circ f(a) = f(a) \circ \mathrm{d}_M$ i.e. la A^0-linéarité.

□

Proposition 7.3.7. *Supposons que A est non positif. Pour tout* $M \in \mathbf{C}(A,\mathrm{M})$ *il existe un triangle distingué*
$$\mathrm{smt}^{\leqslant i}(M) \xrightarrow{e} M \xrightarrow{p} \mathrm{smt}^{\geqslant i+1}(M) \xrightarrow{\theta} \mathrm{T}(\mathrm{smt}^{\leqslant i}(M))$$
dans $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$. *Aussi,* $\mathrm{H}^j(e)\colon \mathrm{H}^j(\mathrm{smt}^{\leqslant i}(M)) \to \mathrm{H}^j(M)$ *est un isomorphisme dans* M *pour tout* $j \leqslant i$, *et* $\mathrm{H}^j(p)\colon \mathrm{H}^j(M) \to \mathrm{H}^j(\mathrm{smt}^{\geqslant i+1}(M))$ *est un isomorphisme dans* M *pour tout* $j \geqslant i+1$.

Preuve. Les résultats concernant $\mathrm{H}^j(e)$ et $\mathrm{H}^j(p)$ sont triviales à vérifier. Il existe une suite exacte courte
$$0 \to \mathrm{smt}^{\leqslant i}(M) \xrightarrow{e} M \xrightarrow{p'} N \to 0$$
dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$, où
$$N := (\cdots \to M^i/\,\mathrm{Z}^i(M) \xrightarrow{\mathrm{d}} M^{i+1} \xrightarrow{\mathrm{d}} M^{i+2} \cdots)/$$
D'après la proposition (7.3.4), on obtient un triangle distingué
$$\mathrm{smt}^{\leqslant i}(M) \xrightarrow{e} M \xrightarrow{p'} N \xrightarrow{\theta'} \mathrm{T}(\mathrm{smt}^{\leqslant i}(M))$$
dans $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$. Ensuite, il existe un quasi-isomorphisme évident $\phi\colon N \to \mathrm{smt}^{\geqslant i+1}(M)$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$ tel que $p = \phi \circ p'$. On définit le morphisme dans $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})$
$$\theta := \theta' \circ Q(\phi)^{-1}\colon\ \mathrm{smt}^{\geqslant i+1}(M) \to \mathrm{T}(\mathrm{smt}^{\leqslant i}(M).$$

□

Proposition 7.3.8. *Supposons que A est non positif. Pour $\star \in \{-,+,\mathrm{b}\}$ le foncteur canonique $\mathbf{D}^\star(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{D}(A,\mathrm{M})^\star$ est une équivalence de catégories triangulées.*

Preuve. Ici, nous prouvons que le foncteur $F^-\colon \mathbf{D}^-(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{D}(A,\mathrm{M})$ est pleinement fidèle. Soit $s\colon M \to L$ un quasi-isomorphisme dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ avec $L \in \mathbf{K}^-(A,\mathrm{M})$. Disons que L est concentré en degrés inférieurs ou égaux à i. Alors $\mathrm{H}^j(M) = \mathrm{H}^j(L) = 0$ pour tout $j > i$. La troncature intelligente $\mathrm{smt}^{\leqslant i}(M)$ appartient à $\mathbf{K}^-(A,\mathrm{M})$, et l'inclusion $t\colon \mathrm{smt}^{\leqslant i}(M) \to M$ est un quasi-isomorphisme. D'après la proposition (7.1.8), avec $\mathrm{K} = \mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ et $\mathrm{K}' = \mathbf{K}^-(A,\mathrm{M})$, et avec la condition *(1)*, on voit que F^- est pleinement fidèle.

Ici, nous prouvons que le foncteur $F^+\colon \mathbf{D}^+(\mathrm{M}) \to \mathbf{D}(\mathrm{M})$ est pleinement fidèle. Soit $s\colon L \to M$ un quasi-isomorphisme dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ avec $L \in \mathbf{K}^+(A,\mathrm{M})$. Disons que L est concentré en degrés $\geqslant i$. Alors $\mathrm{H}^j(M) = \mathrm{H}^j(L) = 0$ pour tout $j < i$. La troncature intelligente $\mathrm{smt}^{\geqslant i}(M)$ appartient à $\mathbf{K}^+(A,\mathrm{M})$, et la projection $t\colon M \to \mathrm{smt}^{\geqslant i}(M)$ est un quasi-isomorphisme. D'après la proposition (7.1.8), avec la condition *(2)*, on voit que F^+ est pleinement fidèle.

Les arguments du premier paragraphe montrent que $\mathbf{D}^\mathrm{b}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{D}^+(A,\mathrm{M})$ est pleinement fidèle. Et le deuxième paragraphe, $\mathbf{D}^+(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{D}(A,\mathrm{M})$ est pleinement fidèle. Donc $\mathbf{D}^\mathrm{b}(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{D}(A,\mathrm{M})$ est pleinement fidèle.

La troncature intelligente montre que le foncteur $\mathbf{D}^\star(A,\mathrm{M}) \to \mathbf{D}(A,\mathrm{M})^\star$ est essentiellement surjectif sur les objets.

□

7.4. **Sous-Catégories Épaisses de** M.

Définition 7.4.1. Soit M une catégorie abélienne. Une *sous-catégorie abélienne épaisse* de M est une sous-catégorie abélienne pleine N fermée par extensions. A savoir si

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

est une suite exacte courte dans M avec $M', M'' \in \mathrm{N}$, alors $M in \mathrm{N}$ aussi.

Proposition 7.4.2. *Soit* M *une catégorie abélienne, et soit* $\mathrm{M}' \subseteq \mathrm{M}$ *une sous-catégorie abélienne épaisse. Supposons que $M_1 \to M_2 \to N \to M_3 \to M_4$ soit une suite exacte dans* M*, et que les objets M_i appartiennent à* M'*. Alors $N in \mathrm{M}'$ aussi.*

Preuve. Pour s'en convaincre il suffit de regarder le diagramme exact

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & N \arrow[rr, "h"] \arrow[dr] & & M_3 \arrow[r, "k"] & M_4 \\
& & \operatorname{Coker} f \arrow[ur] \arrow[dr] & & \operatorname{Coker} k \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ur] & & 0 &
\end{tikzcd} .$$

On a bien $\operatorname{Coker} f$ et $\operatorname{Coker} k$ qui appartiennent à M', donc N aussi.

□

Remarque. On peut voir qu'on a le diagramme commutatif suivant de deux façons,

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] & M \arrow[rr, "g"] \arrow[dr] & & N \\
& & \operatorname{Coker} f \arrow[ur, "\bar{g}"'] \arrow[dr] & \\
& 0 \arrow[ur] & & 0
\end{tikzcd} .$$

Dans la catégorie des modules, avec Freyd-Mitchell, on a $\operatorname{Coker} f = M/\operatorname{Im} f$ et donc $\operatorname{Ker} \bar{g} = \operatorname{Ker} g/\operatorname{Im} f = 0$.

Si non, on peut le voir de façon catégorique, puisque la suite est exacte, on a que $\operatorname{Coker} f = \operatorname{Coim} g = \operatorname{Im} g$, donc on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] & M \arrow[rr, "g"] \arrow[d, two heads] \arrow[dr, two heads] & & N \\
& \operatorname{Coker} f \arrow[r, "\simeq"'] \arrow[urr, dashed] & \operatorname{Coim} g \arrow[r, "\simeq"'] & \operatorname{Im} g \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

et alors la flèche en pointillés est un monomorphisme.

Définition 7.4.3. Soient M une catégorie abélienne et $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{M}$ une sous-catégorie abélienne épaisse. On note $\mathbf{D}_{\mathrm{N}}(\mathrm{M})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}(\mathrm{M})$ constituée des complexes M tels que $\mathrm{H}^i(M) \in \mathrm{N}$ pour tout i.

Étant donné une condition de délimitation $\star$, on écrit $\mathbf{D}^{\star}_{\mathrm{N}}(\mathrm{M}) := \mathbf{D}_{\mathrm{N}}(\mathrm{M}) \cap \mathbf{D}^{\star}(\mathrm{M})$ et $\mathbf{D}_{\mathrm{N}}(\mathrm{M})^{\star} := \mathbf{D}_{\mathrm{N}}(\mathrm{M}) \cap \mathbf{D}(\mathrm{M})^{\star}$.

Proposition 7.4.4. *Si* N *est une sous-catégorie abélienne épaisse de* M *alors* $\mathbf{D}_{\mathrm{N}}(\mathrm{M})$ *est une sous-catégorie triangulée pleine de* $\mathbf{D}(\mathrm{M})$.

Preuve. Il est clair que $\mathbf{D}_{\mathrm{N}}(\mathrm{M})$ est fermé par translations. Supposons maintenant que $M' \to M \to M'' \xrightarrow{\Delta}$ soit un triangle distingué dans $\mathbf{D}(\mathrm{M})$ tel que $M', M \in \mathbf{D}_{\mathrm{N}}(\mathrm{M})$; il faut montrer que M'' est aussi dans $\mathbf{D}_{\mathrm{N}}(\mathrm{M})$. Considérons la suite exacte $\mathrm{H}^i(M') \to \mathrm{H}^i(M) \to \mathrm{H}^i(M'') \to \mathrm{H}^{i+1}(M') \to \mathrm{H}^{i+1}(M)$. Les quatre objets extérieurs appartiennent à N. Puisque N est une sous-catégorie abélienne épaisse de M, il s'ensuit que $\mathrm{H}^i(M'') \in \mathrm{N}$.

□

7.5. **Le Plongement de** M **dans** $\mathbf{D}$(M).

Pour $M, N \in \mathrm{M}$ il n'y a pas de différence entre les $\mathbb{K}$-modules $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(M,N)$, $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}(M)}(M,N)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(M)}(M,N)$. Ainsi les foncteurs canoniques $M \to \mathbf{C}(M)$ et $M \to \mathbf{D}(M)$ sont pleinement fidèles. Il en est de même pour $\mathbf{D}(M)$, mais cela nécessite une preuve.

Soit $\mathbf{D}(M)^0$ la sous-catégorie pleine de $\mathbf{D}(M)$ constituée des complexes dont la cohomologie est concentrée au degré 0. C'est une sous-catégorie additive de $\mathbf{D}(M)$.

Proposition 7.5.1. *Le foncteur canonique* $M \to \mathbf{D}(M)^0$ *est une équivalence.*

Preuve. Notons le foncteur canonique $M \to \mathbf{D}(M)^0$ par F. Sous le plongement pleinement fidèle $M \subseteq \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(M)$, F est seulement la restriction du foncteur $\tilde{Q}$.

Le foncteur $\mathrm{H}^0 \colon \mathbf{D}(\mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ vérifie $\mathrm{H}^0 \circ F = \mathrm{Id}_{\mathrm{M}}$. Ceci implique que F est fidèle.

Prouvons que F est pleine. Soient des objets $M, N \in \mathrm{M}$ et un morphisme $q \colon M \to N$ dans $\mathbf{D}(M)$. On sait que $q = \tilde{Q}(a) \circ \tilde{Q}(s)^{-1}$ pour avec $a \colon L \to N$ et $s \colon L \to M$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(M)$, avec s un quasi-isomorphisme. Soit $L' := \mathrm{smt}^{\leqslant 0}(L)$, la troncature intelligente de L. Puisque $L \in \mathbf{D}(M)^0$, l'inclusion $u \colon L' \to L$ est un quasi-isomorphisme dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(M)$. En écrivant $a' := a \circ u$ et $s' := s \circ u$, on voit que s' est un quasi-isomorphisme, et $q = \tilde{Q}(a') \circ \tilde{Q}(s')^{-1}$.

Soit ensuite $L'' := \mathrm{smt}^{\geqslant 0}(L')$, l'autre troncature intelligente. La projection $v \colon L' \to L''$ est un quasi-isomorphisme surjectif dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(M)$. Comme L'' est un complexe concentré en degré 0, on peut le voir comme un objet de M. Les morphismes a' et s' se factorisent en $a' = a'' \circ v$ et $s' = s'' \circ v$, où $a'' \colon L'' \to N$ et $s'' \colon L'' \to M$ sont des morphismes dans M, ce sont $\mathrm{smt}^{\geqslant 0}(a')$ et $\mathrm{smt}^{\geqslant 0}(s')$ respectivement. Or s'' est un quasi-isomorphisme dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(M)$, et donc c'est un isomorphisme dans M. On a donc un morphisme $a'' \circ (s'')^{-1} \colon M \to N$ dans M, et

$$\tilde{Q}(a'' \circ (s'')^{-1}) = \tilde{Q}(a'') \circ \tilde{Q}(s'')^{-1} = \tilde{Q}(a') \circ \tilde{Q}(s')^{-1} = q.$$

Il reste à prouver que tout $L \in \mathbf{D}(\mathrm{M})^0$ est isomorphe, dans $\mathbf{D}(\mathrm{M})$, à un complexe L'' concentré en degré 0. Mais on l'a déjà montré dans les paragraphes précédents.

□

Proposition 7.5.2. *Soit* M *une catégorie abélienne et soit* $0 \to L \xrightarrow{\phi} M \xrightarrow{\psi} N \to 0$ *une suite dans* M. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) Le suite est exacte.

(2) Il existe un triangle distingué $L \xrightarrow{\tilde{Q}(\phi)} M \xrightarrow{\tilde{Q}(\psi)} N \xrightarrow{\theta} \mathrm{T}(L)$ *dans* $\mathbf{D}(\mathrm{M})$.

Preuve. On a déjà vu un sens. Réciproquement, supposons avoir un triangle distingué $L \xrightarrow{\tilde{Q}(\phi)} M \xrightarrow{\tilde{Q}(\psi)} N \xrightarrow{\theta} \mathrm{T}(L)$ dans $\mathbf{D}(\mathrm{M})$. Alors on peut supposer qu'il est isomorphe au triangle $L \xrightarrow{\tilde{Q}(\phi)} M \to \mathrm{Cone}(\phi) \to \mathrm{T}(L)$, et le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "\tilde{Q}(\phi)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & M \arrow[r, "\tilde{Q}(\psi)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{T}(L) \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\ L \arrow[r, "\tilde{Q}(\phi)"] & M \arrow[r] & \mathrm{Cone}(\phi) \arrow[r] & \mathrm{T}(L) \end{tikzcd} .$$

Ainsi, $\mathrm{Cone}(\phi) = M \oplus \mathrm{T}(L) = \cdots \to 0 \xrightarrow{0} L \xrightarrow{\mathrm{d}^{-1}} M \xrightarrow{0} 0 \to \cdots$, avec $\mathrm{d}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \phi \circ \mathrm{t}_L^{-1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \phi$. Donc, $\mathrm{H}^{-1}(\mathrm{Cone}(\phi)) = \mathrm{Ker}\,\phi$ et $\mathrm{H}^0(\mathrm{Cone}(\phi)) = \mathrm{Coker}(L \to \underbrace{\mathrm{Z}^0(M)}_{=M}) = \mathrm{Coker}\,\phi$. En particulier cela nous donne, puisque $\mathrm{H}^i(\mathrm{Cone}(\phi)) = \mathrm{H}^i(N)$ que $\mathrm{Ker}\,\phi = 0$ et $\mathrm{Coker}\,\phi = N$. Remarquons également que vu que $\tilde{Q}(\psi \circ \phi) = 0$ et $L, M, N \in \mathbf{D}(\mathrm{M})^0$, que $\psi \circ \phi = 0$. Donc on a bien que notre suite est exacte.

□

7.6. **La Catégorie Dérivée Opposée est Triangulée.**

Pour les preuves de cette partie voir [8, Section 7.6] On a déjà mit une structure triangulée canonique sur la catégorie d'homotopie opposée $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$. Cette structure est telle que le foncteur d'inversion

$$\mathrm{Flip}\colon \mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}} \to \mathbf{K}(A^{\mathrm{op}},\mathrm{M}^{\mathrm{op}}) = \mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{flip}}$$

est un isomorphisme de catégories triangulées. Dans cette section, on étend cette structure triangulée vers la catégorie dérivée opposée $\mathbf{D}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$.

Pour toute condition de délimitation $\star$, on sait que $\mathbf{K}^{\star}(A,\mathrm{M})$ est une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$. Maintenant, $\mathbf{K}^{\star}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$ est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$ sur les DG modules satisfaisant la condition de délimitation $\star$.

Proposition 7.6.1. *Pour toute condition de délimitation $\star$, la sous-catégorie $\mathbf{K}^{\star}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$ est triangulée dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$.*

Proposition 7.6.2. *Soit $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{M}$ une sous-catégorie abélienne épaisse. Alors $\mathbf{K}_{\mathrm{N}}(\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$ est une sous-catégorie pleine triangulée de $\mathbf{K}(\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$.*

Rappelons que $\mathbf{S}(A,\mathrm{M})$ est l'ensemble des quasi-isomorphismes dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$. Soit $\mathbf{S}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$ l'ensemble des quasi-isomorphismes dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$. Notons qu'être un quasi-isomorphisme n'a rien à voir avec la structure triangulée. Puisqu'un morphisme ψ dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Op}(\psi)$ est un quasi-isomorphisme dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$, on a une bijection $\mathrm{Op}\colon \mathbf{S}(A,\mathrm{M}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{S}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$. On sait que $\mathbf{S}(A,\mathrm{M})$ est un dénominateur à gauche et à droite dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})$. Donc, d'après la proposition (6.2.3), $\mathbf{S}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$ est ensemble dénominateur à gauche et à droite dans $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$.

Proposition 7.6.3. *Soit K^{op} une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$, et définissons $\mathrm{S}^{\mathrm{op}} := \mathrm{K}^{\mathrm{op}} \cap \mathbf{S}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$, l'ensemble des quasi-isomorphismes dans K^{op}. Alors :*

(1) S^{op} est un ensemble de dénominateurs d'origine cohomologique dans K^{op}.

(2) La catégorie localisée $\mathrm{D}^{\mathrm{op}} := (\mathrm{K}^{\mathrm{op}})_{\mathrm{S}^{\mathrm{op}}}$ a une structure triangulée unique t.q. le foncteur de localisation $Q^{\mathrm{op}}\colon \mathrm{K}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{D}^{\mathrm{op}}$ est un foncteur triangulé.

Remarquons que $\mathrm{D}^{\mathrm{op}} = (\mathrm{K}_{\mathrm{S}})^{\mathrm{op}}$. On peut résumer la situation par le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}^{\mathrm{op}}_{\mathrm{str}} \arrow[r, "\mathrm{P}^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "\mathrm{Flip}"', "\simeq"] & \mathrm{K}^{\mathrm{op}} \arrow[r, "Q^{\mathrm{op}}"] \arrow[d, "\mathrm{Flip}"', "\simeq"] & \mathrm{D}^{\mathrm{op}} \arrow[d, "\mathrm{Flip}"', "\simeq"] \\
\mathrm{C}^{\mathrm{flip}}_{\mathrm{str}} \arrow[r, "\mathrm{P}^{\mathrm{flip}}"'] & \mathrm{K}^{\mathrm{flip}} \arrow[r, "Q^{\mathrm{flip}}"'] & \mathrm{D}^{\mathrm{flip}}
\end{tikzcd}$$

Ici C est la sous-catégorie pleine de $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$ sur les objets de K, et $\mathrm{C}^{\mathrm{flip}} := \mathrm{Flip}(\mathrm{C}) \subseteq \mathbf{C}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{flip}} = \mathbf{C}(A^{\mathrm{op}},\mathrm{M}^{\mathrm{op}})$. Tous ces foncteurs sont bijectifs sur les objets. Les verticales sont aussi bijectives sur les morphismes. Les foncteurs marqués sont surjectifs sur les morphismes (c'est-à-dire qu'ils sont pleins). La première flèche verticale est un isomorphisme de catégories abéliennes, et les deux autres flèches verticales sont des isomorphismes de catégories triangulées.

Définition 7.6.4. Soit $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ une sous-catégorie additive pleine t.q. K^{op} est une sous-catégorie triangulée de $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$, et soit $\mathrm{S} := \mathrm{K} \cap \mathbf{S}(A,\mathrm{M})$. La catégorie $\mathrm{D}^{\mathrm{op}} := (\mathrm{K}^{\mathrm{op}})_{\mathrm{S}^{\mathrm{op}}}$ admet la structure triangulée de la proposition précédente.

Pour $\mathrm{K} = \mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ on obtient une structure triangulée sur $\mathrm{D}^{\mathrm{op}} = \mathbf{D}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$.

Définition 7.6.5. Soit $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{K}(A,\mathrm{M})$ une sous-catégorie additive pleine t.q. K^{op} est une sous-catégorie triangulée de $\mathbf{K}(A,\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$. Définissons $\mathrm{D} := \mathrm{K}_{\mathrm{S}}$ et $\mathrm{D}^{\mathrm{op}} := (\mathrm{Kop})_{\mathrm{Sop}}$, où $\mathrm{S} := \mathrm{K} \cap \mathbf{S}(A,\mathrm{M})$. Soit E une catégorie triangulée. Un *foncteur triangulé contravariant* de D vers E est, par définition, un foncteur triangulé $F\colon \mathrm{D}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{E}$.

8. Foncteurs Dérivés

Supposons que $F \colon \mathbf{K}(A, \mathrm{M}) \to \mathrm{E}$ soit un foncteur triangulé. Ici A est un DG anneau, M est une catégorie abélienne et E est une catégorie triangulée. Dans ce chapitre nous définissons les foncteurs dérivés à droite et à gauche $\mathrm{R}F, \mathrm{L}F \colon \mathbf{D}(A, \mathrm{M}) \to \mathrm{E}$ de F. Ce sont aussi des foncteurs triangulés, satisfaisant certaines propriétés universelles. Nous prouverons l'unicité des foncteurs dérivés et leur existence sous des hypothèses appropriées.

Les propriétés universelles des foncteurs dérivés sont mieux exprimées en langage 2-catégorique. On définira les foncteurs dérivés dans le cadre abstrait (par opposition au cadre triangulé) et prouverons les principaux résultats pour eux. Ces résultats seront ensuite spécialisés dans différents contextes : foncteurs triangulés, foncteurs triangulés contravariants et bifoncteurs triangulés.

8.1. **Notation 2-Catégorique.**

Dans ce chapitre, nous allons beaucoup travailler sur les morphismes de foncteurs. Le langage et la notation de la théorie ordinaire des catégories que nous avons utilisés jusqu'à présent ne sont pas adaptés. Par conséquent, nous allons maintenant introduire brièvement les notations de la théorie des *2-catégories*.

Considérons l'ensemble Cat de toutes les catégories. Les aspects théoriques des ensembles sont négligés. L'ensemble Cat est l'ensemble des objets d'une 2-catégorie. Cela signifie que dans Cat, il existe deux types de morphismes : les *1-morphismes* entre objets et les *2-morphismes* entre 1-morphismes. Il existe plusieurs sortes de compositions, et celles-ci ont plusieurs propriétés qu'on verra dans la suite.

Supposons $\mathrm{C}_0, \mathrm{C}_1, \ldots$ sont des catégories, à savoir des objets de Cat. Les 1-morphismes entre eux sont les foncteurs. La notation est usuelle ; $F \colon \mathrm{C}_0 \to \mathrm{C}_1$ désigne un foncteur.

Supposons que $F, G \colon \mathrm{C}_0 \to \mathrm{C}_1$ soient des foncteurs. Les 2-morphismes de F vers G sont les morphismes de foncteurs, et la notation est $\eta \colon F \Rightarrow G$. La double flèche est la notation distinctive des 2-morphismes. En se spécialisant sur un objet $M \in \mathrm{C}_0$ on revient à la notation simple flèche, à savoir $\eta_M \colon F(M) \to G(M)$ est le morphisme correspondant dans C_1. Le schéma qui le représente est

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}_0 \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathrm{C}_1 \end{tikzcd} .$$

Nous appellerons un tel diagramme un *2-diagramme*.

Chaque objet (catégorie) C a son 1-morphisme identité $\mathrm{Id}_{\mathrm{C}} \colon \mathrm{C} \to \mathrm{C}$. Chaque 1-morphisme F a son 2-morphisme identité $\mathrm{id}_F \colon F \Rightarrow F$.

Considérons maintenant les compositions. Pour les foncteurs il n'y a rien de nouveau : étant donnés les foncteurs $F_1 \colon \mathrm{C}_0 \to \mathrm{C}_1$ et $F_2 \colon \mathrm{C}_1 \to \mathrm{C}_2$, leur composition, que nous appelons maintenant *composition horizontale*, est le foncteur $F_2 \circ F_1 \colon \mathrm{C}_0 \to \mathrm{C}_2$. Le diagramme est

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}_0 \arrow[r, "F_1"] \arrow[rr, bend right, "F_2 \circ F_1"'] & \mathrm{C}_1 \arrow[r, "F_2"] & \mathrm{C}_2 \end{tikzcd} .$$

Cela peut être considéré comme un 1-diagramme commutatif, ou comme un raccourci pour le 2-diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}_0 \arrow[r, "F_1"] \arrow[rr, bend right, "F_2 \circ F_1"'] & \mathrm{C}_1 \arrow[r, "F_2"] \arrow[d, phantom, "\mathrm{id}\Downarrow"] & \mathrm{C}_2 \\ & {} & \end{tikzcd}$$

Supposons que l'on dispose des 1-morphismes $F_i, G_i \colon \mathrm{C}_{i-1} \to \mathrm{C}_i$ et des 2-morphismes $\eta_i \colon F_i \Rightarrow G_i$, tels que :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}_0 \arrow[r, bend left, "F_1"] \arrow[r, bend right, "G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta_1"] & \mathrm{C}_1 \arrow[r, bend left, "F_2"] \arrow[r, bend right, "G_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta_2"] & \mathrm{C}_2 \end{tikzcd}$$

La *composition horizontale* est le morphisme de foncteurs $\eta_2 \circ \eta_1 \colon F_2 \circ F_1 \Rightarrow G_2 \circ G_1$. Le diagramme est

$$\begin{tikzcd} \mathrm{C}_0 \arrow[r, bend left, "F_2 \circ F_1"] \arrow[r, bend right, "G_2 \circ G_1"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta_2 \circ \eta_1"] & \mathrm{C}_2 \end{tikzcd} .$$

Plus précisément, soit $M \in \mathrm{C}_0$, on veut un morphisme dans C_2, de $(F_2 \circ F_1)(M) \to (G_2 \circ G_1)(M)$. On a un choix naturel que l'on prend comme la définition, c'est un des chemin du diagramme commutatif suivant (η_2

est une transformation naturelle)

$$\begin{tikzcd}
(F_2 \circ F_1)(M) \arrow[r, "F_2(\eta_{1,M})"] \arrow[d, "\eta_{2,F_1(M)}"'] & (F_2 \circ G_1)(M) \arrow[d, "\eta_{2,G_1(M)}"] \\
(G_2 \circ F_1)(M) \arrow[r, "G_2(\eta_{1,M})"'] & (G_2 \circ G_1)(M)
\end{tikzcd}.$$

Donc $(\eta_2 \circ \eta_1)_M \coloneqq G_2(\eta_{1,M}) \circ \eta_{2,F_1(M)} = \eta_{2,G_1(M)} \circ F_2(\eta_{1,M})$. Cette loi est associative, et admet $\mathrm{id}_{\mathrm{id}_{\mathrm{C}}}$ comme neutres.

Supposons avoir des 1-morphismes $E, F, G \colon \mathrm{C}_0 \to \mathrm{C}_1$, et des 2-morphismes $\zeta \colon E \Rightarrow F$ et $\eta \colon F \Rightarrow G$. Le diagramme illustrant ceci est

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, bend left=40, "E"{name=E}] \arrow[r, "F"'{name=F, near end}] \arrow[r, bend right=40, "G"'{name=G}] & C_1
\arrow[from=E, to=F, phantom, "\zeta\Downarrow"]
\arrow[from=F, to=G, phantom, "\eta\Downarrow"]
\end{tikzcd}$$

La *composition verticale* de ζ et η est le 2-morphisme $\eta * \zeta \colon E \to G$. Dont la formule explicite est $(\eta * \zeta)_M \coloneqq \eta_M \circ \zeta_M \colon E(M) \to G(M)$. On a le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
C_0 \arrow[r, bend left=40, "E"{name=E}] \arrow[r, bend right=40, "G"'{name=G}] & C_1
\arrow[from=E, to=G, Rightarrow, "\eta * \zeta"]
\end{tikzcd} .$$

Quelque chose de complexe se produit dans la situation illustrée dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{C}_0 \arrow[r, bend left=40, "E_1"{name=E1}] \arrow[r, "F_1"'{name=F1, near end}] \arrow[r, bend right=40, "G_1"'{name=G1}] & \mathrm{C}_1 \arrow[r, bend left=40, "E_2"{name=E2}] \arrow[r, "F_2"'{name=F2, near end}] \arrow[r, bend right=40, "G_2"'{name=G2}] & \mathrm{C}_2
\arrow[from=E1, to=F1, phantom, "\eta_1\Downarrow"]
\arrow[from=F1, to=G1, phantom, "\zeta_1\Downarrow"]
\arrow[from=E2, to=F2, phantom, "\eta_2\Downarrow"]
\arrow[from=F2, to=G2, phantom, "\zeta_2\Downarrow"]
\end{tikzcd} .$$

Il se trouve que

$$(\eta_2 * \zeta_2) \circ (\eta_1 * \zeta_1) = (\eta_2 \circ \eta_1) * (\zeta_2 \circ \zeta_1)$$

en tant que morphismes $E_2 \circ E_1 \Rightarrow G_2 \circ G_1$. C'est ce qu'on appelle la *propriété d'échange.*

En effet, pour s'en convaincre il suffit d'expliciter les morphisme et de considérer le diagramme commutatif suivant,

$$\begin{tikzcd}
(E_2 \circ F_1)(M) \arrow[r, "\zeta_{2,F_1(M)}"] \arrow[d, "E_2(\eta_{1,M})"'] & (F_2 \circ F_1)(M) \arrow[d, "F_2(\eta_{1,M})"] \\
(E_2 \circ G_1)(M) \arrow[r, "\zeta_{2,G_1(M)}"'] & (F_2 \circ G_1)(M)
\end{tikzcd}.$$

Alors,

$$((\eta_2 * \zeta_2) \circ (\eta_1 * \zeta_1))_M = (\eta_2 * \zeta_2)_{G_1(M)} \circ E_2((\eta_1 * \zeta_1)_M) = \eta_{2,G_1(M)} \circ \zeta_{2,G_1(M)} \circ E_2(\eta_{1,M}) \circ E_2(\eta_{1,M})$$

et

$$((\eta_2 \circ \eta_1) * (\zeta_2 \circ \zeta_1))_M = \eta_{2,G_1(M)} \circ F_2(\eta_{1,M}) \circ \zeta_{2,F_1(M)} \circ E_2(\eta_{1,M}).$$

Donc, grâce au diagramme commutatif précédent, on a bien égalité. Cette loi est associative, et admet id_F comme neutres.

Tout comme les catégories abstraites, on peut parler de catégories triangulées. Il existe la 2-catégorie TrCat de toutes les catégories triangulées ($\mathbb{K}$-linéaires). Les objets ici sont les catégories triangulées (K, T) ; les 1-morphismes sont les foncteurs triangulés (F, τ) ; et les 2-morphismes sont les morphismes de foncteurs triangulés η.

8.2. **Catégories de Foncteurs.**

Dans cette partie, tous les problèmes de théorie des ensembles (tailles des ensembles) sont négligés (on les règle introduisant un univers plus grand).

Définition 8.2.1. Étant donné les catégories C et D, soit $\mathrm{Fun}(\mathrm{C}, \mathrm{D})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs $F \colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$. Étant donné les objets $F, G \in \mathrm{Fun}(\mathrm{C}, \mathrm{D})$, les morphismes $\eta \colon F \Rightarrow G$ dans $\mathrm{Fun}(\mathrm{C}, \mathrm{D})$ sont les morphismes de foncteurs.

En termes de le 2-catégorie Cat de la section précédente, C et D sont des objets de Cat ; les objets de Fun(C, D) sont des 1-morphismes dans Cat ; et les morphismes de Fun(C, D) sont les 2-morphismes dans Cat. Ainsi nous avons fait une "réduction d'ordre", de 2 à 1, en passant de Cat à Fun(C, D).

Supposons que $G\colon \mathrm{C}' \to \mathrm{C}$ et $H\colon \mathrm{D} \to \mathrm{D}'$ soient des foncteurs. Il existe un foncteur induit

$$\mathrm{Fun}(G, H)\colon\ \mathrm{Fun}(\mathrm{C}, \mathrm{D}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{C}', \mathrm{D}') \tag{8.2.2}$$

défini par $\mathrm{Fun}(G, H)(F) \coloneqq H \circ F \circ G$, $\mathrm{Fun}(G, H)(\eta\colon F \Rightarrow F') \coloneqq \mathrm{id}_H \circ \eta \circ \mathrm{id}_G$. C'est bien un foncteur, $\mathrm{Fun}(G, H)(\mathrm{id}_F) = \mathrm{id}_H \circ \mathrm{id}_F \circ \mathrm{id}_G = \mathrm{id}_{H \circ F \circ G}$ et $\mathrm{Fun}(G, H)(\zeta * \eta) = \mathrm{id}_H \circ (\zeta \circ \eta) \circ \mathrm{id}_G = \mathrm{id}_H \circ \zeta \circ \mathrm{id}_G * \mathrm{id}_H \circ \eta \circ \mathrm{id}_G = \mathrm{Fun}(G, H)(\zeta) * \mathrm{Fun}(G, H)(\eta)$.

Proposition 8.2.3. *Si G et H sont des équivalences, alors le foncteur* $\mathrm{Fun}(G, H)$ *est une équivalence*

Preuve. Il suffit de voir que si G' et H' sont des quasi-inverses de G et H respectivement, alors $\mathrm{Fun}(G', H')$ est un quasi-inverse de $\mathrm{Fun}(G, H)$.

□

Rappelons que pour une catégorie C et un ensemble multiplicatif de morphismes $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{C}$ on note C_S la localisation. Il vient avec le foncteur de localisation $Q\colon \mathrm{C} \to \mathrm{C}_\mathrm{S}$, qui est l'identité sur les objets.

Pour une catégorie E soit $\mathrm{E}^\times \subseteq \mathrm{E}$ la catégorie des isomorphismes ; il a tous les objets, mais ses morphismes ne sont que les isomorphismes dans E.

Définition 8.2.4. Étant donné les catégories C et E, un ensemble multiplicatif de morphismes $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{C}$, et un foncteur $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{E}$, on dit que F est *localisable dans* S si $F(\mathrm{S}) \subseteq \mathrm{E}^\times$. On note $\mathrm{Fun}_\mathrm{S}(\mathrm{C}, \mathrm{E})$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fun}(\mathrm{C}, \mathrm{E})$ sur les foncteurs localisables en S.

Rappelons qu'un foncteur est un isomorphisme de catégories si et seulement si c'est une équivalence que est bijective sur les ensembles d'objets.

Proposition 8.2.5. *Soient* C *et* E *des catégories, et soit* $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{C}$ *un ensemble multiplicatif de morphismes. Alors le foncteur*

$$\mathrm{Fun}(Q, \mathrm{Id}_\mathrm{E})\colon\ \mathrm{Fun}(\mathrm{C}_\mathrm{S}, \mathrm{E}) \to \mathrm{Fun}_\mathrm{S}(\mathrm{C}, \mathrm{E})$$

est un isomorphisme de catégories.

Preuve. Il est clairement bijectif sur les objets. En effet, pour $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{E}$ tel que $F(\mathrm{S}) \subseteq \mathrm{E}^\times$, alors il existe un unique foncteur $F_\mathrm{S}\colon \mathrm{C}_\mathrm{S} \to \mathrm{E}$ tel que $F = F_\mathrm{S} \circ Q$ i.e. $F = \mathrm{Fun}(Q, \mathrm{Id}_\mathrm{E})(F_\mathrm{S})$.

Pour la bijection sur les morphismes. Soient $F, F'\colon \mathrm{C} \to \mathrm{E}$ et $\eta\colon F \Rightarrow F'$. Alors on cherche une collection $\zeta_M\colon F_\mathrm{S}(M) \to F'_\mathrm{S}(M)$, or on a que $M = Q(M)$, donc cette collection est la même que $\zeta_{Q(M)} = \zeta_M\colon \underbrace{F_\mathrm{S}(Q(M))}_{=F(M)} \to \underbrace{F'_\mathrm{S}(Q(M))}_{=F'(M)}$. Ainsi, $\mathrm{Fun}(Q, \mathrm{Id}_\mathrm{E})(\eta) = \eta_{Q(M)} \circ F_\mathrm{S}(\mathrm{id}_{Q(M)}) = \eta_M$, ce qui nous donne la bijection.

Donc c'est bien un isomorphisme de catégories.

□

Par définition, un bifoncteur $F\colon \mathrm{C} \times \mathrm{D} \to \mathrm{E}$ est un foncteur de la catégorie produit $\mathrm{C} \times \mathrm{D}$. On écrira

$$\mathrm{BiFun}(\mathrm{C} \times \mathrm{D}, \mathrm{E}) \coloneqq \mathrm{Fun}(\mathrm{C} \times \mathrm{D}, \mathrm{E})$$

où dans la première expression rappelle que $\mathrm{C} \times \mathrm{D}$ est un produit. La proposition suivante décrit les bifoncteurs de manière non symétrique.

Proposition 8.2.6. *Soient* C*,* D *et* E *des catégories. Il existe un isomorphisme des catégories*

$$\Xi\colon\ \mathrm{Fun}(\mathrm{C} \times \mathrm{D}, \mathrm{E}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{C}, \mathrm{Fun}(\mathrm{D}, \mathrm{E}))$$

avec la formule suivante : pour un foncteur $F\colon \mathrm{C} \times \mathrm{D} \to \mathrm{E}$*, le foncteur*

$$\Xi(F)\colon \mathrm{C} \to \mathrm{Fun}(\mathrm{D}, \mathrm{E})$$

est $\Xi(F)(C) \coloneqq F(C, -)$*.*

Preuve. Il est clairement bijectif sur les objet, et on a un quasi-inverse évident

□

Proposition 8.2.7. *Soient* C *et* D *des catégories, et soient* $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{C}$ *et* $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{D}$ *des ensembles multiplicatif de morphismes. Alors* $\mathrm{S} \times \mathrm{T}$ *est un ensemble multiplicatif de morphismes dans* $\mathrm{C} \times \mathrm{D}$*, et le foncteur canonique*

$$\Theta\colon (\mathrm{C} \times \mathrm{D})_{\mathrm{S} \times \mathrm{T}} \to \mathrm{C}_\mathrm{S} \times \mathrm{D}_\mathrm{T}$$

est un isomorphisme de catégories.

Preuve. [8, Proposition 8.2.11]

□

On a des simples versification qui nous donnent le résultat suivant, alors les assertions suivantes sont équivalentes.

Proposition 8.2.8. *Sous les condition de la proposition précédentes*

(1) Les ensembles multiplicatif $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{C}$ *et* $\mathrm{T} \subseteq \mathrm{D}$ *sont des ensembles de dénominateurs à gauche (resp. à droite).*

(2) L'ensemble multiplicatif $\mathrm{S} \times \mathrm{T} \subseteq \mathrm{C} \times \mathrm{D}$ *est un ensemble de dénominateurs à gauche (resp. à droite).*

8.3. **Foncteurs Dérivés Abstraits.**

Ici, nous traitons des foncteurs dérivés à droite et à gauche dans une catégorie abstraite

Définition 8.3.1 (Foncteur dérivé à droite)**.** Considérons une catégorie K et un ensemble multiplicatif de morphismes $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{K}$, et le foncteur de localisation $Q\colon \mathrm{K} \to \mathrm{K_S}$. Soit $F\colon \mathrm{K} \to \mathrm{E}$ un foncteur. Un *foncteur dérivé à droite de F par rapport à* S est une paire $(\mathrm{R}F, \eta^{\mathrm{R}})$, où $\mathrm{R}F\colon \mathrm{K_S} \to \mathrm{E}$ est un foncteur et $\eta^{\mathrm{R}}\colon F \Rightarrow \mathrm{R}\,F \circ Q$ est un morphisme de foncteurs, tel que la propriété universelle suivante soit vraie :

(R) Étant donné un couple (G, θ), constitué d'un foncteur $G\colon \mathrm{K_S} \to \mathrm{E}$ et d'un morphisme de foncteurs $\theta\colon F \Rightarrow G \circ Q$, il existe un unique morphisme de foncteurs $\mu\colon \mathrm{R}F \Rightarrow G$ tel que $\theta = (\mu \circ \mathrm{id}_Q) * \eta^{\mathrm{R}}$.

On a le 2-diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \eta^{\mathrm{R}}"] & E \\ \mathrm{K_S} \arrow[ur, "\mathrm{R}F"'] & \end{tikzcd} .$$

Pour un couple (G, θ) il existe un unique morphisme μ qui donne le 2-diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow \eta^{\mathrm{R}}\ \Downarrow\theta"] & E \\ \mathrm{K_S} \arrow[ur, "\mathrm{R}F"'] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3, "\Downarrow\mu"] & \end{tikzcd}$$

tel que le diagramme des 2-morphismes (avec composition *) suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} F \arrow[d, Rightarrow, "\eta^{\mathrm{R}}"'] \arrow[dr, Rightarrow, "\theta"] & \\ \mathrm{R}F \circ Q \arrow[r, Rightarrow, "\mu\circ\mathrm{id}_Q"'] & G \circ Q \end{tikzcd} .$$

Proposition 8.3.2. *Si un foncteur dérivé à droite* $(\mathrm{R}F, \eta^{\mathrm{R}})$ *existe, alors il est unique, à un isomorphisme près. A savoir, si* (G, θ) *est un autre foncteur dérivé à droite de* F*, alors il existe un unique isomorphisme de foncteurs* $\mu\colon \mathrm{R}F \overset{\cong}{\Longrightarrow} G$ *tel que* $\theta = (\mu \circ \mathrm{id}_Q) * \eta^{\mathrm{R}}$.

Preuve. Cela suit de la propriété universelle vérifiée.

□

Théorème 8.3.3 (Existence du Foncteur Dérivé à Droite)**.** *Dans la situation de la définition précédente, suppose avoir une sous-catégorie pleine* $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{K}$ *tel que les trois conditions suivantes soient vérifiées*

(1) L'ensemble multiplicatif S *est un ensemble de dénominateurs à gauche dans* K.

(2) Pour tout objet $M \in \mathrm{K}$ *il existe un morphisme* $\rho\colon M \to I$ *dans* S*, avec* $I \in \mathrm{J}$.

(3) Si ψ *est un morphisme dans* $\mathrm{S} \cap \mathrm{J}$*, alors* $F(\psi)$ *est un isomorphisme dans* E.

Alors le foncteur dérivé

$$(\mathrm{R}F, \eta^{\mathrm{R}})\colon \mathrm{K_S} \to \mathrm{E}$$

existe. De plus, pour tout objet $I \in \mathrm{J}$*, le morphisme*

$$\eta^{\mathrm{R}}_I\colon F(I) \to \mathrm{R}F(I)$$

dans E *est un isomorphisme.*

La condition *(2)* dit que K *a suffisamment de* J*-résolutions à droite.* La condition *(3)* dit que J *est une catégorie* F*-acyclique.*

Il nous faut une définition et quelques lemmes avant de donner la preuve du théorème.

Définition 8.3.4. Dans la situation du théorème (8.3.3), par *système de* J*-résolutions à droite* on entend un couple (I,ρ), où $I\colon \mathrm{Ob}(\mathrm{K}) \to \mathrm{Ob}(\mathrm{J})$ est une fonction, et $\rho = \{\rho_M\}_{M\in\mathrm{Ob}(\mathrm{K})}$ est une collection de morphismes $\rho_M\colon M \to I(M)$ dans S. De plus, si $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{J})$, alors $I(M) = M$ et $\rho_M = \mathrm{id}_M$.

Puisqu'ici K a suffisamment de J-résolutions à droite, il s'ensuit que des systèmes de J-résolutions à droite (I,ρ) existent.

Introduisons des nouvelles notations qui rendront les preuves plus lisibles :

(8.3.5)
$$\mathrm{K}' := \mathrm{J},\ \mathrm{S}' := \mathrm{J}\cap\mathrm{S},\ \mathrm{D} := \mathrm{K}_{\mathrm{S}} \text{ et } \mathrm{D}' := \mathrm{K}'_{\mathrm{S}'}.$$

Le foncteur d'inclusion est $U\colon \mathrm{K}' \to \mathrm{K}$, et sa localisation est $V\colon \mathrm{D}' \to \mathrm{D}$. On a le diagramme commutatif

(8.3.6)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}' \arrow[r, "U"] \arrow[d, "Q'"'] & \mathrm{K} \arrow[d, "Q"] \\ \mathrm{D}' \arrow[r, "V"'] & \mathrm{D} \end{tikzcd}$$

Lemme 8.3.7. *L'ensemble multiplicatif* S′ *est un ensemble de dénominateurs à gauche dans* K′*.*

Preuve. Il faut vérifier les conditions (LD1) et (LD2).

(LD1) : Étant donné les morphismes $a'\colon L' \to N'$ dans K′ et $s'\colon L' \to M'$ dans S′, on doit trouver des morphismes $b'\colon M' \to K'$ dans K′ et $t'\colon N' \to K'$ dans S′, tels que $t'\circ a' = b'\circ s'$. Comme $\mathrm{S}\subseteq\mathrm{K}$ satisfait cette condition, on peut trouver des morphismes $b\colon M' \to K$ dans K et $t\colon N' \to K$ dans S tels que $t\circ a' = b\circ s'$. Il existe un morphisme $\rho\colon K \to K'$ dans S avec $K' \in \mathrm{K}'$. Alors les morphismes $t' := \rho\circ t$ et $b' := \rho\circ b$ satisfont $t'\circ a' = b'\circ s'$, et $t' \in \mathrm{S}'$.

(LD2) : Étant donné les morphismes $a', b'\colon M' \to N'$ dans K′ et $s'\colon L' \to M'$ dans S′, qui vérifient $a'\circ s' = b'\circ s'$, on doit trouver un morphisme $t'\colon N' \to K'$ dans S′ tel que $t'\circ a' = t'\circ b'$. Comme $\mathrm{S}\subseteq\mathrm{K}$ satisfait cette condition, on peut trouver un morphisme $t\colon N' \to K$ dans S tel que $t\circ a' = t\circ b'$. Il existe un morphisme $\rho\colon K \to K'$ dans S avec $K' \in \mathrm{K}'$. Alors le morphisme $t' := \rho\circ t$ a la propriété nécessaire.

□

Lemme 8.3.8. *Le foncteur* $V\colon \mathrm{D}' \to \mathrm{D}$ *est une équivalence.*

Preuve. La condition *(2)* du théorème implique que V est essentiellement surjectif sur les objets. Reste à prouver que V est pleinement fidèle. On va utiliser la version gauche de la proposition (6.2.17). D'après le lemme précédent, la version de gauche de la condition *(1)* de la proposition est vérifiée. La condition *(2)* du théorème implique la version gauche de la condition *(2)* de la proposition. Alors la version de gauche de la proposition dit que V est entièrement fidèle.

□

Lemme 8.3.9. *Supposons avoir un système de* K′*-résolutions à droite* (I,ρ)*. Alors la fonction* $I\colon \mathrm{Ob}(\mathrm{K}) \to \mathrm{Ob}(\mathrm{K}')$ *se prolonge uniquement en un foncteur* $I\colon \mathrm{D} \to \mathrm{D}'$*, tel que* $I\circ V = \mathrm{Id}_{\mathrm{D}'}$*, et* $Q(\rho)\colon \mathrm{Id}_{\mathrm{D}} \Rightarrow V\circ I$ *est un isomorphisme de foncteurs. Donc le foncteur* I *est un quasi-inverse de* V*.*

En un 2-diagramme :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{K}' \arrow[r, "Q'"] \arrow[d, "U"'] & \mathrm{D}' \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "V"] & \mathrm{D}' \\ \mathrm{K} \arrow[r, "Q"'] & \mathrm{D} \arrow[u, "I"] \arrow[r, "\mathrm{Id}"'] \arrow[ur, phantom, "Q(\rho)\Uparrow"] & \mathrm{D} \arrow[u, "I"'] \end{tikzcd}.$$

Rappelons que dans un 2-diagramme, un polygone vide signifie qu'il est commutatif, c'est-à-dire qu'il peut être rempli avec $\xRightarrow{\mathrm{id}}$.

Preuve. Considérons un morphisme $\psi\colon M \to N$ dans D. Puisque $V\colon \mathrm{D}' \to \mathrm{D}$ est une équivalence, et puisque $V(I(M)) = I(M)$ et $V(I(N)) = I(N)$, il existe un unique morphisme $I(\psi)\colon I(M) \to I(N)$ dans D′ satisfaisant

(8.3.10)
$$V(I(\psi)) := Q(\rho_N)\circ\psi\circ Q(\rho_M)^{-1},$$

dans D.

Vérifions que $I\colon \mathrm{D} \to \mathrm{D}'$ est bien un foncteur. Déjà, il respecte clairement les identités. Supposons que $\phi\colon L \to M$ et $\psi\colon M \to N$ soient des morphismes dans D. Alors

$$\begin{aligned} V(I(\psi)\circ I(\phi)) &= V(I(\psi))\circ V(I(\phi)) \\ &= (Q(\rho_N)\circ\psi\circ Q(\rho_M)^{-1})\circ(Q(\rho_M)\circ\phi\circ Q(\rho_L)^{-1}) \\ &= Q(\rho_N)\circ(\psi\circ\phi)\circ Q(\rho_L)^{-1} \\ &= V(I(\psi\circ\phi)). \end{aligned}$$

Comme V est une équivalence, il s'ensuit que $I(\psi) \circ I(\phi) = I(\psi \circ \phi)$.

Comme $\rho_{M'}: M' \to I(M')$ est l'identité pour tout objet $M' \in \mathrm{K}'$, on voit qu'il y a égalité $I \circ V = \mathrm{Id}_{\mathrm{D}'}$. Par la formule de définition de $I(\psi)$ on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} V(I(M)) \arrow[r, "V(I(\psi))"] & V(I(N)) \\ M \arrow[u, "Q(\rho_M)"] \arrow[r, "\psi"'] & N \arrow[u, "Q(\rho_N)"'] \end{tikzcd}$$

dans D. Ainsi, $Q(\rho)\colon \mathrm{Id}_{\mathrm{D}} \Rightarrow V \circ I$ est un isomorphisme de foncteurs.

□

Le diagramme (8.3.6) induit un diagramme commutatif de catégories

(8.3.11)
$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fun}(\mathrm{K}', \mathrm{E}) & \mathrm{Fun}(\mathrm{K}, \mathrm{E}) \arrow[l, "\mathrm{Fun}(U,\mathrm{Id})"'] \\ \mathrm{Fun}_{\mathrm{S}'}(\mathrm{K}', \mathrm{E}) \arrow[u, "\text{p.f.}"] & \mathrm{Fun}_{\mathrm{S}}(\mathrm{K}, \mathrm{E}) \arrow[l, "\mathrm{Fun}(U,\mathrm{Id})"', "\text{equiv}"] \arrow[u, "\text{p.f.}"'] \\ \mathrm{Fun}(\mathrm{D}', \mathrm{E}) \arrow[u, "\mathrm{Fun}(Q',\mathrm{Id})", "\text{isom}"'] & \mathrm{Fun}(\mathrm{D}, \mathrm{E}) \arrow[l, "\mathrm{Fun}(V,\mathrm{Id})"', "\text{equiv}"] \arrow[u, "\text{isom}", "\mathrm{Fun}(Q,\mathrm{Id})"'] \end{tikzcd}$$

Les flèches verticales marquées "p.f." sont des plongements pleinement fidèle par définition. Les flèches verticales notées "isom" sont des isomorphismes de catégories. La flèche $\mathrm{Fun}(V, \mathrm{Id})$ dans la ligne du bas est une équivalence. Par conséquent, la flèche $\mathrm{Fun}(U, \mathrm{Id})$ dans la ligne du milieu est aussi une équivalence.

Introduisons la notation $F' := F \circ U\colon \mathrm{K}' \to \mathrm{E}$. Ce foncteur est un objet de la catégorie du milieu à gauche du diagramme précédent, puisque, par la condition *(3)* du théorème (8.3.3), il inverse S'.

Lemme 8.3.12. *Soit $G\colon \mathrm{D} \to \mathrm{E}$ un foncteur. Étant donné un morphisme $\theta'\colon F' \Rightarrow G \circ Q \circ U$ de foncteurs $\mathrm{K}' \to \mathrm{E}$, il existe un unique morphisme $\theta\colon F \Rightarrow G \circ Q$ de foncteurs $\mathrm{K} \to \mathrm{E}$ t.q. $\theta' = \theta \circ \mathrm{id}_U$.*

Notons que G est un objet de la catégorie en bas à droite du diagramme (8.3.11). Les morphismes θ' et θ sont respectivement dans la catégorie au milieu à gauche et en haut à droite de ce diagramme.

Preuve. Pour tout objet $M \in \mathrm{K}$ il existe un morphisme $\rho\colon M \to I$ dans S avec $I \in \mathrm{K}'$. Un morphisme de foncteurs θ vérifiant $\theta' = \theta \circ \mathrm{id}_U$ dera commuter le diagramme :

(8.3.13)
$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "\theta_M"] \arrow[d, "F(\rho)"'] & (G \circ Q)(M) \arrow[d, "\simeq"', "(G\circ Q)(\rho)"] \\ F(I) \arrow[r, "\theta'_I"] & (G \circ Q)(I) \end{tikzcd}$$

On utilise les faits que $I = U(I)$ et que $Q(\rho)$ est un isomorphisme. Ceci prouve l'unicité de θ.

Pour l'existence, choisissons un système de K'-résolutions à droite (I, ρ), et définissons $\theta = \{\theta_M\}$ à l'aide du diagramme précédent, à savoir

(8.3.14)
$$\theta_M := (G \circ Q)(\rho_M)^{-1} \circ \theta'_{I(M)} \circ F(\rho_M).$$

Il faut prouver qu'il s'agit bien d'un morphisme de foncteurs $\mathrm{K} \to \mathrm{E}$. A savoir, pour un morphisme donné $\phi\colon M \to N$ dans K, il faut prouver que le diagramme

(8.3.15)
$$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "\theta_M"] \arrow[d, "F(\phi)"'] & (G \circ Q)(M) \arrow[d, "(G\circ Q)(\phi)"] \\ F(N) \arrow[r, "\theta_N"] & (G \circ Q)(N) \end{tikzcd}$$

dans R est commutatif.

On sait qu'on peut écrire $I(Q(\phi)) \in \mathrm{D}'$ comme la fraction à gauche

(8.3.16)
$$I(Q(\phi)) = Q'(\psi_1)^{-1} \circ Q'(\psi_0)$$

des morphismes $\psi_0 \in \mathrm{K}'$ et $\psi_1 \in \mathrm{S}'$. On obtient les diagrammes suivants

(8.3.17)
$$\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "\phi"] \arrow[d, "\rho_M"] & & N \arrow[d, "\rho_N"] \\
I(M) \arrow[dr, "\psi_0"] & & I(N) \arrow[dl, "\psi_1"'] \\
& J &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[rr, "Q(\phi)"] \arrow[d, "Q(\rho_M)"'] & & N \arrow[d, "Q(\rho_N)"] \\
I(M) \arrow[rr, "V(I(Q(\phi)))"] \arrow[dr, "Q(\psi_0)"'] & & I(N) \arrow[dl, "Q(\psi_1)"] \\
& J &
\end{tikzcd}$$

Le premier diagramme est dans la catégorie K, et il pourrait ne pas être commutatif. Le deuxième diagramme est dans la catégorie D, et il est commutatif : le triangle du bas commute par la formule (8.3.16) et l'égalité $V \circ Q' = Q$; et le carré supérieur commute par la définition de $V(I(Q(\phi)))$. Par condition (LO4) de la localisation d'Ore à gauche $Q\colon \mathrm{K} \to \mathrm{D}$, il existe un morphisme $\psi\colon J \to L$ dans S tel que $\psi \circ \psi_0 \circ \rho_M = \psi \circ \psi_1 \circ \rho_N \circ \phi$ dans K. Il existe le morphisme $\rho_L\colon L \to I(L)$ dans S, où $I(L)$ appartient à K'. Ainsi, après avoir remplacé l'objet J par $I(L)$, le morphisme $\psi 0$ par $\rho_L \circ \psi \circ \psi_0$, et le morphisme ψ_1 par $\rho_L \circ \psi \circ \psi_1$, et en notant que ce dernier est un morphisme dans S', on peut maintenant supposer que le premier diagramme de (8.3.17) est commutatif aussi.

Maintenant on plonge (8.3.15) dans le diagramme (8.3.18) de E.

(8.3.18)
$$\begin{tikzcd}
& F(I(M)) \arrow[r, "\theta'_{I(M)}"] \arrow[dl, bend right, "F(\psi_0)"'] & (G \circ Q)(I(M)) \arrow[dr, bend left, "(G\circ Q)(\psi_0)"] & \\
& F(M) \arrow[r, "\theta_M"] \arrow[u, "F(\rho_M)"] \arrow[d, "F(\phi)"'] & (G \circ Q)(M) \arrow[u, "\simeq"', "(G\circ Q)(\rho_M)"] \arrow[d, "(G\circ Q)(\phi)"] & \\
F(J) & F(N) \arrow[r, "\theta_N"] \arrow[d, "F(\rho_N)"'] & (G \circ Q)(N) \arrow[d, "\simeq"', "(G\circ Q)(\rho_N)"] & (G \circ Q)(J) \\
& F(I(N)) \arrow[r, "\theta'_{I(N)}"'] \arrow[ul, bend left, "\simeq", "F(\psi_1)"'] & (G \circ Q)(I(N)) \arrow[ur, bend right, "\simeq", "(G\circ Q)(\psi_1)"'] &
\end{tikzcd}$$

Puisque $\rho_N \in \mathrm{S}$ et $\psi_1 \in \mathrm{S}'$, les morphismes $(G \circ Q)(\rho_N)$, $(G \circ Q)(\psi_1)$ et $F(\psi_1)$ sont des isomorphismes. Les carrés du haut et du bas dans (8.3.18) sont commutatifs par définition de θ_M et θ_N. Les chemins arrondies gauche et droite (celles où J joue un rôle) sont commutatives car le premier diagramme de (8.3.17) est commutatif.

Puisque $\theta'\colon F' \Rightarrow G \circ Q \circ U$ est un morphisme de foncteurs, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
F(I(M)) \arrow[r, "\theta'_{I(M)}"] \arrow[d, "F(\psi_0)"'] & (G \circ Q)(I(M)) \arrow[d, "(G\circ Q)(\psi_0)"] \\
F(J) \arrow[r, "\theta'_J"] & (G \circ Q)(J) \\
F(I(N)) \arrow[r, "\theta'_{I(N)}"'] \arrow[u, "F(\psi_1)"] & (G \circ Q)(I(N)) \arrow[u, "(G\circ Q)(\psi_1)"']
\end{tikzcd}$$

Lorsqu'on oubli la flèche θ'_J de ce diagramme, on obtient la frontière extérieure du diagramme (8.3.18). Donc le diagramme (8.3.18) est commutatif. En particulier, le carré du milieu est commutatif, et c'est précisément le diagramme (8.3.15).

□

Preuve *du Théorème* (8.3.3). [8, Theorem 8.3.3].

□

Définition 8.3.19. La construction du foncteur dérivé à droite $(\mathrm{R}F, \eta^{\mathrm{R}})$ dans la preuve du théorème (8.3.3), et plus précisément les formules $\mathrm{R}F \coloneqq \mathrm{R}F' \circ I\colon \mathrm{D} \to \mathrm{E}$ et $\eta^{\mathrm{R}}_M \coloneqq F(\rho_M)$, est appelée une *présentation de* $(\mathrm{R}F, \eta^{\mathrm{R}})$ *par le système des* J*-résolutions à droite* (I, ρ).

Passons maintenant aux foncteurs dérivés à gauche.

Définition 8.3.20 (Foncteur dérivé à droite)**.** Considérons une catégorie K et un ensemble multiplicatif de morphismes $\mathrm{S} \subseteq \mathrm{K}$, et le foncteur de localisation $Q\colon \mathrm{K} \to \mathrm{K}_{\mathrm{S}}$. Soit $F\colon \mathrm{K} \to \mathrm{E}$ un foncteur. Un *foncteur dérivé* *à gauche de* F *par rapport à* S est une paire $(\mathrm{L}F, \eta^{\mathrm{L}})$, où $\mathrm{L}F\colon \mathrm{K}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{E}$ est un foncteur et $\eta^{\mathrm{L}}\colon\ \mathrm{L}\,F \circ Q \Rightarrow F$ est un morphisme de foncteurs, tel que la propriété universelle suivante soit vraie :

(L) Étant donné un couple (G, θ), constitué d'un foncteur $G\colon \mathrm{K}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{E}$ et d'un morphisme de foncteurs $\theta\colon G \circ Q \Rightarrow F$, il existe un unique morphisme de foncteurs $\mu\colon G \Rightarrow \mathrm{L}F$ tel que $\theta = \eta^{\mathrm{L}} * (\mu \circ \mathrm{id}_Q)$.

On a le 2-diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] \arrow[dr, phantom, "\eta^{\mathrm{L}}\Uparrow"] & E \\
\mathrm{K}_{\mathrm{S}} \arrow[ur, "\mathrm{L}F"'] &
\end{tikzcd}.$$

Pour un couple (G, θ) il existe un unique morphisme μ qui donne le 2-diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "Q"'] \arrow[dr, phantom, "\eta^{\mathrm{L}}\Uparrow\ \Uparrow\theta"] & E \\
\mathrm{K}_{\mathrm{S}} \arrow[ur, "\mathrm{L}F"] \arrow[ur, bend right=60, "G"'] \arrow[ur, phantom, bend right=30, "\mu\Uparrow"] &
\end{tikzcd}$$

tel que le diagramme des 2-morphismes (avec composition *) suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
F & \\
\mathrm{R}F \circ Q \arrow[u, Rightarrow, "\eta^{\mathrm{L}}"] & G \circ Q \arrow[l, Rightarrow, "\mu\circ\mathrm{id}_Q"] \arrow[ul, Rightarrow, "\theta"']
\end{tikzcd}.$$

On voit qu'un foncteur dérivé à gauche avec domaine d'arrivé E revient à un foncteur dérivé à droite avec domaine d'arrivé E^{op}. Cela signifie qu'on a pas besoin de donner des nouvelle preuves.

Proposition 8.3.21. *Si un foncteur dérivé à gauche* $(\mathrm{L}F, \eta^{\mathrm{L}})$ *existe, alors il est unique, à un isomorphisme près. A savoir, si* (G, θ) *est un autre foncteur dérivé à gauche de* F*, alors il existe un unique isomorphisme de foncteurs* $\mu\colon G \overset{\simeq}{\Longrightarrow} \mathrm{L}F$ *tel que* $\theta = \eta^{\mathrm{L}} * (\mu \circ \mathrm{id}_Q)$.

Théorème 8.3.22. *[Existence du Foncteur Dérivé à Gauche] Dans la situation de la définition précédente, suppose avoir une sous-catégorie pleine* $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{K}$ *tel que les trois conditions suivantes soient vérifiées*

(1) L'ensemble multiplicatif S *est un ensemble de dénominateurs à gauche dans* K.

(2) Pour tout objet $M \in \mathrm{K}$ *il existe un morphisme* $\rho\colon P \to M$ *dans* S*, avec* $P \in \mathrm{P}$.

(3) Si ψ *est un morphisme dans* $\mathrm{S} \cap \mathrm{P}$*, alors* $F(\psi)$ *est un isomorphisme dans* E.

Alors le foncteur dérivé

$$(\mathrm{L}F, \eta^{\mathrm{L}})\colon \mathrm{K}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{E}$$

existe. De plus, pour tout objet $P \in \mathrm{P}$*, le morphisme*

$$\eta^{\mathrm{L}}_P\colon \mathrm{L}F(P) \to F(P)$$

dans E *est un isomorphisme.*

La condition *(2)* dit que K a suffisamment de P-résolutions à gauche. La condition *(3)* dit que P est une catégorie F-acyclique.

Définition 8.3.23. Dans la situation du théorème précédent, par système de P-résolutions à gauche on entend un couple (P, ρ), où $P\colon\ \mathrm{Ob}(\mathrm{K}) \to \mathrm{Ob}(\mathrm{P})$ est une fonction, et $\rho = \{\rho_M\}_{M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K})}$ est une collection de morphismes $\rho_M\colon P(M) \to M$ dans S. De plus, si $M \in \mathrm{Ob}(P)$, alors $P(M) = M$ et $\rho_M = \mathrm{id}_M$.

Lorsque K a suffisamment de P-résolutions à gauche, il existe un système de P-résolutions à gauche (P, ρ).

Définition 8.3.24. La construction du foncteur dérivé à gauche $(\mathrm{L}F, \eta^{\mathrm{L}})$ donne une *présentation de* $(\mathrm{L}F, \eta^{\mathrm{L}})$ *par le système des* P*-résolutions à gauche* (P, ρ).

8.4. **Foncteurs Dérivés Triangulés.**

Dans cette partie on spécialise les définitions et les résultats de la partie précédente au cas des foncteurs triangulés entre catégories triangulées.

Définition 8.4.1. Soient K et L des catégories triangulées. On définit $\mathrm{TrFun}(\mathrm{K},\mathrm{L})$ comme étant la catégorie dont les objets sont les foncteurs triangulés $(F,\tau)\colon \mathrm{K}\to\mathrm{L}$. Étant donnés les objets (F,τ) et (G,ν), les morphismes $\alpha\colon (F,\tau)\Rightarrow(G,\nu)$ dans $\mathrm{TrFun}(\mathrm{K},\mathrm{L})$ sont les morphismes de foncteurs triangulés.

Lemme 8.4.2. *Soit $(F,\tau)\colon (\mathrm{K},\mathrm{T_K})\to(\mathrm{L},\mathrm{T_L})$ un foncteur triangulé entre catégories triangulées. Supposons que F soit une équivalence (de catégories abstraites), de quasi-inverse $G\colon \mathrm{L}\to\mathrm{K}$, et d'isomorphismes d'adjonction $\alpha\colon G\circ F\overset{\cong}{\Longrightarrow}\mathrm{Id_K}$ et $\beta\colon F\circ G\overset{\cong}{\Longrightarrow}\mathrm{Id_L}$. Alors il existe un isomorphisme de foncteurs $\nu\colon G\circ\mathrm{T_L}\overset{\cong}{\Longrightarrow}\mathrm{T_K}\circ G$ tel que $(G,\nu)\colon(\mathrm{L},\mathrm{T_L})\to(\mathrm{K},\mathrm{T_K})$ est un foncteur triangulé, et α et β sont des isomorphismes de foncteurs triangulés.*

Preuve. On a déjà vu que G est un foncteur $\mathbb{K}$-linéaire (c.f. [8, Lemma 8.4.2] pour une autre preuve).

On définit l'isomorphisme de foncteurs ν par la formule

$$\nu := (\alpha\circ\mathrm{id}_{\mathrm{T_K}\circ G})*(\mathrm{id}_G\circ\tau\circ\mathrm{id}_G)^{-1}*(\mathrm{id}_{G\circ\mathrm{T_L}}\circ\beta)^{-1}$$

en termes de notation 2-catégorique. Cela donne lieu à un diagramme commutatif d'isomorphisme

$$\begin{tikzcd}
G\circ\mathrm{T_L}\circ F\circ G \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{id}\circ\beta"'] & G\circ F\circ\mathrm{T_K}\circ G \arrow[l, Rightarrow, "\mathrm{id}\circ\tau\circ\mathrm{id}"'] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha\circ\mathrm{id}"] \\
G\circ\mathrm{T_L} \arrow[r, Rightarrow, "\nu"'] & \mathrm{T_K}\circ G
\end{tikzcd}$$

de foncteurs additifs $\mathrm{L}\to\mathrm{K}$. Donc le couple (G,ν) est un foncteur T-additif.

Vérifions que (G,ν) préserve les triangles distingués. Soit $L\to M\to N\to\mathrm{T_L}(L)$ un triangle distingué dans L, il faut montrer que $G(L)\to G(M)\to G(N)\to\mathrm{T_K}(G(L))$ est un triangle distingué. Pour cela, considérons le triangle distingué construit sur $G(L)\to G(M)$, $G(L)\to G(M)\to C\to\mathrm{T_K}(G(L))$. Alors on a les isomorphismes de triangles distingués

$$\begin{tikzcd}
F(G(L)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & F(G(M)) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & F(C) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{T_L}(F(G(L))) \arrow[d, "\simeq"'] \\
L \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & F(C) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathrm{T_L}(L) \arrow[d, "\simeq"'] \\
L \arrow[r] & M \arrow[r] & N \arrow[r] & \mathrm{T_L}(L)
\end{tikzcd}.$$

Donc $F(C)\cong N$ i.e. $C\cong G(N)$ d'où le résultat.

On a aussi α et β qui sont des morphismes de foncteurs triangulés. Rappelons déjà que les isomorphismes d'adjonction (unité et counité) vérifient les identités triangulaires. À savoir, $\alpha\colon G\circ F\overset{\cong}{\Longrightarrow}\mathrm{Id_K}$ et $\beta\colon F\circ G\overset{\cong}{\Longrightarrow}\mathrm{Id_L}$ se trouvent dans les 2-diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, Rightarrow, "\alpha^{-1}\circ\mathrm{id}_G"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}_G"'] & G\circ F\circ G \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{id}_G\circ\beta"] \\
& G
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
F \arrow[r, Rightarrow, "\mathrm{id}_F\circ\alpha^{-1}"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}_F"'] & F\circ G\circ F \arrow[d, Rightarrow, "\beta\circ\mathrm{id}_F"] \\
& F
\end{tikzcd}.$$

On va montrer le résultat pour α, le cas pour β étant analogue.

On veut montrer qu'on a les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
G\circ F\circ\mathrm{T_K} \arrow[r, Rightarrow, "\nu\circ G(\tau)"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha\circ\mathrm{id}_{\mathrm{T_K}}"'] & \mathrm{T_K}\circ G\circ F \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{id}_{\mathrm{T_K}}\circ\alpha"] \\
\mathrm{T_K} \arrow[r, Rightarrow, "\mathrm{id}_{\mathrm{T_K}}"'] & \mathrm{T_K}
\end{tikzcd}
\text{ i.e. }
\begin{tikzcd}
G\circ F\circ\mathrm{T_K}(K) \arrow[r, Rightarrow, "\nu_{F(K)}\circ G(\tau_K)"] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha_{\mathrm{T_K}(K)}"'] & \mathrm{T_K}\circ G\circ F(K) \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{T_K}(\alpha_K)"] \\
\mathrm{T_K}(K) \arrow[r, Rightarrow, "\mathrm{id}_{\mathrm{T_K}}"'] & \mathrm{T_K}(K)
\end{tikzcd}.$$

Par définition

$$\begin{aligned}
\nu_{F(K)} &= (\alpha\circ\mathrm{id}_{\mathrm{T_K}\circ G})_{F(K)}\circ(\mathrm{id}_G\circ\tau\circ\mathrm{id}_G)^{-1}_{F(K)}\circ(\mathrm{id}_{G\circ\mathrm{T_L}}\circ\beta)^{-1}_{F(K)}\\
&= \alpha_{\mathrm{T_K}\circ G\circ F(K)}\circ(\mathrm{id}_G\circ\tau)^{-1}_{G\circ F(K)}\circ G(\mathrm{T_L}(\beta_{F(K)}))^{-1}\\
&= \alpha_{\mathrm{T_K}\circ G\circ F(K)}\circ G(\tau_{G\circ F(K)})^{-1}\circ G(\mathrm{T_L}(\beta_{F(K)}))^{-1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\mathrm{T}_{\mathrm{K}}(\alpha_K)\circ\nu_{F(K)}\circ G(\tau_K) &= \mathrm{T}_{\mathrm{K}}(\alpha_K)\circ\alpha_{\mathrm{T}_{\mathrm{K}}\circ G\circ F(K)}\circ G(\tau_{G\circ F(K)})^{-1}\circ G(\mathrm{T}_{\mathrm{L}}(\beta_{F(K)}))^{-1}\circ G(\tau_K)\\
&\overset{(1)}{=} \alpha_{\mathrm{T}\,\mathrm{K}(K)}\circ G(F(\mathrm{T}_{\mathrm{K}}(\alpha_K)))\circ G(\tau_{G\circ F(K)})^{-1}\circ G(\mathrm{T}_{\mathrm{L}}(\beta_{F(K)}))^{-1}\circ G(\tau_K)\\
&\overset{(2)}{=} \alpha_{\mathrm{T}\,\mathrm{K}(K)}\circ G(\tau_K)^{-1}\circ G(\mathrm{T}_{\mathrm{L}}(F(\alpha_K)))\circ G(\mathrm{T}_{\mathrm{L}}(\beta_{F(K)}))^{-1}\circ G(\tau_K)\\
&\overset{(3)}{=} \alpha_{\mathrm{T}\,\mathrm{K}(K)}
\end{aligned}
$$

où chaque égalité est justifiée par

(1)
$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_{\mathrm{K}}\circ G\circ F(K) \arrow[r, "\mathrm{T}_{\mathrm{K}}(\alpha_K)"] & \mathrm{T}_{\mathrm{K}}(K) \\
G\circ F\circ \mathrm{T}_{\mathrm{K}}\circ G\circ F(K) \arrow[u, "\alpha_{\mathrm{T}_{\mathrm{K}}\circ G\circ F(K)}"] \arrow[r, "G\circ F\circ \mathrm{T}_{\mathrm{K}}(\alpha_K)"'] & G\circ F\circ \mathrm{T}_{\mathrm{K}}(K) \arrow[u, "\alpha_{\mathrm{T}_{\mathrm{K}}(K)}"']
\end{tikzcd}
$$
commute.

(2)
$$
\begin{tikzcd}
G\circ F\circ \mathrm{T}_{\mathrm{K}}\circ G\circ F(K) \arrow[r, "G\circ F\circ \mathrm{T}_{\mathrm{K}}(\alpha_K)"] \arrow[d, "G(\tau_{G\circ F(K)})"'] & G\circ F\circ \mathrm{T}_{\mathrm{K}} \arrow[d, "G(\tau_K)"] \\
G\circ \mathrm{T}_{\mathrm{L}}\circ F\circ G\circ F(K) \arrow[r, "G\circ \mathrm{T}_{\mathrm{L}}\circ F(\alpha_K)"'] & G\circ \mathrm{T}_{\mathrm{L}}\circ F(K)
\end{tikzcd}
$$
commute.

(3) Découle du fait que $F(\alpha_K)\circ\beta^{-1}_{F(K)} = ((\mathrm{id}_F\circ\alpha)*(\beta^{-1}\circ\mathrm{id}_F))_K = \mathrm{id}_{F()K}$ par l'identité triangulaire.

Donc on a bien ce qu'on voulait, α est bien un morphisme de foncteurs triangulés

□

À partir de maintenant dans cette section, les isomorphismes de translation resterons implicites.

Supposons que l'on dispose des foncteurs triangulés $U\colon \mathrm{K}'\to\mathrm{K}$ et $V\colon \mathrm{L}\to\mathrm{L}'$. Il existe un foncteur induit

$$\mathrm{TrFun}(U,V)\colon\ \mathrm{TrFun}(\mathrm{K},\mathrm{L})\to\mathrm{TrFun}(\mathrm{K}',\mathrm{L})$$

la formule est la même que pour $\mathrm{Fun}(U,V)$.

Lemme 8.4.3. *Si U et V sont des équivalences, alors le foncteur* $\mathrm{TrFun}(U,V)$ *est une équivalence.*

Preuve. On l'a vu pour le foncteur $\mathrm{Fun}(U,V)$, et grâce au lemme précédent on conclut.

□

Définition 8.4.4. Soient K et L des catégories triangulées, et soit $\mathrm{S}\subseteq\mathrm{K}$ un ensemble de dénominateurs d'origine cohomologique. On définit $\mathrm{TrFun}_{\mathrm{S}}(\mathrm{K},\mathrm{L})$ comme la sous-catégorie pleine de $\mathrm{TrFun}(\mathrm{K},\mathrm{L})$ dont les objets sont les foncteurs localisables en S.

On sait que le foncteur de localisation $Q\colon \mathrm{K}\to\mathrm{K}_{\mathrm{S}}$ est une localisation d'Ore à gauche et à droite.

Lemme 8.4.5. *Soient* K *et* E *des catégories triangulées, et soit* $\mathrm{S}\subseteq\mathrm{K}$ *un ensemble de dénominateurs d'origine cohomologique. Alors le foncteur*

$$\mathrm{TrFun}(Q,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})\colon\ \mathrm{TrFun}(\mathrm{K}_{\mathrm{S}},\mathrm{E})\to\mathrm{TrFun}_{\mathrm{S}}(\mathrm{K},\mathrm{E})$$

est un isomorphisme de catégories.

Preuve. On l'a fait pour le foncteur $\mathrm{Fun}(Q,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et on conclut avec le fait que Q est triangulé (c.f. Théorème (7.1.3)).

□

Définition 8.4.6. Soit $F\colon \mathrm{K}\to\mathrm{E}$ un foncteur triangulé entre catégories triangulées, et soit $\mathrm{S}\subseteq\mathrm{K}$ un ensemble de dénominateurs d'origine cohomologique. Un *foncteur triangulé dérivé à droite de F par rapport à* S est un foncteur triangulé $\mathrm{R}F\colon \mathrm{K}_{\mathrm{S}}\to\mathrm{E}$, ainsi qu'un morphisme $\eta^{\mathrm{R}}\colon F\Rightarrow \mathrm{R}F\circ Q$ de foncteurs triangulés $\mathrm{K}\to\mathrm{E}$. Le couple $(\mathrm{R}F,\eta^{\mathrm{R}})$ doit avoir la propriété universelle :

(R) Étant donné un couple (G,θ), constitué d'un foncteur triangulé $G\colon \mathrm{K}_{\mathrm{S}}\to\mathrm{E}$ et d'un morphisme de foncteurs triangulés $\theta\colon F\Rightarrow G\circ Q$, il existe un unique morphisme de foncteurs triangulés $\mu\colon \mathrm{R}F\Rightarrow G$ tel que $\theta = (\mu\circ\mathrm{id}_Q)*\eta^{\mathrm{R}}$.

Proposition 8.4.7. *Si un foncteur triangulé dérivé à droite* $(\mathrm{R}F, \eta^{\mathrm{R}})$ *existe, alors il est unique, à un isomorphisme près. A savoir, si* (G, θ) *est un autre foncteur triangulé dérivé à droite de* F*, alors il existe un unique isomorphisme de foncteurs triangulés* $\mu\colon \mathrm{R}F \overset{\cong}{\Longrightarrow} G$ *tel que* $\theta = (\mu \circ \mathrm{id}_Q) * \eta^{\mathrm{R}}$.

Les preuves des deux propositions précédentes sont les mêmes que leurs versions dans les catégories abstraites.

Théorème 8.4.8. *Dans la situation de la définition précédente, supposons qu'il existe une sous-catégorie triangulée pleine* $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{K}$ *tel que :*

(1) Tout objet $M \in \mathrm{K}$ *admet un morphisme* $\rho\colon M \to I$ *dans* S *tel que* $I \in \mathrm{J}$.

(2) Si ψ *est un morphisme dans* $\mathrm{J} \cap \mathrm{S}$*, alors* $F(\psi)$ *est un isomorphisme dans* E.

Alors le foncteur triangulé dérivé à droite $(\mathrm{R}F, \eta^{\mathrm{R}})\colon \mathrm{K}_{\mathrm{S}} \to \mathrm{E}$ *de* F *par rapport à* S *existe. De plus, pour tout objet* $I \in \mathrm{J}$ *le morphisme* $\eta^{\mathrm{R}}_I\colon F(I) \to \mathrm{R}F(I)$ *dans* E *est un isomorphisme.*

Preuve. [8, Theorem 8.4.9].

□

Corollaire 8.4.9. *Dans la situation du théorème précédent, le foncteur triangulé dérivé à droite* $(\mathrm{R}F, \eta^{\mathrm{R}})$ *est aussi un foncteur dérivé à droite abstrait de* F *par rapport à* S.

On le voit dans la preuve du théorème précédent. On parlera des fois du foncteur triangulé dérivé à droite RF comme "le foncteur dérivé à droite de F".

Dans la situation du théorème précédent, soit $\mathrm{K}^\star$ une sous-catégorie triangulée pleine de K. On pose $\mathrm{S}^\star := K^\star \cap \mathrm{S}$ et $\mathrm{J}^\star := \mathrm{K}^\star \cap \mathrm{J}$. Notons $W\colon \mathrm{K}^\star \to \mathrm{K}$ le foncteur d'inclusion, et $W_{\mathrm{S}^\star}\colon \mathrm{K}^\star_{\mathrm{S}^\star} \to \mathrm{K}_{\mathrm{S}}$ sa localisation.

Proposition 8.4.10. *Supposons que tout objet* $M \in \mathrm{K}^\star$ *admet un morphisme* $\rho\colon M \to I$ *dans* $\mathrm{S}^\star$ *tel que* $I \in \mathrm{J}^\star$. *Alors le couple* $(\mathrm{R}^\star F, \eta^\star) := (\mathrm{R}F \circ W_{\mathrm{S}^\star}, \eta^{\mathrm{R}} \circ \mathrm{id}_W)$ *est un foncteur dérivé à droite de* $F^\star := F \circ W\colon \mathrm{K}^\star \to \mathrm{E}$.

Preuve. Considérons le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{K}_{\mathrm{S}} \arrow[ddrrr, bend right=60, "\mathrm{R}F"'] & & \mathrm{K} \arrow[ll, "Q"'] & & \mathrm{K}^\star \arrow[ll, "W"'] \arrow[rr, "Q^\star"] & & \mathrm{K}^\star_{\mathrm{S}^\star} \arrow[llllll, bend right=30, "W^\star"'] \arrow[ddlll, bend left=60, "\mathrm{R}F^\star"] \\
\mathrm{K}'_{\mathrm{S}'} \arrow[u, "V", "\text{eq.}"'] \arrow[drrr, "\mathrm{R}F'"] & \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \underbrace{\mathrm{J}}_{=:\mathrm{K}'} \arrow[l] \arrow[u, hook] & \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \underbrace{\mathrm{J} \cap \mathrm{K}^\star}_{=:\mathrm{K}^{\star\prime}} \arrow[ll] \arrow[u, hook] \arrow[rr] & \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathrm{K}^{\star\prime}_{\mathrm{S}^{\star\prime}} \arrow[u, "V^\star"', "\text{eq.}"] \arrow[dlll, "\mathrm{R}F^{\star\prime}"'] \\
& \circlearrowleft & & \mathrm{E} & & \circlearrowleft &
\end{tikzcd}
$$

Maintenant on considère le diagramme,

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{K}^{\star\prime} \arrow[rr, "W"] \arrow[d, "Q^{\star\prime}"'] & & \mathrm{K}' \arrow[d, "Q'"] \\
\mathrm{K}^{\star\prime}_{\mathrm{S}^{\star\prime}} \arrow[rr, "W^{\star\prime}"] \arrow[dr, "\mathrm{R}F^{\star\prime}"'] & & \mathrm{K}'_{\mathrm{S}'} \arrow[dl, "\mathrm{R}F'"] \\
& \mathrm{R} &
\end{tikzcd}
$$

On a que $\mathrm{R}F^{\star\,\prime} \circ Q^{\star\,\prime} = \mathrm{F}' \circ Q' \circ W$ car $\mathrm{R}F^{\star\,\prime} \circ Q^{\star\,\prime} = F^{\star}_{|\mathrm{K}^\star}$, et $\mathrm{F}' \circ Q' = F_{|'}$, donc la frontière extérieure commute, et il est clair que le carré commute. Ainsi, $\mathrm{R}F^{\star\,\prime} = \mathrm{R}F' \circ W^\star$ i.e. $\mathrm{R}F^\star \circ V^\star = \mathrm{R}F \circ V \circ W^\star$. Donc on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{K}^\star_{\mathrm{S}^\star} \arrow[rr, "W^\star"] \arrow[ddr, bend right=70, "\mathrm{R}F^\star"'] & & \mathrm{K}_\mathrm{S} \arrow[ddl, bend left=70, "\mathrm{R}F"] \\
\mathrm{K}^{\star\,\prime}_{\mathrm{S}^{\star\,\prime}} \arrow[u, "\mathrm{eq.}"] \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{R}F^{\star\,\prime}"'] & & \mathrm{K}'_{\mathrm{S}'} \arrow[u, "\mathrm{eq.}"'] \arrow[dl, "\mathrm{R}F'"] \\
& \mathrm{R} &
\end{tikzcd}$$

Donc $\mathrm{R}F^\star = \mathrm{R}F \circ W^\star$ est un foncteur dérivé de $F^\star$, comme on voulait montrer.

□

Exemple 8.4.11. Supposons avoir un foncteur additif $F^0 \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ entre catégories abéliennes. On sait l'étendre à un DG foncteur

$$\mathbf{C}^+(F^0) \colon \mathbf{C}^+(\mathrm{M}) \to \mathbf{C}^+(\mathrm{N}),$$

qui induit un foncteur triangulé

$$\mathbf{K}^+(F^0) \colon \mathbf{K}^+(\mathrm{M}) \to \mathbf{K}^+(\mathrm{N}).$$

En composant avec le foncteur de localisation $Q^+_\mathrm{N} \colon \mathbf{K}^+(\mathrm{N}) \to \mathbf{D}^+(\mathrm{N})$ on obtient un foncteur triangulé

$$F := Q^+_\mathrm{N} \circ \mathbf{K}^+(F^0) \colon \mathbf{K}^+(\mathrm{M}) \to \mathbf{D}^+(\mathrm{N}). \tag{8.4.12}$$

Définissons $\mathrm{K} := \mathbf{K}^+(\mathrm{M})$, $\mathrm{S} := \mathbf{S}^+(\mathrm{M})$ et $\mathrm{E}\mathbf{D}^+(\mathrm{N})$, donc dans cette notation on a un foncteur triangulé $F \colon \mathrm{K} \to \mathrm{E}$. Notons que la restriction de F à la sous-catégorie pleine $\mathrm{M} \subseteq \mathbf{K}^+(\mathrm{M})$ coïncide avec le foncteur de départ F^0.

Supposons que la catégorie abélienne M ait suffisamment d'injectifs ; à savoir que tout objet $M \in \mathrm{M}$ admet un monomorphisme vers un objet injectif. Soit J la sous-catégorie pleine de K sur les complexes d'objets injectifs minorés. Nous prouverons plus tard qu'on peut appliquer le théorème (8.4.8) pour ce J, quel que soit F. Par conséquent, le foncteur triangulé dérivé à droite

$$(\mathrm{R}^+F, \eta^+) \colon \mathbf{D}^+(\mathrm{M}) \to \mathbf{D}^+(\mathrm{N})$$

existe, et pour tout complexe $I \in \mathrm{J}$ le morphisme

$$\eta^+_I \colon F(I) \to \mathrm{R}^+F(I)$$

en $\mathbf{D}^+(\mathrm{N})$ est un isomorphisme.

Supposons maintenant que le foncteur de départ F^0 est exact à gauche. Pour tout $q \geqslant 0$ et $M \in \mathrm{M}$ on pose $\mathrm{R}^qF^0(M) := \mathrm{H}^q(\mathrm{R}^+F(M))$ dans N.

On a le foncteur dérivé à droite classique $\mathrm{R}^qF^0 \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, et $\mathrm{R}^0F^0 \cong F^0$. Alors pour tout $M \in \mathrm{M}$ et $q \geqslant 0$ on a $\mathrm{R}^qF^0(M) \cong \mathrm{H}^q(\mathrm{R}^+F(M))$. Lorsque l'objet $M \in \mathrm{M}$ se déplace, cela devient un isomorphisme $R^qF^0 \cong \mathrm{H}^q \circ \mathrm{R}^+F$ de foncteurs additifs $\mathrm{M} \to \mathrm{N}$. Ceci justifie l'utilisation de la même notation.

Les foncteurs triangulés dérivées à gauche possèdent des analogues évidents des résultats précédents (c.f. [8, Section 8.4]).

Exemple 8.4.13. Supposons avoir un foncteur additif $F^0 \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$ entre catégories abéliennes. On sait l'étendre à un DG foncteur

$$\mathbf{C}^-(F^0) \colon \mathbf{C}^-(\mathrm{M}) \to \mathbf{C}^-(\mathrm{N}),$$

qui induit un foncteur triangulé

$$\mathbf{K}^-(F^0) \colon \mathbf{K}^-(\mathrm{M}) \to \mathbf{K}^-(\mathrm{N}).$$

En composant avec le foncteur de localisation $Q^-_\mathrm{N} \colon \mathbf{K}^-(\mathrm{N}) \to \mathbf{D}^-(\mathrm{N})$ on obtient un foncteur triangulé

$$F := Q^-_\mathrm{N} \circ \mathbf{K}^-(F^0) \colon \mathbf{K}^-(\mathrm{M}) \to \mathbf{D}^-(\mathrm{N}). \tag{8.4.14}$$

Définissons $\mathrm{K} := \mathbf{K}^-(\mathrm{M})$, $\mathrm{S} := \mathbf{S}^-(\mathrm{M})$ et $\mathrm{E}\mathbf{D}^-(\mathrm{N})$, donc dans cette notation on a un foncteur triangulé $F \colon \mathrm{K} \to \mathrm{E}$.

Supposons que la catégorie abélienne M ait suffisamment de projectifs. Soit P la sous-catégorie pleine de K sur les complexes d'objets projectifs majorés. Nous prouverons plus tard qu'on peut appliquer la version gauche du théorème (8.4.8). Par conséquent, le foncteur triangulé dérivé à droite

$$(\mathrm{L}^-F, \eta^-) \colon \mathbf{D}^-(\mathrm{M}) \to \mathbf{D}^-(\mathrm{N})$$

existe, et pour tout complexe $P \in \mathrm{P}$ le morphisme

$$\eta^-_I \colon \mathrm{L}^-F(P) \to F(P)$$

en $\mathbf{D}^-(\mathrm{N})$ est un isomorphisme.

Supposons maintenant que le foncteur de départ F^0 est exact à droite. Pour tout $q \geqslant 0$ et $M \in \mathrm{M}$ on pose $\mathrm{L}_q F^0(M) := \mathrm{H}^{-q}(\mathrm{R}^- F(M))$ dans N.

On a le foncteur dérivé à gauche classique $\mathrm{L}_q F^0 \colon \mathrm{M} \to \mathrm{N}$, et $\mathrm{L}_0 F^0 \cong F^0$. Alors pour tout $M \in \mathrm{M}$ et $q \geqslant 0$ on a $\mathrm{L}_q F^0(M) \cong \mathrm{H}^{-q}(\mathrm{L}^- F(M))$. Lorsque l'objet $M \in \mathrm{M}$ se déplace, cela devient un isomorphisme $L_q F^0 \cong \mathrm{H}^{-q} \circ \mathrm{L}^- F$ de foncteurs additifs $\mathrm{M} \to \mathrm{N}$. Ceci justifie l'utilisation de la même notation.

8.5. **Foncteurs Triangulés Dérivés Contravariants.**

Les définitions des foncteurs triangulés dérivés contravariants sont évidentes. Pour plus de détails c.f. [8, Section 8.5].

On corrige par contre le dernier résultat de cette partie.

Proposition 8.5.1. *Supposons que A soit un DG anneau non positif. Pour tout objet $M \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ il existe un triangle distingué*

$$\mathrm{smt}^{\geqslant -i}(M) \to M \to \mathrm{smt}^{\leqslant -(i+1)}(M) \to \mathrm{T}^{\mathrm{op}}(\mathrm{smt}^{\geqslant -i}(M))$$

dans $\mathbf{D}(A, \mathrm{M})^{\mathrm{op}}$.

Preuve. La preuve est la même que [8, Proposition 8.5.10]. Le seul changement étant $\mathrm{Flip}(\mathrm{smt}^{\geqslant i}(M)) = \mathrm{smt}^{\leqslant -i}(\mathrm{Flip}(M))$.

□

9. Sous-Catégories Résolvantes de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$

Dans ce chapitre, on va définir les DG modules K-projectifs et K-injectifs dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. Ces DG modules forment des sous-catégories triangulées pleines de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ et sont des versions concrètes des catégories abstraites P et J qui ont joué un rôle important dans le chapitre précédent. Pour $\mathbf{K}(A)$, on définira également les DG modules K-plat.

9.1. DG Modules K-injectifs.

Pour tout entier p on a le p-ème foncteur de cohomologie $\mathrm{H}^p \colon \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M}) \to \mathrm{M}$. On a l'égalité $\mathrm{H}^p = \mathrm{H}^0 \circ \mathrm{T}^p$, où T est le foncteur de translation de $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$. Les foncteurs H^p passent à la catégorie d'homotopie, et $\mathrm{H}^0 \colon \mathbf{K}(A, \mathrm{M}) \to \mathrm{M}$ est un foncteur cohomologique.

Définition 9.1.1. Un DG module $N \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ est dit *acyclique* si $\mathrm{H}^p(N) = 0$ pour tout p.

Définition 9.1.2. Un DG module $I \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ est dit *K-injectif* si pour tout DG module acyclique $N \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$, le DG $\mathbb{K}$-module $\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(N, I)$ est acyclique.

La définition ci-dessus caractérise les K-injectifs comme des objets de $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$. La proposition suivante montre qu'être K-injectif est intrinsèque à la catégorie triangulée $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$, avec le foncteur cohomologique H^0 (qui nous dit quels sont les objets acycliques).

Proposition 9.1.3. *Un DG module $I \in \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ est K-injectif si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(N, I) = 0$ pour tout DG module acyclique $N \in \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$.*

Preuve. Pour tout entier p on a

$$\mathrm{H}^p(\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(N, I)) \cong \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(\mathrm{T}^{-p}(N), I)) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(\mathrm{T}^{-p}(N), I),$$

et N est acyclique si et seulement si $\mathrm{T}^{-p}(N)$ est acyclique.

□

Définition 9.1.4. Soit $M \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$. Une *résolution K-injective* de M est un quasi-isomorphisme $\rho \colon M \to I$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, où I est un DG module K-injectif.

Remarque. Soit $\rho \colon M \to I$ une résolution K-injective dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$. Par un léger abus de notation, on désignera souvent le quasi-isomorphisme induit $\mathrm{P}(\rho) \colon M \to I$ dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ comme une résolution K-injective de M.

Exemple 9.1.5. Soit $I \in \mathbf{K}(M)$ un complexe d'objets injectifs de M, avec différentielle nulle. Alors I est K-injectif.

En effet, soit $f \colon N \to I$ un morphisme strict avec un DG module acyclique $N \in \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$, alors on veut construire une homotopie de f ver 0. On voit que cela revient a un morphisme de degré -1, $g \colon N \to I$ tel qu'on ai le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & I^{i-1} \arrow[r, "0"] & I^i \arrow[r, "0"] & I^{i+1} \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & N^{i-1} \arrow[u, "f^{i-1}"] \arrow[r, "\mathrm{d}_N^{i-1}"'] & N^i \arrow[u, "f^i"] \arrow[r, "\mathrm{d}_N^i"'] & N^{i+1} \arrow[u, "f^{i+1}"'] \arrow[ul, dashed, "g^{i+1}"'] \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

avec $f = g \circ \mathrm{d}_N$. Pour cela, on va utiliser le fait que chaque I^i est injectif. Plus précisément, on va utiliser le fait qu'un objet I est injectif si et seulement si on a pour tout $\phi \colon K \to I$ et $\psi \colon K \to L$ tel que $\operatorname{Ker} \psi \subseteq \operatorname{Ker} \phi$ alors il existe un morphisme $L \to I$. Cela nous permet de conclure, vu que N est acyclique, cela veut dire que la suite $\cdots \to N^{i-1} \to N^i \to N^{i+1} \to \cdots$ est exacte, et de plus f étant stricte, on a $f^i \circ \mathrm{d}_N^{i-1} = 0$, donc $\operatorname{Ker} f^i \subseteq \operatorname{Im} \mathrm{d}_N^{i-1} = \operatorname{Ker} \mathrm{d}_N^i$. Donc on a bien notre g recherché.

Montrons maintenant l'équivalence. Il y a un implication qui est claire. Supposons maintenant que sache que I est injectif et qu'on dispose de $\phi \colon K \to I$ et $\psi \colon K \to L$ tel que $\operatorname{Ker} \psi \subseteq \operatorname{Ker} \phi$. On veut construire un morphisme $L \to I$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
I & \\
K \arrow[u, "\phi"] \arrow[r, "\psi"'] & L \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}.$$

On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker}\phi \arrow[dr] & & I & & \\
\operatorname{Ker}\psi \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook] & & K \arrow[ur, "\phi"] \arrow[rrr, "\psi"] \arrow[dr, two heads] \arrow[ddrr, two heads] & & & L \\
 & & & \operatorname{Im}\psi \arrow[urr, hook] \arrow[dr, dashed, two heads] & & \\
 & & & & \operatorname{Im}\phi \arrow[uuul, hook] &
\end{tikzcd}$$

où la flèche en pointillés découle de la propriété universelle du coker. Lorsqu'on compose $\operatorname{Im}\psi \to \operatorname{Im}\phi \to I$, on obtient un morphisme qui rend le diagramme

$$\begin{tikzcd}
I & \\
\operatorname{Im}\psi \arrow[u] \arrow[r, hook] & L \arrow[ul, dashed]
\end{tikzcd}$$

commutatif. On compose maintenant ce nouveau morphisme avec $K \to \operatorname{Im}\psi$, et on obtient

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[rr] & & I \\
 & \operatorname{Im}\psi \arrow[ul, hook] \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
K \arrow[uu, "\psi"] \arrow[ur, two heads] \arrow[rr, two heads] \arrow[uurr, bend right=90, "\phi"'] & & \operatorname{Im}\phi \arrow[uu, hook]
\end{tikzcd}$$

et donc on a bien notre morphisme recherché.

Définition 9.1.6. Soit K une sous-catégorie pleine de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. La sous-catégorie pleine de K sur les modules DG K-injectifs qu'elle contient est notée $\mathrm{K}_{\mathrm{inj}}$. Autrement dit, $\mathrm{K}_{\mathrm{inj}} = \mathbf{K}(A, \mathrm{M})_{\mathrm{inj}} \cap \mathrm{K}$.

Remarque. Attention : la propriété d'un DG module $I \in \mathrm{K}$ d'être K-injectif n'est en général pas intrinsèque à la sous-catégorie $\mathrm{K} \subseteq \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. En effet, la condition de la proposition précédente (et de la définition) doit être testée pour tous les modules DG acycliques $N \in \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$.

Proposition 9.1.7. *Si* K *est une sous-catégorie triangulée pleine de* $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$*, alors* $\mathrm{K}_{\mathrm{inj}}$ *est une sous-catégorie triangulée pleine de* K.

Preuve. Il suffit de montrer que $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})_{\mathrm{inj}}$ est une sous-catégorie triangulée de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. Il est facile de voir que $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})_{\mathrm{inj}}$ est fermé par translation. Supposons que $I \to J \to K \xrightarrow{\Delta}$ soit un triangle distingué dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ tel que I, J soient des modules DG K-injectifs. Il faut montrer que K est aussi K-injectif. Prenons n'importe quel module DG acyclique $N \in \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. Il existe une suite exacte

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(N, J) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(N, K) \to \operatorname{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(N, \mathrm{T}(I))$$

dans $\operatorname{Mod}\mathbb{K}$. Comme I et J sont K-injectifs, on a

$$\operatorname{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(N, J) = 0 = \operatorname{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(N, \mathrm{T}(I)).$$

Donc $\operatorname{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(N, K)$. Mais N est un module DG acyclique arbitraire, donc K est K-injective.

□

Exemple 9.1.8. Soit $\star$ une condition de délimitation (à savoir b, + ou −). On sait que $\mathbf{K}^{\star}(A, \mathrm{M})$ est une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. Donc $\mathbf{K}^{\star}(A, \mathrm{M})_{\mathrm{inj}}$ est aussi une sous-catégorie triangulée.

Définition 9.1.9. Soit K une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. On dit que K *possède suffisamment de K-injectives* si tout module DG $M \in \mathrm{K}$ admet une résolution K-injective dans K. Autrement dit, il existe un quasi-isomorphisme $\rho \colon M \to I$ où $I \in \mathrm{K}_{\mathrm{inj}}$.

Lemme 9.1.10. *Soit $s\colon I \to M$ un quasi-isomorphisme dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$, et supposons que I est K-injectif. Alors s admet un inverse à gauche, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $t\colon M \to I$ dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ tel que $t \circ s = \mathrm{id}_I$. De plus, ce morphisme t est unique.*

Preuve. Soit $I \xrightarrow{s} M \to N \xrightarrow{\Delta}$ un triangle distingué construit sur s. La suite exacte longue de cohomologie nous dit que N est un DG module acyclique. Donc $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(\mathrm{T}^p\, N, I) = 0$ pour tout p. La suite exacte

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(N, I) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(M, I) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(I, I) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(\mathrm{T}^{-1}\, N, I)$$

montre que le morphisme

$$(-) \circ s\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(M, I) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(I, I)$$

est un bijection. Ainsi, on prend $t\colon M \to I$ comme étant l'unique morphisme dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ tel que $t \circ s = \mathrm{id}_I$.
□

Théorème 9.1.11. *Soit A un DG anneau, soit M une catégorie abélienne, et soit K une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. On pose $\mathrm{S} := \mathrm{K} \cap \mathbf{S}(A, \mathrm{M})$, et $\mathrm{D} := \mathrm{K}_{\mathrm{S}}$ la localisation, avec foncteur de localisation $Q\colon \mathrm{K} \to \mathrm{D}$. Alors pour tout $M \in \mathrm{K}$ et $I \in \mathrm{K}_{\mathrm{inj}}$ l'homomorphisme*

$$Q_{M,I}\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(M, I) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(M, I)$$

est bijectif.

Preuve. On sait que $Q\colon \mathrm{K} \to \mathrm{D}$ est une localisation d'Ore à gauche par rapport à S. Supposons que $q\colon M \to I$ est un morphisme dans D. On écrit q comme une fraction à gauche : $q = Q(s)^{-1} \circ Q(a)$, où $a\colon M \to N$ et $s\colon I \to N$ sont des morphismes dans K, et s est un quasi-isomorphisme. D'après le lemme précédent, s admet un inverse à gauche $t\colon N \to I$ dans K. On obtient un morphisme $t \circ a\colon M \to I$ dans K, et on voit que $Q(t \circ a) = q$ dans D. Ceci prouve la surjectivité de la fonction $Q_{M,I}$.

Prouvons maintenant l'injectivité. Si $a\colon M \to I$ est un morphisme dans K tel que $Q_{M,I}(a) = 0$, alors d'après (LO4) il existe un quasi-isomorphisme $s\colon I \to L$ dans K tel que $s \circ a = 0$ dans K. Soit t l'inverse à gauche de s. Alors $a = t \circ s \circ a = 0$ dans K.
□

Corollaire 9.1.12. *Dans la situation du théorème précédent, le foncteur de localisation $Q\colon \mathrm{K}_{\mathrm{inj}} \to \mathrm{D}$ est pleinement fidèle.*

Preuve. Comme $\mathrm{K}_{\mathrm{inj}}$ est une sous-catégorie pleine de K, pour tout $J, I \in \mathrm{K}_{\mathrm{inj}}$ on a les bijections

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}_{\mathrm{inj}}}(J, I) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(J, I) \xrightarrow{Q_{J,I}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(J, I),$$

avec $Q_{J,I}$ bijective d'après le théorème.
□

Cela signifie que parmi les objets K-injectifs, on n'a pas besoin de fractions pour représenter les morphismes.

Corollaire 9.1.13. *Dans la situation du théorème précédent, si K possède suffisamment de K-injectifs, alors le foncteur de localisation $Q\colon \mathrm{K}_{\mathrm{inj}} \to \mathrm{D}$ est une équivalence.*

Preuve. On sait que le foncteur est fidèlement plein d'après le corollaire précédent. Le fait d'avoir suffisamment de K-injectifs nous donne la surjectivité essentielle.
□

Corollaire 9.1.14. *Soit $\star$ n'importe quelle condition de délimitation. Si $\mathbf{K}^\star(A, \mathrm{M})$ a suffisamment de K-injectifs, alors le foncteur triangulé*

$$Q\colon \mathbf{K}^\star(A, \mathrm{M})_{\mathrm{inj}} \to \mathbf{D}^\star(A, \mathrm{M})$$

est une équivalence.

Preuve. C'est un cas particulier du corollaire précédent.
□

Corollaire 9.1.15. *Soient $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$ des sous-catégories triangulées pleines de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. Définissons $\mathrm{S} := \mathrm{K} \cap \mathbf{S}(A, \mathrm{M})$, $\mathrm{S}' := \mathrm{K}' \cap \mathbf{S}(A, \mathrm{M})$, $\mathrm{D} := \mathrm{K}_{\mathrm{S}}$ et $\mathrm{D}' := \mathrm{K}'_{\mathrm{S}'}$. Si K et K' ont suffisamment de K-injectifs, alors le foncteur canonique $\mathrm{D} \to \mathrm{D}'$ est pleinement fidèle.*

Corollaire 9.1.16. *Soit $\phi\colon I \to J$ un morphisme dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ entre objets K-injectifs. Alors ϕ est une équivalence d'homotopie si et seulement si c'est un quasi-isomorphisme.*

Preuve. Un sens est évident. Réciproquement, si ϕ est un quasi-isomorphisme alors c'est un isomorphisme dans $\mathbf{D}(A, \mathrm{M})$, et par le corollaire (9.1.12) pour $\mathrm{K} = \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ on voit que ϕ est un isomorphisme dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$.
□

Théorème 9.1.17. *Dans la situation du théorème* (9.1.11)*, supposons que* K *a suffisamment de K-injectifs. Soit* E *une catégorie triangulée, et soit $F\colon \mathrm{K} \to \mathrm{E}$ un foncteur triangulé. Alors F admet un foncteur dérivé à droite* $(\mathrm{R}F, \eta^{\mathrm{R}})\colon \mathrm{D} \to \mathrm{E}$*. De plus, pour tout $I \in \mathrm{K}_{\mathrm{inj}}$ le morphisme $\eta^{\mathrm{R}}_I\colon F(I) \to \mathrm{R}F(I)$ dans* E *est un isomorphisme.*

Preuve. On va utiliser le théorème (8.4.8). Dans la notation de ce théorème, soit $J := \mathrm{K}_{\mathrm{inj}}$. La condition *(1)* de ce théorème est vérifiée (il s'agit de l'hypothèse "assez de K-injectifs"). Ensuite, le corollaire précédent implique que tout quasi-isomorphisme $\phi\colon I \to J$ dans $\mathrm{K}_{\mathrm{inj}}$ est en fait un isomorphisme. Donc $F(\phi)$ est un isomorphisme dans E, et c'est la condition *(2)* du théorème (8.4.8).

□

Définition 9.1.18. Soit K une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$, et supposons que K a suffisamment de K-injectifs. Un *système de résolutions K-injectives* dans K est un couple (I, ρ), où $I\colon \mathrm{Ob}(\mathrm{K}) \to \mathrm{Ob}(\mathrm{K}_{\mathrm{inj}})$ est une fonction, et $\rho = \{\rho_M\}_{M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K})}$ est une collection de quasi-isomorphismes $\rho_M\colon M \to I(M)$ dans K. De plus, si $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K}_{\mathrm{inj}})$, alors $I(M) = M$ et $\rho_M = \mathrm{id}_M$.

Exemple 9.1.19. Soit A un DG anneau quelconque. On montrera plus tard que $\mathbf{K}(A)$ a suffisamment de K-injectifs. Donc, étant donné un foncteur triangulé $F\colon \mathbf{K}(A) \to \mathrm{E}$ vers une catégorie triangulée E, le foncteur dérivé à droite $(\mathrm{R}F, \eta^{\mathrm{R}})\colon \mathbf{D}(A) \to \mathrm{E}$ existe. Supposons que l'on choisisse un système de résolutions K-injectives (I, ρ) dans $\mathbf{K}(A)$. On obtient alors une présentation de $(\mathrm{R}F, \eta^{\mathrm{R}})$ comme suit : $\mathrm{R}F(M) := F(I(M))$ et $\eta^{\mathrm{R}}_M := F(\rho_M)$.

Proposition 9.1.20. *Dans la situation du théorème* (9.1.11)*, supposons que* K *possède suffisamment de K-injectifs, et soit (I, ρ) un système de résolutions K-injectives dans* K*. Alors la fonction I se prolonge uniquement en un foncteur triangulé $I\colon \mathrm{D} \to \mathrm{K}_{\mathrm{inj}}$, tel que $\mathrm{Id}_{\mathrm{K}_{inj}} = I \circ Q_{|\mathrm{K}_{\mathrm{inj}}}$, et $\rho\colon \mathrm{Id}_{\mathrm{D}} \Rightarrow Q \circ I$ est un isomorphisme de foncteurs triangulés.*

Preuve. C'est la même preuve que le lemme (8.3.9), sauf qu'on utilise le fait que $Q\colon \mathrm{K}_{\mathrm{inj}} \to \mathrm{D}$ est une équivalence.

□

Cela nous donne :

Corollaire 9.1.21 (Résolutions K-injectives fonctorielles)**.** *Soit* K *une sous-catégorie triangulée pleine de* $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$*, et supposons que* K *a suffisamment de K-injectifs.*

(1) Il existe un foncteur triangulé $I\colon \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ et un morphisme de foncteurs triangulés $\rho\colon \mathrm{Id}_{\mathrm{K}} \Rightarrow I$, tels que pour tout objet $M \in \mathrm{K}$ l'objet $I(M)$ est K-injectif, et le morphisme $\rho_M\colon M \to I(M)$ est un quasi-isomorphisme.

(2) Si (I', ρ') est une autre paire de ce type, alors il existe un unique isomorphisme de foncteurs triangulés $\zeta\colon I' \Rightarrow I'$ tel que $\rho' = \zeta \circ \rho$.

Théorème 9.1.22. *Soit A un anneau DG, soit* M *une catégorie abélienne, et soit $\{M_x\}_{x \in X}$ une collection d'objets de* $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$*. Supposons que* $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ *a suffisamment de K-injectifs, et que la somme directe $M := \coprod_{x \in X} M_x$ existe dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$. Alors M est la somme directe de $\{M_x\}_{x \in X}$ dans $\mathbf{D}(A, \mathrm{M})$.*

Preuve. On note $\mathrm{C}_{\mathrm{str}} := \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, $\mathrm{K} := \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ et $\mathrm{D} := \mathbf{D}(A, \mathrm{M})$. Pour tout indice x il existe un morphisme $e_x\colon M_x \to M$ dans $\mathrm{C}_{\mathrm{str}}$ qui passe à un morphisme $Q(e_x)\colon M_x \to M$ dans D. Il faut vérifier que la collection de morphismes $\{Q(e_x)\}_{x \in X}$ a la propriété universelle d'un coproduit.

Prenons un objet $N \in \mathrm{D}$, et choisissons une résolution K-injective $N \to J$ dans $\mathrm{C}_{\mathrm{str}}$. Il existe un isomorphisme de DG $\mathbb{K}$-modules

$$\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M, J) = \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}\Big(\bigoplus_{x \in X} M_x, J\Big) \cong \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M_x, J).$$

On obtient alors

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(M, N) & \overset{(9.1.11)}{\cong} & \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(M, J) \\
& = & \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M, J)) \\
& \cong & \mathrm{H}^0(\prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M_x, J)) \\
& \overset{(1)}{\cong} & \prod_{x \in X} \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(M_x, J)) \\
& = & \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(M_x, J) \\
& = & \prod_{x \in X} \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(M_x, J).
\end{array}$$

L'isomorphisme (1) découle du fait que H^0 commute avec les produits.

Puisque l'isomorphisme composé est induit par l'ensemble des morphismes $\{Q(e_x)\}_{x \in X}$, on voit que la propriété universelle d'un coproduit est vérifiée.

□

9.2. **DG Modules K-projectifs.**
Cette section est duale à la précédente donc on ne détaille pas tout.

Définition 9.2.1. Un DG module $P \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$ est dit *K-projectif* si pour tout DG module acyclique $N \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$, le DG $\mathbb{K}$-module $\mathrm{Hom}_{A,\mathrm{M}}(P, N)$ est acyclique.

Définition 9.2.2. Soit $M \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$. Une *résolution K-projective* de M est un quasi-isomorphisme $\rho\colon P \to M$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, où P est un DG module K-projectif.

Proposition 9.2.3. *Un DG module $P \in \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ est K-projectif si et seulement si $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A,\mathrm{M})}(P, N) = 0$ pour tout DG module acyclique $N \in \mathbf{K}(A, \mathrm{M})$.*

Définition 9.2.4. Soit K une sous-catégorie pleine de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. La sous-catégorie pleine de K sur les modules DG K-projectifs qu'elle contient est notée $\mathrm{K}_{\mathrm{prj}}$. Autrement dit, $\mathrm{K}_{\mathrm{prj}} = \mathbf{K}(A, \mathrm{M})_{\mathrm{prj}} \cap \mathrm{K}$.

Proposition 9.2.5. *Si K est une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$, alors $\mathrm{K}_{\mathrm{prj}}$ est une sous-catégorie triangulée pleine de K.*

Définition 9.2.6. Soit K une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. On dit que K *possède suffisamment de K-projectifs* si tout module DG $M \in \mathrm{K}$ admet une résolution K-projective dans K. Autrement dit, il existe un quasi-isomorphisme $\rho\colon P \to M$ où $P \in \mathrm{K}_{\mathrm{prj}}$.

Lemme 9.2.7. *Soit $s\colon M \to P$ un quasi-isomorphisme dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$, et supposons que P est K-projectif. Alors s admet un inverse à droite, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme $t\colon P \to M$ dans $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$ tel que $s \circ t = \mathrm{id}_P$. De plus, ce morphisme t est unique.*

Théorème 9.2.8. *Soit A un DG anneau, soit M une catégorie abélienne, et soit K une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. On pose $\mathrm{S} := \mathrm{K} \cap \mathbf{S}(A, \mathrm{M})$, et $\mathrm{D} := \mathrm{K}_{\mathrm{S}}$ la localisation, avec foncteur de localisation $Q\colon \mathrm{K} \to \mathrm{D}$. Alors pour tout $M \in \mathrm{K}$ et $P \in \mathrm{K}_{\mathrm{prj}}$ l'homomorphisme*

$$Q_{P,M}\colon \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}}(P, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}}(P, M)$$

est bijectif.

La preuve est comme celle du théorème dual, sauf que maintenant on utilise le fait que le foncteur Q est une localisation d'Ore à droite.

Corollaire 9.2.9. *Dans la situation du théorème précédent, le foncteur de localisation $Q\colon \mathrm{K}_{\mathrm{prj}} \to \mathrm{D}$ est pleinement fidèle.*

Corollaire 9.2.10. *Dans la situation du théorème précédent, si K possède suffisamment de K-projectifs, alors le foncteur de localisation $Q\colon \mathrm{K}_{\mathrm{prj}} \to \mathrm{D}$ est une équivalence.*

Corollaire 9.2.11. *Soit $\star$ n'importe quelle condition de délimitation. Si $\mathbf{K}^{\star}(A, \mathrm{M})$ a suffisamment de K-projectifs, alors le foncteur triangulé*

$$Q\colon \mathbf{K}^{\star}(A, \mathrm{M})_{\mathrm{prj}} \to \mathbf{D}^{\star}(A, \mathrm{M})$$

est une équivalence.

Corollaire 9.2.12. *Soient $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{K}'$ des sous-catégories triangulées pleines de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$. Définissons $\mathrm{S} := \mathrm{K} \cap \mathbf{S}(A, \mathrm{M})$, $\mathrm{S}' := \mathrm{K}' \cap \mathbf{S}(A, \mathrm{M})$, $\mathrm{D} := \mathrm{K}_{\mathrm{S}}$ et $\mathrm{D}' := \mathrm{K}'_{\mathrm{S}'}$. Si K et K' ont suffisamment de K-projectifs, alors le foncteur canonique $\mathrm{D} \to \mathrm{D}'$ est pleinement fidèle.*

Corollaire 9.2.13. *Soit $\phi\colon P \to Q$ un morphisme dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ entre objets K-projectifs. Alors ϕ est une équivalence d'homotopie si et seulement si c'est un quasi-isomorphisme.*

Théorème 9.2.14. *Dans la situation du théorème (9.2.8), supposons que K a suffisamment de K-projectifs. Soit E une catégorie triangulée, et soit $F\colon \mathrm{K} \to \mathrm{E}$ un foncteur triangulé. Alors F admet un foncteur dérivé à gauche $(\mathrm{L}F, \eta^{\mathrm{L}})\colon \mathrm{D} \to \mathrm{E}$. De plus, pour tout $P \in \mathrm{K}_{\mathrm{prj}}$ le morphisme $\eta^{\mathrm{L}}_P\colon \mathrm{L}F(P) \to F(P)$ dans E est un isomorphisme.*

Définition 9.2.15. Soit K une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$, et supposons que K a suffisamment de K-projectifs. Un *système de résolutions K-projectives* dans K est un couple (P, ρ), où $P\colon \mathrm{Ob}(\mathrm{K}) \to \mathrm{Ob}(\mathrm{K}_{\mathrm{prj}})$ est une fonction, et $\rho = \{\rho_M\}_{M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K})}$ est une collection de quasi-isomorphismes $\rho_M\colon P(M) \to M$ dans K. De plus, si $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{K}_{\mathrm{prj}})$, alors $O(M) = M$ et $\rho_M = \mathrm{id}_M$.

Exemple 9.2.16. Soit A un DG anneau quelconque. On montrera plus tard que $\mathbf{K}(A)$ a suffisamment de K-projectifs. Donc, étant donné un foncteur triangulé $F\colon \mathbf{K}(A) \to \mathrm{E}$ vers une catégorie triangulée E, le foncteur dérivé à droite $(\mathrm{L}F, \eta^{\mathrm{L}})\colon \mathbf{D}(A) \to \mathrm{E}$ existe. Supposons que l'on choisisse un système de résolutions K-projectives (P, ρ) dans $\mathbf{K}(A)$. On obtient alors une présentation de $(\mathrm{L}F, \eta^{\mathrm{L}})$ comme suit : $\mathrm{L}F(M) := F(P(M))$ et $\eta^{\mathrm{L}}_M := F(\rho_M)$.

Proposition 9.2.17. *Dans la situation du théorème* (9.2.8)*, supposons que* K *possède suffisamment de K-projectifs, et soit* (P, ρ) *un système de résolutions K-projectives dans* K*. Alors la fonction P se prolonge uniquement en un foncteur triangulé* $P \colon \mathrm{D} \to \mathrm{K}_{\mathrm{prj}}$*, tel que* $\mathrm{Id}_{\mathrm{K}_{prj}} = P \circ Q_{|\mathrm{K}_{\mathrm{prj}}}$*, et* $\rho \colon Q \circ P \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathrm{D}}$ *est un isomorphisme de foncteurs triangulés.*

Corollaire 9.2.18 (Résolutions K-projectives fonctorielles)**.** *Soit* K *une sous-catégorie triangulée pleine de* $\mathbf{K}(A, \mathrm{M})$*, et supposons que* K *a suffisamment de K-projectifs.*

(1) Il existe un foncteur triangulé $I \colon \mathrm{K} \to \mathrm{K}$ *et un morphisme de foncteurs triangulés* $\rho \colon \mathrm{Id}_{\mathrm{K}} \Rightarrow I$*, tels que pour tout objet* $M \in \mathrm{K}$ *l'objet* $P(M)$ *est K-projectif, et le morphisme* $\rho_M \colon M \to I(M)$ *est un quasi-isomorphisme.*

(2) Si (I', ρ') *est une autre paire de ce type, alors il existe un unique isomorphisme de foncteurs triangulés* $\zeta \colon I' \Rightarrow I'$ *tel que* $\rho' = \zeta \circ \rho$*.*

9.3. **DG Modules K-plats.**

Rappelons que pour un DG anneau A, son DG anneau opposé est A^{op}. Les objets de $\mathbf{C}(A^{\mathrm{op}})$ sont les DG A-modules à droite.

Définition 9.3.1. Un DG module $P \in \mathbf{C}(A)$ est dit *K-plat* si pour tout DG module acyclique $N \in \mathbf{C}(A^{\mathrm{op}})$, le DG $\mathbb{K}$-module $N \otimes_A P$ est acyclique.

Définition 9.3.2. Soit $M \in \mathbf{C}(A)$. Une résolution K-plate de M est un quasi-isomorphisme $\rho \colon P \to M$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$, où P est un DG module K-plat.

Définition 9.3.3. Soit K une sous-catégorie pleine de $\mathbf{K}(A)$. La sous-catégorie pleine de K sur les modules DG K-plats qu'elle contient est notée $\mathrm{K}_{\mathrm{flat}}$. Autrement dit, $\mathrm{K}_{\mathrm{flat}} = \mathbf{K}(A)_{\mathrm{flat}} \cap \mathrm{K}$.

Proposition 9.3.4. *Si* $P \in \mathbf{C}(A)$ *est K-projectif alors il est K-plat.*

Preuve. Soit $\mathbb{K}^*$ un cogénérateur injectif de $\mathbf{M}(\mathbb{K}) = \operatorname{Mod} \mathbb{K}$. Cela signifie que $\mathbb{K}^*$ est un $\mathbb{K}$-module injectif, tel que tout $\mathbb{K}$-module non nul W admet un homomorphisme non nul $W \to \mathbb{K}^*$. Il n'est pas difficile de voir qu'un DG $\mathbb{K}$-module W est acyclique si et seulement si $\mathrm{Hom}(W, \mathbb{K}^*)$ est acyclique (on le montrer dans le remarque suivante).

Soit un complexe acyclique $N \in \mathbf{C}(A^{\mathrm{op}})$. Alors par adjonction de Hom et du produit tensoriel, il y a un isomorphisme de DG $\mathbb{K}$-modules

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(N \otimes_A P, \mathbb{K}^*) \cong \mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(N, \mathbb{K}^*)).$$

La partie droite est acyclique pas hypothèse, donc la gauche également. Ainsi, $N \otimes_A P$ est acyclique.

□

Remarque. Le foncteur $F \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K}^*)$ avec $\mathbb{K}^*$ un cogénérateur injectif est exact et fidèle. L'exactitude découle du fait que $\mathbb{K}^*$ est injectif. Considérons maintenant $f \colon X \to Y$ non nul, on va montrer que $F(f) \colon \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(Y, \mathbb{K}^*) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(X, \mathbb{K}^*)$ est non nul. Cela suffit pour conclure puisque le foncteur est additif. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, two heads, "p"'] & Y \arrow[r, "v"] & \mathbb{K}^* \\ & \operatorname{Im} f \arrow[u, hook, "i"] \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

où, puisque $f \neq 0$ on a $\operatorname{Im} f \neq 0$ et donc $\mathbb{K}^*$ étant un cogénérateur on a $\neq u \colon \operatorname{Im} f \to \mathbb{K}^*$, et $\mathbb{K}^*$ étant injectif on a $v \colon Y \to \mathbb{K}^*$, qui fait commuter le deuxième triangle. Maintenant, $F(f)(v) = f \circ v = u \circ p \neq 0$ puisque $u \neq 0$ et p est un épimorphisme. On a donc bien la fidélité.

Ainsi, on vient de voir que $\mathbb{K}^*$ est un cogénérateur injectif implique que $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K}^*)$ est fidèle et exact. La réciproque est vraie.

En effet, on a déjà vu que $\mathbb{K}^*$ est injectif. Prenons maintenant $X \neq 0$, puisque $F \coloneqq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(-, \mathbb{K}^*)$ est fidèle alors $F(\mathrm{id}_X) \neq 0$ et donc il existe $g \colon X \to \mathbb{K}^*$ tel que $g = \mathrm{id}_X \circ g \neq 0$.

Finalement, il est facile à voire que H^i commute avec les foncteurs exacte, et on a donc le résultat.

Remarque. Le Lemme [8, Lemma 2.7.11] nous donne que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Les étapes 1 et 2 de la preuve du Théorème [8, Theorem 2.7.13] montrent que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est un cogénérateur et que pour n'importe quel anneau A, $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$ est cogénérateur injectif de $\operatorname{Mod} A$.

Proposition 9.3.5. *Un DG module* $P \in \mathbf{K}(A)$ *est K-plat si et seulement si*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(P, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(N, J)) = 0$$

pour tout acyclique $N \in \mathbf{C}(A^{\mathrm{op}})$ *et tout injectif* $J \in \operatorname{Mod} \mathbb{K}$*.*

Preuve. Supposons que P est K-plat, alors $N \otimes_A P$ est acyclique, et pour J injectif on a alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(P, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(N, J)) = \mathrm{H}^0(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(N \otimes_A P, J)) = 0$$

Réciproquement, on prend un cogénérateur injectif $\mathbb{K}^*$, alors pour N acyclique, on a $N \otimes_A P$ acyclique si et seulement si $\mathrm{Hom}(N \otimes_A P, \mathbb{K}^*)$ est acyclique. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(N \otimes_A P, \mathbb{K}^*) = \mathrm{Hom}_A(P, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(N, \mathbb{K}^*))$, alors on a que $N \otimes_A P$ est acyclique par hypothèse.

□

Proposition 9.3.6. *Soit* K *une sous-catégorie triangulée pleine de* $\mathbf{K}(A)$*. Alors* $\mathrm{K}_{\mathrm{flat}}$ *est une sous-catégorie triangulée pleine de* K.

Preuve. Il suffit de voir que $\mathbf{K}(A)_{\mathrm{flat}}$ est une sous-catégorie triangulée pleine de $\mathbf{K}(A)$.

Il est clair qu'elle est fermée sous translations.

Soit $P \to Q \to R \xrightarrow{\Delta}$ un triangle distingué dans $\mathbf{K}(A)$ avec $P, Q \in \mathbf{K}(A)_{\mathrm{flat}}$. On va utiliser la proposition précédente, soit $N \in \mathbf{C}(A^{\mathrm{op}})$ acyclique et $J \in \mathrm{Mod}\,\mathbb{K}$ injectif. On obtient une suite exacte

$$\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(\mathrm{T}^{-1}(P), \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(N, J))}_{=0} \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(R, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(N, J)) \to \underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(Q, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(N, J))}_{=0}.$$

Donc $\mathrm{Hom}_{\mathbf{K}(A)}(R, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(N, J)) = 0$ pour tout acyclique $N \in \mathbf{C}(A^{\mathrm{op}})$ et tout injectif $J \in \mathrm{Mod}\,\mathbb{K}$, donc R est K-plat.

□

10.1. Limites Directes et Inverses des Complexes.

Les limites dans les catégories abéliennes abstraites et DG (sans parler des catégories triangulées) sont très délicates.

Proposition 10.1.1. *(1) Soit $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un système direct dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$. Supposons que pour tout i la limite directe $\varinjlim_k M_k^i$ existe dans M. Alors la limite directe $M = \varinjlim_k M_k$ existe dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, et en degré i elle est $M^i = \varinjlim_k M_k^i$.*

(2) Soit $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un système inverse dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$. Supposons que pour tout i la limite inverse $\varprojlim_k M_k^i$ existe dans M. Alors la limite inverse $M = \varprojlim_k M_k$ existe dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, et en degré i elle est $M^i = \varprojlim_k M_k^i$.

Preuve. On vérifie le premier cas, le second étant similaire. Pour chaque entier i on définit $M^i := \varinjlim_k M_k^i \in \mathrm{M}$. Par la propriété universelle de la limite directe, les différentielles $\mathrm{d}\colon M_k^i \to M_k^{i+1}$ induisent des différentielles $\mathrm{d}\colon M^i \to M^{i+1}$, et on va ainsi obtenir un complexe $M := \{M^i\}_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$. De même, tout élément $a \in A^j$ induit des morphismes $a\colon M^i \to M^{i+j}$ dans M, et donc M devient un objet de $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$. Il existe des morphismes $M_k \to M$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, et il est facile de voir qu'ils font de M une limite directe du système $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}}$.

□

Puisque les limites existent dans $\mathrm{M} = \operatorname{Mod} \mathbb{K}$, la proposition ci-dessus dit qu'elles existent dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$. De même, elles existent dans la catégorie $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ des $\mathbb{K}$-modules gradués.

On dit qu'un système direct $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dans M est éventuellement stationnaire si $\mu_k\colon M_k \to M_{k+1}$ sont des isomorphismes pour un k grand. De même, nous pouvons parler d'un système inverse éventuellement stationnaire. La limite d'un système éventuellement stationnaire (direct ou inverse) existe toujours ; elle est M_k pour k assez grand.

Proposition 10.1.2. *(1) Soit $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un système direct dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$. Supposons que pour chaque i le système direct $\{M_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ dans M soit éventuellement stationnaire. Alors la limite directe $M = \varinjlim_k M_k$ existe dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, la limite directe $\varinjlim_k \mathrm{H}(M_k)$ existe dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$, et le morphisme canonique $\varinjlim_k \mathrm{H}(M_k) \to \mathrm{H}(M)$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$ est un isomorphisme.*

(2) Soit $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ un système inverse dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$. Supposons que pour chaque i le système inverse $\{M_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ dans M soit éventuellement stationnaire. Alors la limite inverse $M = \varprojlim_k M_k$ existe dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, la limite inverse $\varprojlim_k \mathrm{H}(M_k)$ existe dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$, et le morphisme canonique $\mathrm{H}(M) \to \varprojlim_k \mathrm{H}(M_k)$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$ est un isomorphisme.

Preuve. Encore une fois, nous ne prouvons que le point *(1)*. Comme mentionné plus haut, pour chaque i la limite $M^i = \varinjlim_k \to M_k^i$ existe dans M. D'après la proposition précédente la limite $M = \varinjlim_k M_k$ existe dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$.

Pour le résultat sur la cohomologie on fixe un entier i. Soit k suffisamment grand pour que $M_k^{i'} \to M_{k'}^{i'}$ soient des isomorphismes pour tout $k \leqslant k'$ et $i - 1 \leqslant i' \leqslant i + 1$. Alors $M_{k'}^{i'} \to M^{i'}$ sont des isomorphismes dans cet intervalle, et donc $\mathrm{H}^(M_{k'}) \to \mathrm{H}^i(M)$ sont des isomorphismes pour tout $k \leqslant k'$. On voit que le système direct $\{\mathrm{H}^i(M_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ est éventuellement stationnaire, et sa limite directe est $\mathrm{H}^i(M)$.

□

Quand on laisse tomber la catégorie abélienne abstraite M, c'est-à-dire quand on travaille avec $\mathrm{M} = \operatorname{Mod} \mathbb{K}$, il n'y a pas de problème d'existence de limites. La proposition suivante dit que de plus "les limites directes sont exactes" dans $\mathbf{C}_{\mathrm{stre}}(A)$.

Proposition 10.1.3. *([6, Tag 00DB])) Soit $\{M_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ un système direct dans $\mathbf{C}_{\mathrm{stre}}(A)$, de limite $M = \varinjlim_k M_k$. Alors l'homomorphisme canonique $\varinjlim_k \mathrm{H}(M_k) \to \mathrm{H}(M)$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ est bijectif.*

Preuve. Du fait que H commute avec les foncteurs exacts, si on montre que le foncteur $\varinjlim_{k \in \mathbb{N}}\colon \operatorname{Fun}(\mathbb{N}, \operatorname{Mod} \mathbb{K}) \to \operatorname{Mod} \mathbb{K}$ est exact, alors on pourra conclure.

Soit $(K_i, h_{i,j}) \xrightarrow{\phi_i} (N_i, g_{i,j}) \xrightarrow{\psi_i} (M_i, f_{i,j})$ une suite exacte, alors on va montrer que $\varinjlim K_i \xrightarrow{\phi} \varinjlim N_i \xrightarrow{\psi} \varinjlim M_i$ est exacte. Pour les morphismes, on a le diagramme commutatif pour $i < j$

$$\begin{tikzcd} K_i \arrow[rr, "h_{i,j}"] \arrow[dr, "h_i"'] & & K_j \arrow[dl, "h_j"] \\ & \varinjlim K_i & \end{tikzcd}$$

avec $h_{i,i} = \mathrm{id}$, et de même pour les autres.

Soit $x \in \operatorname{Ker} \psi$, alors on dispose d'un $x_i \in N_i$ tel que $g_i(x_i) = x$ par la formule explicite de la limite, $\varinjlim N_i = \coprod N_i / \sim$. Alors, pour voir les calcules qui vont suivre, considérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} K_i \arrow[r, "\phi_i"] \arrow[d, "h_i"] & N_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "g_i"] & M_i \arrow[d, "f_i"] \\ \varinjlim K_i \arrow[r, "\phi"] & \varinjlim N_i \arrow[r, "\psi"] & \varinjlim M_i \end{tikzcd} .$$

On a $0 = \psi(g_i(x_i)) = f_i(\psi_i(x_i))$, donc il existe $j \geqslant i$ tel que $f_{i,j}(\psi_i(x_i)) = 0$ dans M_j. Or on a $f_{i,j} \circ \psi_i = \psi_j \circ g_{i,j}$, donc $g_{i,j}(x_i) \in \operatorname{Ker} \psi_j = \operatorname{Im} \phi_j$. Ainsi, pour un certain $y_j \in K_j$ on a $g_{i,j}(x_i) = \phi_j(y_j)$. Finalement,

$$x = g_i(x_i) = g_j(g_{i,j}(x_i)) = g_j(\phi_j(y_j)) = \phi(h_j(y_j)) \in \operatorname{Im} \phi$$

comme on le souhaitait.

Soit maintenant $x \in \operatorname{Im} \phi$, alors on écrit $x = \phi(y)$ pour un certain $y \in \varinjlim K_i$ donc $y = h_i(y_i)$ pour $y_i \in K_i$. Alors $x = \phi(h_i(y_i)) = g_i(\phi_i(y_i))$ et donc $\psi(x) = \psi(g_i(\phi_i(y_i))) = f_i(\underbrace{\psi_i \circ \phi_i}_{=0}(y_i)) = 0$ comme on le souhaitait.

Donc le foncteur de colimite $\varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \colon \operatorname{Fun}(\mathbb{N}, \operatorname{Mod} \mathbb{K}) \to \operatorname{Mod} \mathbb{K}$ est exact, et on conclut.

$\square$

Remarque. Remarquons qu'un foncteur F est exact si et seulement si il conserve les suite exacte du type $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$.

En effet, il y a un sens qui est direct. Supposons maintenant que F soit exacte, et soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ une suite exacte. Il faut montrer que $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C)$ est exacte. Pour cela on élargit notre suite en des suites exacte courtes de la façon suivante

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
& \operatorname{Ker} f \arrow[dr] & & & & \operatorname{Im} g \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & B \arrow[rr, "g"] \arrow[ur] & & C \arrow[dr] & & \\
& & & \operatorname{Im} f \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \operatorname{Coker} g \arrow[dr] & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & 0
\end{tikzcd}$$

dont les diagonales sont des suites exacte courtes. On justifie peut être celle du milieu, $\operatorname{Ker}(B \to \operatorname{Im} g) = \operatorname{Ker}(B \to \operatorname{Im} g \to C)$ puisque $\operatorname{Im} g \to C$ est un monomorphisme, donc $\operatorname{Ker}(B \to \operatorname{Im} g) = \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$ par hypothèse. Maintenant, on applique le foncteur F qu'on suppose exact

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
& F(\operatorname{Ker} f) \arrow[dr] & & & & F(\operatorname{Im} g) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
& & F(A) \arrow[rr, "F(f)"] \arrow[dr] & & F(B) \arrow[rr, "F(g)"] \arrow[ur] & & F(C) \arrow[dr] & & \\
& & & F(\operatorname{Im} f) \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & F(\operatorname{Coker} g) \arrow[dr] & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & 0
\end{tikzcd}$$

dont les diagonales sont des suites exacte courtes. Alors, $\operatorname{Im} F(f) = \operatorname{Im}(F(\operatorname{Im} f) \to F(B))$ puisque $F(A) \to F(\operatorname{Im} f)$ est un épimorphisme. Ainsi, par exactitude $\operatorname{Im}(F(\operatorname{Im} f) \to F(B)) = \operatorname{Ker}(F(B) \to F(\operatorname{Im} g))$ et donc on trouve, puisque $F(\operatorname{Im} g) \to F(C)$ est un monomorphisme,

$$\operatorname{Im} F(f) = \operatorname{Ker} F(g)$$

comme on le voulait.

L'exactitude des limites inverses a tendance à être beaucoup plus compliquée que celle des limites directes, même pour les $\mathbb{K}$-modules. Nous devons toujours imposer une condition au système inverse pour avoir une exactitude de la limite.

Soit $(\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ un système inverse dans $\mathbf{M}(\mathbb{K})$. Pour tout $k \leqslant l$ soit $M_{k,l} \subseteq M_k$ l'image de l'homomorphisme $\mu_{k,l}\colon M_l \to M_k$. Notons qu'il existe des inclusions $M_{k,l+1} \subseteq M_{k,l}$, donc pour k fixé on a un système inverse $\{M_{k,l}\}_{l\geqslant k}$ de sous-modules de M_k.

Définition 10.1.4. On dit qu'un système inverse $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{M}(\mathbb{K})$ a la propriété de *Mittag–Leffler* si pour tout indice k, le système inverse $\{M_{k,l}\}_{l\geqslant k}$ est éventuellement stationnaire.

Exemple 10.1.5. Si le système inverse $(\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}, \{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}})$ dans $\mathbf{M}(\mathbb{K})$ satisfait au moins une des conditions suivantes, alors il a la propriété de Mittag–Leffler :

(1) Le système a des transitions surjectives.

(2) Le système est éventuellement stationnaire.

(3) Pour tout $kin\mathbb{N}$ il existe un $l \geqslant k$ tel que $M_{k,l} = 0$. C'est ce qu'on appelle la *propriété triviale de Mittag–Leffler*, et on dit que le système est *pro-zéro*.

Théorème 10.1.6 (Argument de Mittag–Leffler)**.** *Soit $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un système inverse dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$, de limite inverse $M = \varprojlim_k M_k$. Supposons que le système satisfasse les deux conditions :*

(1) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ le système inverse $\{M_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{M}(\mathbb{K})$ a la propriété de Mittag–Leffler.

(2) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ le système inverse $\mathrm{H}^i(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbf{M}(\mathbb{K})$ a la propriété de Mittag–Leffler.

Alors les homomorphismes canoniques $\mathrm{H}^i(M) \to \varprojlim_k \mathrm{H}^i(M_k)$ sont bijectifs pour tout i.

Preuve. [8, Theorem 11.1].

□

L'exemple le plus utile de l'argument de ML est celui-ci

Corollaire 10.1.7. *Soit $\{M_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un système inverse dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$, de limite inverse $M = \varprojlim_k M_k$. Supposons que le système satisfasse les deux conditions :*

(1) Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ le système inverse $\{M_k^i\}_{k\in\mathbb{N}}$ a des transitions surjectives.

(2) Pour tout k le DG module M_k est acyclique.

Alors M est acyclique.

Définition 10.1.8. Étant donné $i_0 \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ et $i_1 \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, avec $i_0 \leqslant i_1$, l'*intervalle d'entiers* avec ces extrémités est l'ensemble

$$[i_0, i_1] \coloneqq i \in \mathbb{Z} \mid i_0 \leqslant i \leqslant i_1 \subseteq \mathbb{Z}.$$

Il existe aussi l'intervalle entier vide $\emptyset$. Lorsque les éléments d'un intervalle entier représentent des degrés, nous l'appelons parfois un *intervalle de degrés.*

Définition 10.1.9. Soit $\{M^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ un objet gradué dans M, et soit $S \coloneqq \{i \in \mathbb{Z} \mid M^i \neq 0\} \subseteq \mathbb{Z}$.

(1) Le *supremum* de M est $\sup(M) \coloneqq \sup(S) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$.

(2) L'*infimum* de M est $\inf(M) \coloneqq \inf(S) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$.

(3) L'*amplitude* de M est $\mathrm{amp}(M) \coloneqq \sup(M) - \inf(M) \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$.

10.2. **Totalisations.**

Considérons un complexe

$$(M, \partial) = (\cdots \to M^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}})M^0 \xrightarrow{\partial^0})M^1 \to \cdots)$$

avec entrées dans la catégorie abélienne $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$. Cela signifie que pour tout $i \in \mathbb{Z}$ il existe un DG module $(M^i, \mathrm{d}_{M^i}) \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$, et un morphisme $\partial^i\colon M^i \to M^{i+1}$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, tel que $\partial^{i+1} \circ \partial^i = 0$. Rappelons que la "strict" de ∂^i dit qu'il est de degré 0, et que

$$\partial^i \circ \mathrm{d}_{M^i} = \mathrm{d}_{M^{i+1}} \circ \partial^i.$$

En termes de nos notations, (M, ∂) est un objet de la DG catégorie $\mathbf{C}(\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M}))$.

Chaque DG module (M^i, d_{M^i}) admet sa propre structure interne

$$(M^i, \mathrm{d}_{M^i}) = (\{M^{i,j}\}_{j\in\mathbb{Z}}, \{\mathrm{d}^j_{M^i}\}_{j\in\mathbb{Z}}).$$

Ici $M^{i,j} \in \mathrm{M}$, $\mathrm{d}^j_{M^i}\colon M^{i,j} \to M^{i,j+1}$ est un morphisme dans M, et la relation $\mathrm{d}^{j+1}_{M^i} \circ \mathrm{d}^j_{M^i} = 0$ est vérifiée. Il y a une action du DG anneau A sur M^i, donnée par un DG homomorphisme d'anneaux $f_{M^i}\colon A \to \mathrm{End}_{\mathrm{M}}(M^i)$.

Parfois, nous considérons M comme un double complexe, et nous nous référons à ses lignes et colonnes : M^i est la i-ème colonne de M, et $\{M^{i,j}\}_{i\in\mathbb{Z}}$ est sa j-ème ligne.

$$
\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots \arrow[r] & M^{-1,1} \arrow[u] \arrow[r, "\partial^{-1,1}"] & M^{0,1} \arrow[u] \arrow[r, "\partial^{0,1}"] & M^{1,1} \arrow[u] \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & M^{-1,0} \arrow[u, "\mathrm{d}^0_{M^{-1}}"'] \arrow[r, "\partial^{-1,0}"] & M^{0,0} \arrow[u, "\mathrm{d}^0_{M^0}"'] \arrow[r, "\partial^{0,0}"] & M^{1,0} \arrow[u, "\mathrm{d}^0_{M^1}"'] \arrow[r] & \cdots \\
 & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] & \vdots \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

Rappelons que si la catégorie abélienne M a des sommes directes dénombrables, alors $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$ aussi. Aussi, $A^\natural$ est l'anneau gradué sous-jacent de l'anneau DG A.

Définition 10.2.1. Supposons que M possède des sommes directes dénombrables. Étant donné un complexe (M,∂) avec des entrées dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A,\mathrm{M})$, sa *totalisation en somme directe* est l'objet

$$\mathrm{Tot}^{\oplus}(M,\partial)=(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M),\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}})\in\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$$

défini comme suit, en quatre étapes :

(1) On a un objet gradué

$$\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)\coloneqq\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{T}^{-i}(M^i)\in\mathbf{G}(A^\natural,\mathrm{M}).$$

(2) Sur chaque élément de la somme $\mathrm{T}^{-i}(M^i)$ de $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)$ il existe une différentielle $\mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-i}(M^i)}$, et on définit l'opérateur de degré 1 $\mathrm{d}_M\coloneqq\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-i}(M^i)}$ sur $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)$.

(3) Pour chaque i, on pose

$$\mathrm{tot}(\partial)^i\coloneqq\mathrm{t}^{-1}_{\mathrm{T}^{-(i+1)}(M^{i+1})}\circ\mathrm{T}^{-i}(\partial^i)\colon\ \mathrm{T}^{-i}(M^i)\to\mathrm{T}^{-(i+1)}(M^{i+1}).$$

On définit l'opérateur de degré 1 $\mathrm{tot}(\partial)\coloneqq\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{tot}(\partial)^i$ sur l'objet gradué $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)$.

(4) La différentielle $\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}}$ sur l'objet gradué $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)$ est $\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}}\coloneqq\mathrm{d}_M+\mathrm{tot}(\partial)$.

Plus précisément, on a $(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M))^n=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}M^{i,n-i}$ et $\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}}{}^n=\sum_{i\in\mathbb{Z}}(\partial^{i,n-i}+(-1)^i\cdot\mathrm{d}^{n-i}_{M^i})$.
Pour que la définition soit valide, nous devons vérifier :

Lemme 10.2.2. *L'opérateur de degré 1* $\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}}$ *fait du couple* $(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M),\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}})$ *un objet de* $\mathbf{C}(A,\mathrm{M})$.

Preuve. Il faut vérifier que $\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}}\circ\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}}=0$ et que $\mathrm{tot}(\partial)$ est A-linéaire. Le dernier point est facile a voir avec le forme explicite de $\mathrm{tot}(\partial)$ degré par degré.

Pour un $i\in\mathbb{Z}$ donné, considérons le morphisme composé à partir de la somme $\mathrm{T}^{-i}(M^i)$ du DG module DG :

$$\mathrm{T}^{-i}(M^i)\xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}}}\mathrm{T}^{-i}(M^i)\oplus\mathrm{T}^{-(i+1)}(M^{i+1})\xrightarrow{\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}}}\mathrm{T}^{-i}(M^i)\oplus\mathrm{T}^{-(i+1)}(M^{i+1})\oplus\mathrm{T}^{-(i+2)}(M^{i+2}).$$

Qui en termes matriciels nous donne

$$\begin{bmatrix}\mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-i}(M^i)} & 0\\ \mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{T}^{-i}(\partial^i) & \mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-(i+1)}(M^{i+1})}\\ 0 & \mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{T}^{-(i+1)}(\partial^{i+1})\end{bmatrix}\circ\begin{bmatrix}\mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-i}(M^i)}\\ \mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{T}^{-i}(\partial^i)\end{bmatrix}$$

La colonne d'opérateurs résultante a $\mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-i}(M^i)}\circ\mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-i}(M^i)}=0$ en première position. Dans la deuxième position, on a

$$\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{T}^{-i}(\partial^i)\circ\mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-i}(M^i)}+\mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-(i+1)}(M^{i+1})}\circ\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{T}^{-i}(\partial^i).$$

Alors,

$$\mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-(i+1)}(M^{i+1})}\circ\mathrm{t}^{-1}=-\,\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-i}(M^{i+1})}=-\,\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{T}^{-i}(\mathrm{d}_{M^{i+1}}).$$

Donc le terme en deuxième position est

$$-\,\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{T}^{-i}(\partial^i\circ\mathrm{d}_{M^i}-\mathrm{d}_{M^{i+1}}\circ\partial^i)=0$$

puisque ∂^i est strict. Le dernier termes est

$$\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{T}^{-(i+1)}(\partial^{i+1})\circ\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{T}^{-i}(\partial^i).$$

Donc, vu que

$$\mathrm{T}^{-(i+1)}(\partial^{i+1})\circ\mathrm{t}^{-1}=\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{T}(\mathrm{T}^{-(i+1)}(\partial^{i+1}))=\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{T}^{-i}(\partial^{i+1}),$$

et alors le dernier termes devient $\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{T}^{-i}(\partial^{i+1}\circ\partial^i)=0$.

$\square$

Exemple 10.2.3. Si $M^i = 0$ pour $i \neq -1, 0$ alors
$$\mathrm{Tot}^{\oplus}(M, \partial) = \mathrm{Cone}(\partial^{-1} \colon M^-1 \to M^0).$$

Définition 10.2.4. Soit N une catégorie abélienne. Pour un complexe $N \in \mathbf{C}(\mathrm{N})$ ses *troncatures stupides* en un entier q sont
$$\mathrm{stt}^{\leqslant q}(N) := (\cdots \to N^{q-1} \to N^q \to 0 \to 0 \to \cdots)$$
et
$$\mathrm{stt}^{\geqslant q}(N) := (\cdots \to 0 \to 0 \to N^q \to N^{q11} \to \cdots).$$

Ces troncatures donne la suite exacte courte suivante dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{N})$,
$$0 \to \mathrm{stt}^{\geqslant q}(N) \to N \to \mathrm{stt}^{\leqslant q-1}(N) \to 0$$
On remarque que les troncatures stupides ne s'appliquent pas aux DG modules $N \in \mathbf{C}(B, \mathrm{N})$, sauf si le DG anneau B est un anneau.

Proposition 10.2.5. *Soit*
$$(M, \partial) = (\cdots \to M^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} M^0 \xrightarrow{\partial^0} M^1 \to 0 \to \cdots)$$
un complexe avec des entrées dans la catégorie abélienne $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$*, soit*
$$(M', \partial) := (\cdots \to M^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}}) M^0 \to 0 \to \cdots),$$
la troncature stupide de M en dessous de 0, et soit $\rho\colon \mathrm{Tot}^{\oplus}(M', \partial) \to M^1$ *le morphisme dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ *induit par* $\partial^0 \colon M^0 \to M^1$*. Alors il existe une isomorphe*
$$\mathrm{T}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M, \partial)) \cong \mathrm{Cone}(-\rho\colon\ \mathrm{Tot}^{\oplus}(M', \partial) \to M^1)$$
dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$.

Preuve. [8, Proposition 11.2.13].

□

Corollaire 10.2.6. *Dans la situation du théorème précédent, si le DG module* $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M, \partial)$ *est acyclique, alors* $\rho\colon \mathrm{Tot}^{\oplus}(M', \partial) \to M^1$ *est un quasi-isomorphisme.*

Preuve. Si $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M, \partial)$ est acyclique alors $\mathrm{T}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M, \partial))$ est acyclique également. La proposition précédente nous dit que $-\rho$ est un quasi-isomorphisme, donc ρ également.

□

Définition 10.2.7. Soit $M \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$.

(1) Une *filtration* sur M est un système direct $\{F_j(M)\}_{j \geqslant -1}$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ constitué de sous-objets $F_j(M) \subseteq M$, indexés par l'intervalle $[-1, \infty] \subseteq \mathbb{Z}$ compatibles.

(2) On dit que $M = \varinjlim_j F_j(M)$ si la limite directe existe, et le morphisme canonique $\varinjlim_j F_j(M) \to M$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ est un isomorphisme.

(3) La filtration F induit, pour chaque $j \geqslant 0$, le sous-quotient
$$\mathrm{Gr}^F_j(M) := F_j(M)/F_{j-1}(M) \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M}).$$
appelé le gradué associé.

Nos filtrations seront toujours ascendantes. Mais parfois elles seront indexées par un sous-intervalle $[j_0, j_1]$ de $[-1, \infty]$; et dans ce cas $\mathrm{Gr}^F_j(M)$ ne sera défini que pour $j \in [j_0 + 1, j_1]$.

Dans la proposition suivante on prend $\mathrm{M} = \mathbf{M}(\mathbb{K})$; mais en réalité, tout ce dont nous avons besoin est que M ait des limites directes dénombrables exactes.

Rappelons que pour un DG A-module M on note $\mathrm{Z}(M)$ l'objet des cocycles de M. C'est un objet de $\mathbf{G}(\mathbb{K})$.

Proposition 10.2.8. *Soit* (M, ∂) *un complexe à entrées dans la catégorie abélienne* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$*. Supposons que les deux conditions ci-dessous sont vérifiées :*

(1) Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ *le complexe*
$$(\cdots \to M^{-1,j} \xrightarrow{\partial^{-1}} M^{0,j} \xrightarrow{\partial^0} M^{1,j} \to \cdots)$$
à entrées dans $\mathbf{M}(\mathbb{K})$ *est acyclique.*

(2) Il existe un certain $j_1 \in \mathbb{Z}$ *tel que pour tout* $j \geqslant j_1$ *le complexe*
$$(\cdots \to \mathrm{Z}^j(M^{-1}) \xrightarrow{\partial^{-1}} \mathrm{Z}^j(M^0) \xrightarrow{\partial^0} \mathrm{Z}^j(M^1) \to \cdots)$$
à entrées dans $\mathbf{M}(\mathbb{K})$ *est acyclique.*

Alors le DG A-module $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M, \partial)$ *est acyclique.*

Preuve. La preuve se fait en deux étapes.

Étape 1 : Remplaçons la condition *(2)* par la condition plus forte :

(2') Il existe un $j'_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $M^{i,j} = 0$ pour tout $j > j'_1$.

Pour tout i on introduit une filtration $\{F_q(M^i)\}_{q \geqslant -1}$ sur le DG $\mathbb{K}$-module M^i comme suit :

$$F_q(M^i) := \mathrm{stt}^{\geqslant j'_1 - q}(M^i) = (\cdots \to 0 \to M^{i,j'_1-q} \xrightarrow{\mathrm{d}_{M^i}} M^{i,j'_1-q+1} \to \cdots),$$

la troncature stupide au-dessus de $j'_1 - q$. Ces filtrations induisent une filtration sur le DG $\mathbb{K}$-module $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M, \partial)$

$$F_q(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)) := \mathrm{Tot}^{\oplus}(\cdots \to F_q(M^{-1}) \xrightarrow{\partial^{-1}} F_q(M^0) \xrightarrow{\partial^0} F_q(M^1) \to \cdots).$$

On remarque que $F_{-1}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)) = 0$, et

$$\bigcup_{q \geqslant -1} F_q(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)) = \mathrm{Tot}^{\oplus}(M). \tag{10.2.9}$$

Pour tout $q \geqslant 0$ le DG $\mathbb{K}$-module $\mathrm{Gr}^F_q(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M))$ est isomorphe dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, à signes des différentielles près, au complexe de la condition *(1)* d'indice $j = j'_1 - q$, il est donc acyclique. Pour $q = -1$ on a trivialement un DG $\mathbb{K}$-module acyclique $F_{-1}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M))$. Pour tout $q \geqslant 0$ il existe une suite exacte

$$0 \to F_{q-1}(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)) \to F_q(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)) \to \mathrm{Gr}^F_q(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)) \to 0$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Par récurrence sur q on conclut que $F_q(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M))$ est acyclique. Par (10.2.9), et le fait que la cohomologie commute avec les limites directes dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, on voit que le DG module $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M, \partial)$.

Étape 2 : Nous supposons maintenant les conditions de la proposition. Pour chaque i on introduit une filtration $\{G_q(M^i)\}_{q \geqslant 0}$ sur le DG $\mathbb{K}$-module M^i comme suit

$$G_q(M^i) := \mathrm{smt}^{\leqslant j_1 + q}(M^i) = (\cdots \to M^{i,j_1+q-1} \xrightarrow{\mathrm{d}_{M^i}} \mathrm{Z}^{j_1+q}(M^i) \to 0 \to \cdots),$$

la troncature intelligente en dessous $j_1 + q$.

Pour tout q, le complexe

$$G_q(M) := (\cdots \to G_q(M^{-1}) \xrightarrow{\partial^{-1}} G_q(M^0) \xrightarrow{\partial^0} G_q(M^1) \to \cdots)$$

satisfait les conditions *(1)* et *(2')*, avec $j'_1 := j_1 + q$. En effet, pour $j < j_1 + q$ la j-ème ligne de $G_q(M)$ est

$$(\cdots \to M^{-1,j} \xrightarrow{\partial^{-1}} M^{0,j} \xrightarrow{\partial^0} M^{1,j} \to \cdots),$$

et elle est exacte par la condition *(1)*. Pour $j = j_1 + q$ sa j-ème ligne est

$$(\cdots \to \mathrm{Z}^j(M^{-1}) \xrightarrow{\partial^{-1}} \mathrm{Z}^j(M^0) \xrightarrow{\partial^0} \mathrm{Z}^j(M^1) \to \cdots),$$

et elle est exacte par la condition *(2)*. Et pour $j > j_1 + q$ la j-ème ligne de $G_q(M)$ est nulle. Donc, par l'étape 1, le DG module $G_q(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)) := \mathrm{Tot}^{\oplus}(G_q(M))$ est acyclique.

Finalement, comme $M = \varinjlim_q G_q(M)$, on a

$$\mathrm{Tot}^{\oplus}(M) = \varinjlim_q G_q(\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)).$$

Donc $\mathrm{Tot}^{\oplus}(M)$ est acyclique.

□

La seconde moitié de cette section traite des produits au lieu des sommes directes. Comme expliqué avant, si la catégorie abélienne M admet des produits dénombrables, alors $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$.

Définition 10.2.10. Supposons que M possède des sommes produits dénombrables. Étant donné un complexe (M, ∂) avec des entrées dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, sa *totalisation en produit directe* est l'objet

$$\mathrm{Tot}^{\Pi}(M, \partial) = (\mathrm{Tot}^{\Pi}(M), \mathrm{d}_{\mathrm{Tot}}) \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$$

défini comme suit, en quatre étapes :

(1) On a un objet gradué
$$\mathrm{Tot}^{\Pi}(M) := \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{T}^{-i}(M^i) \in \mathbf{G}(A^{\natural}, \mathrm{M}).$$

(2) Sur chaque élément de la somme $\mathrm{T}^{-i}(M^i)$ de $\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)$ il existe une différentielle $\mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-i}(M^i)}$, et on définit l'opérateur de degré 1 $\mathrm{d}_M := \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{d}_{\mathrm{T}^{-i}(M^i)}$ sur $\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)$.

(3) Pour chaque i, on pose
$$\mathrm{tot}(\partial)^i := \mathrm{t}^{-1}_{\mathrm{T}^{-(i+1)}(M^{i+1})} \circ \mathrm{T}^{-i}(\partial^i) \colon \mathrm{T}^{-i}(M^i) \to \mathrm{T}^{-(i+1)}(M^{i+1}).$$
On définit l'opérateur de degré 1 $\mathrm{tot}(\partial) := \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{tot}(\partial)^i$ sur l'objet gradué $\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)$.

(4) La différentielle $\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}}$ sur l'objet gradué $\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)$ est $\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}} := \mathrm{d}_M + \mathrm{tot}(\partial)$.

Notons que (si M a aussi des sommes directes dénombrables) il existe un plongement canonique

$$\mathrm{Tot}^{\oplus}(M) \subseteq \mathrm{Tot}^{\Pi}(M)$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$. Dans le cas où $M^i = 0$ pour $|i| \gg 0$, alors on a égalité.

Pour que la définition soit valide, nous devons vérifier :

Lemme 10.2.11. *L'opérateur de degré 1* $\mathrm{d}_{\mathrm{Tot}}$ *fait du couple* $(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M), \mathrm{d}_{\mathrm{Tot}})$ *un objet de* $\mathbf{C}(A, \mathrm{M})$.

Proposition 10.2.12. *Soit*

$$(M, \partial) = (\cdots \to 0 \to M^{-1} \xrightarrow{\partial^{-1}} M^0 \xrightarrow{\partial^0}) M^1 \to \cdots)$$

un complexe avec des entrées dans la catégorie abélienne $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$, *soit*

$$(M', \partial) := (\cdots \to 0 \to M^0 \xrightarrow{\partial^0}) M^1 \to \cdots),$$

la troncature stupide de M *au dessus de 0, et soit* $\rho\colon M^{-1} \to \mathrm{Tot}^{\Pi}(M', \partial)$ *le morphisme dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ *induit par* $\partial^{-1}\colon M^{-1} \to M^0$. *Alors il existe une isomorphe*

$$\mathrm{Tot}^{\Pi}(M, \partial) \cong \mathrm{Cone}(\rho\colon M^{-1} \to \mathrm{Tot}^{\Pi}(M', \partial))$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$.

Corollaire 10.2.13. *Dans la situation du théorème précédent, si le DG module* $\mathrm{Tot}^{\Pi}(M, \partial)$ *est acyclique, alors* $\rho\colon M^{-1} \to \mathrm{Tot}^{\Pi}(M', \partial)$ *est un quasi-isomorphisme.*

Définition 10.2.14. Soit $M \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M})$.

(1) Une *cofiltration* sur M est un système inverse $\{F_j(M)\}_{j \geqslant -1}$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ constitué de quotients $M \twoheadrightarrow F_j(M)$, indexés par l'intervalle $[-1, \infty] \subseteq \mathbb{Z}$ compatibles.

(2) On dit que $M = \varprojlim_j F_j(M)$ si la limite inverse existe, et le morphisme canonique $M \to \varprojlim_j F_j(M)$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A, \mathrm{M})$ est un isomorphisme.

(3) La cofiltration F induit, pour chaque $j \geqslant 0$, le sous-quotient

$$\mathrm{Gr}_j^F(M) := \mathrm{Ker}(F_j(M) \to F_{j-1}(M)) \in \mathbf{C}(A, \mathrm{M}).$$

appelé le gradué associé.

Rappelons que pour un DG A-module M on note $\mathrm{Y}(M) := M / \mathrm{B}(M)$; c'est l'objet des décocycles de M, et il appartient à $\mathbf{G}(\mathbb{K})$.

Proposition 10.2.15. *Soit* (M, ∂) *un complexe à entrées dans la catégorie abélienne* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$. *Supposons que les deux conditions ci-dessous sont vérifiées :*

(1) Pour tout $j \in \mathbb{Z}$ *le complexe*

$$(\cdots \to M^{-1,j} \xrightarrow{\partial^{-1}} M^{0,j} \xrightarrow{\partial^0} M^{1,j} \to \cdots)$$

à entrées dans $\mathbf{M}(\mathbb{K})$ *est acyclique.*

(2) Il existe un certain $j_0 \in \mathbb{Z}$ *tel que pour tout* $j \leqslant j_0$ *le complexe*

$$(\cdots \to \mathrm{Y}^j(M^{-1}) \xrightarrow{\mathrm{Y}^j(\partial^{-1})} \mathrm{Y}^j(M^0) \xrightarrow{\mathrm{Y}^j(\partial^0)} \mathrm{Y}^j(M^1) \to \cdots)$$

à entrées dans $\mathbf{M}(\mathbb{K})$ *est acyclique.*

Alors le DG A-module $\mathrm{Tot}^{\Pi}(M, \partial)$ *est acyclique.*

Preuve. La preuve se fait en deux étapes.

Étape 1 : Remplaçons la condition *(2)* par la condition plus forte :

(2') Il existe un $j_0' \in \mathbb{Z}$ tel que $M^{i,j} = 0$ pour tout $j < j_0'$.

Pour tout i on introduit une cofiltration $\{F_q(M^i)\}_{q \geqslant -1}$ sur le DG $\mathbb{K}$-module M^i comme suit : $F_q(M^i) := \mathrm{stt}^{\leqslant j_0' + q}(M^i)$, la troncature stupide en dessous $j_0' + q$. Ces cofiltrations induisent une cofiltration sur le DG $\mathbb{K}$-module $\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)$:

$$F_q(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)) := \mathrm{Tot}^{\Pi}(\cdots \to F_q(M^{-1}) \xrightarrow{\partial^{-1}} F_q(M^0) \xrightarrow{\partial^0} F_q(M^1) \to \cdots).$$

On remarque que $F_{-1}(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)) = 0$, et

$$\varprojlim_q F_q(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)) = \mathrm{Tot}^{\Pi}(M). \tag{10.2.16}$$

Pour tout $q \geqslant 0$ le DG $\mathbb{K}$-module $\mathrm{Gr}_q^F(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M))$ est isomorphe dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ au complexe dans la condition *(1)* d'indice $j = j'_0 + q$ (à un changement de signe des différentielles prés), il est donc acyclique. Pour $q = -1$ on a trivialement un DG $\mathbb{K}$-module acyclique $F_{-1}(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M))$. Pour tout $q \geqslant 0$ il existe une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Gr}_q^F(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)) \to F_q(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)) \to F_{q-1}(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)) \to 0$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Par récurrence sur q on conclut que $F_q(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M))$ est acyclique. Enfin, comme le système inverse de complexes de $\mathbb{K}$-modules (10.2.16) a des transitions surjectives, l'argument de Mittag–Leffler dit que le DG module $\mathrm{Tot}^{\Pi}(M, \partial)$ est acyclique.

Étape 2 : Nous supposons maintenant les conditions de la proposition. Pour chaque i on introduit une cofiltration $\{G_q(M^i)\}_{q \geqslant 0}$ sur le DG $\mathbb{K}$-module M^i comme suit

$$G_q(M^i) \coloneqq \mathrm{smt}^{\geqslant j_0 - q}(M^i) = (\cdots \to 0 \to \mathrm{Y}^{j_0 - q}(M^i) \xrightarrow{\mathrm{d}_{M^i}} M^{i, j_0 - q + 1} \to \cdots),$$

la troncature intelligente au dessus $j_0 - q$.

Pour tout q, le complexe

$$G_q(M) \coloneqq (\cdots \to G_q(M^{-1}) \xrightarrow{\partial^{-1}} G_q(M^0) \xrightarrow{\partial^0} G_q(M^1) \to \cdots)$$

satisfait les conditions *(1)* et *(2')*, avec $j'_0 \coloneqq j_0 - q$. En effet, pour $j > j_0 - q$ la j-ème ligne de $G_q(M)$ est

$$(\cdots \to M^{-1,j} \xrightarrow{\partial^{-1}} M^{0,j} \xrightarrow{\partial^0} M^{1,j} \to \cdots),$$

et elle est exacte par la condition *(1)*. Pour $j = j_0 - q$ sa j-ème ligne est

$$(\cdots \to \mathrm{Y}^j(M^{-1}) \xrightarrow{\mathrm{Y}^j(\partial^{-1})} \mathrm{Y}^j(M^0) \xrightarrow{\mathrm{Y}^j(\partial^0)} \mathrm{Y}^j(M^1) \to \cdots),$$

et elle est exacte par la condition *(2)*. Et pour $j < j_0 - q$ la j-ème ligne de $G_q(M)$ est nulle. Donc, par l'étape 1, le DG module $G_q(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)) \coloneqq \mathrm{Tot}^{\Pi}(G_q(M))$ est acyclique.

Finalement, comme $M = \varprojlim_q G_q(M)$, on a

$$\mathrm{Tot}^{\Pi}(M) = \varprojlim_q G_q(\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)).$$

C'est un système inverse de complexes de $\mathbb{K}$-modules avec des transitions surjectives. Selon l'argument de Mittag–Leffler, la limite $\mathrm{Tot}^{\Pi}(M)$ est acyclique.

$\square$

10.3. **Résolutions K-projectives dans $\mathbf{C}^{-}(\mathrm{M})$.**

Définition 10.3.1. Soit P un objet dans $\mathbf{C}(\mathrm{M})$.

(1) Une *filtration semi-projective* sur P est une filtration $F = \{F_j(P)\}_{j \geqslant -1}$ sur P comme objet de $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$, telle que :
   - — $F_{-1}(P) = 0$.
   - — Chaque $\mathrm{Gr}_j^F(P)$ est un complexe d'objets projectifs de M avec différentielle nulle.
   - — $P = \varinjlim_j F_j(P)$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$.

(2) Le complexe P est dit *complexe semi-projectif* s'il admet une filtration semi-projective.

Théorème 10.3.2. *Soit* M *une catégorie abélienne, et soit P un complexe semi-projectif dans* $\mathbf{C}(\mathrm{M})$. *Alors P est K-projectif.*

Preuve. On procède en quarte temps.

Étape 1 : On commence par montrer que si $P = \mathrm{T}^k(Q)$, la translation d'un objet projectif $Q \in \mathrm{M}$, alors P est K-projectif. Étant donné un complexe acyclique $N \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, N) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}^k(Q), N) \cong \mathrm{T}^{-k}(\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(Q, N))$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Comme $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(Q, -)$ est un foncteur exact $\mathrm{M} \to \mathbf{M}(\mathbb{K})$, donc $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(Q, N)$ est acyclique et on conclut.

Étape 2 : Soit maintenant P un complexe d'objets projectifs de M avec différentielle nulle. Cela signifie que $P \cong \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathrm{T}^k(Q_k)$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, où chaque Q_k est un objet projectif dans M. Mais alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, N) \cong \prod_{k \in \mathbb{K}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}^k(Q_k), N)$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Par l'étape 1 et le fait qu'un produit de complexes acycliques dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ est acyclique, on conclut que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, N)$ est acyclique.

Étape 3 : Fixons une filtration semi-projective $F = \{F_j(P)\}_{j \geqslant -1}$ sur P. On montre que pour tout j le complexe $F_j(P)$ est K-projectif. Cela se fait par récurrence sur $j \geqslant -1$. Pour $j = -1$ c'est trivial. Pour $j \geqslant 0$ il existe une suite exacte

$$0 \to F_{j-1}(P) \to F_j(P) \to \mathrm{Gr}_j^F(P) \to 0 \tag{10.3.3}$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$. Pour chaque degré $i \in \mathbb{Z}$ la suite exacte

$$0 \to F_{j-1}(P)^i \to F_j(P)^i \to \mathrm{Gr}_j^F(P)^i \to 0$$

dans M se scinde puisque $\mathrm{Gr}_j^F(P)^i$ est un objet projectif. Ainsi la suite exacte (10.3.3) est scindée exacte dans la catégorie abélienne $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$ des objets gradués dans M.

Soit $N \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$ un complexe acyclique. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(-, N)$ à la suite de complexes (10.3.3) on obtient une suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathrm{Gr}_j^F(P), N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(F_j(P), N) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(F_{j-1}(P), N) \to 0 \tag{10.3.4}$$

$\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Comme (10.3.3) est découpé exactement dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$, la suite (10.3.4) est scindée exacte dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Donc (10.3.4) est exact dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$.

Par hypothèse d'induction le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(F_{j-1}(P), N)$ est acyclique. Par l'étape 2 le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(\mathrm{Gr}_j^F(P), N)$ est acyclique. La suite de cohomologie exacte longue associée à (10.3.4) montre que le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(F_j(P), N)$ est acyclique.

Étape 4 : On garde la filtration semi-projective $F = \{F_j(P)\}_{j \geqslant -1}$ de l'étape 3. Soit un complexe acyclique $N \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$. On sait que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, N) \cong \varprojlim_j \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(F_j(P), N)$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Selon l'étape 3, les complexes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(F_j(P), N)$ sont tous acycliques. L'exactitude des suites (10.3.4) implique que le système inverse $\{\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(F_j(P), N)\}_{j \geqslant -1}$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ possède des transitions surjectives. Par l'argument de Mittag–Leffler, le complexe limite inverse $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(P, N)$ est acyclique.

□

Proposition 10.3.5. *Soit* M *une catégorie abélienne. Si* $P \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$ *est un complexe majoré d'objets projectifs, alors* P *est un complexe semi-projectif.*

Preuve. Supposons que P est non nul et $\sup(P) = i_1 \in \mathbb{Z}$. Pour $j \geqslant -1$ on pose $F_j(P) := \mathrm{stt}^{\geqslant i_1 - j}(P)$, la troncature stupide au-dessus de $i_1 - j$. Alors $\{F_j(P)\}_{j \geqslant -1}$ est une filtration semi-projective sur P.

□

Théorème 10.3.6. *Soit* M *une catégorie abélienne, et soit* $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{M}$ *une sous-catégorie pleine telle que tout objet* $M \in \mathrm{M}$ *admette un épimorphisme* $P \twoheadrightarrow M$ *d'un objet* $P \in \mathrm{P}$. *Alors tout complexe* $M \in \mathbf{C}^-(\mathrm{M})$ *admet un quasi-isomorphisme* $\rho \colon P \to M$ *dans* $\mathbf{C}^-_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$, *tel que* $\sup(P) = \sup(M)$, *et chaque* P^i *est un objet de* P.

Preuve. On procède en cinq parties.

Étape 1 : On peut supposer que $M \neq 0$. Après avoir translaté M, on peut supposer que $\sup(M) = 0$.

Étape 2 : Notons la différentielle du complexe M par $\mathrm{d}_M^i \colon M^i \to M^{i+1}$. Choisissons un épimorphisme $\rho^0 \colon P^0 \twoheadrightarrow M^0$ dans M d'un objet $P^0 \in \mathrm{P}$. On obtient un morphisme $\delta^0 \colon M^{-1} \oplus P^0 \to M^0$ dont les composantes sont d_M^{-1} et $-\rho^0$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\delta^0) = M^{-1} \times_{M^0} P^0$, le produit fibré. On choisit ensuite un épimorphisme $\psi^{-1} \colon P^{-1} \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(\delta^0)$ d'un objet $P^{-1} \in \mathrm{P}$. Il existe donc une suite exacte

$$P^{-1} \xrightarrow{\psi^{-1}} M^{-1} \oplus P^0 \xrightarrow{\delta^0} M^0 \to 0. \tag{10.3.7}$$

Les composantes de ψ^{-1} sont notées $\rho^{-1} \colon P^{-1} \to M^{-1}$ et $\mathrm{d}_P^{-1} \colon P^{-1} \to P^0$. On a ce diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & P^{-1} & \xrightarrow{\mathrm{d}_P^{-1}} & P^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho^{-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho^0} & & \\ M^{-2} & \xrightarrow{\mathrm{d}_M^{-2}} & M^{-1} & \xrightarrow{\mathrm{d}_M^{-1}} & M^0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{10.3.8}$$

dans M.

Étape 3 : C'est l'étape de récurrence. Ici $i \leqslant -1$, et nous avons déjà des objets $P^i, \ldots, P^0$ dans P, et les morphismes $\rho^i, \ldots, \rho^0$ et $\mathrm{d}_P^i, \ldots, \mathrm{d}_P^{-1}$, qui rentrent dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & P^i & \xrightarrow{\mathrm{d}_P^i} & P^{i+1} & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}_P^{-1}} & P^0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho^i} & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho^{i+1}} & & & & \big\downarrow{\scriptstyle \rho^0} & & \\ M^{i-1} & \xrightarrow{\mathrm{d}_M^{i-1}} & M^i & \xrightarrow{\mathrm{d}_M^i} & M^{i+1} & \longrightarrow & \cdots & \xrightarrow{\mathrm{d}_M^{-1}} & M^0 & \longrightarrow & 0 \end{array} \tag{10.3.9}$$

dans M. Aussi $\mathrm{d}_P^{j+1} \circ \mathrm{d}_P^j = 0$ pour tout j dans l'intervalle $[i, -1]$.

Définissons le morphisme $\delta^i\colon M^{i-1} \oplus P^i \to M^i \oplus P^{i+1}$ comme étant

$$\delta^i = \begin{bmatrix} \mathrm{d}_M^{i-1} & -\rho^i \\ 0 & -\mathrm{d}_P^i \end{bmatrix}. \tag{10.3.10}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(\delta^i) = M^{i-1} \times_{M^i \oplus P^{i+1}} P^i$.

Choisissons un épimorphisme $\psi^{i-1}\colon P^{i-1} \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(\delta^i)$ d'un objet $P^{i-1} \in \mathrm{P}$. On obtient une suite exacte

$$P^{i-1} \xrightarrow{\psi^{i-1}} M^{i-1} \oplus P^i \xrightarrow{\delta^i} M^i \oplus P^{i+1}. \tag{10.3.11}$$

Les composantes du morphisme ψ^{i-1} sont notées $\rho^{i-1}\colon P^{i-1} \to M^{i-1}$ et $\mathrm{d}_P^{i-1}\colon P^{i-1} \to P^i$. Dans la représentation matricielle est

$$\psi^{i-1} \begin{bmatrix} \rho^{i-1} \\ \mathrm{d}_P^{i-1} \end{bmatrix}. \tag{10.3.12}$$

On obtient ainsi le diagramme un peu plus grand :

$$\begin{tikzcd} P^{i-1} \arrow[r, "\mathrm{d}_P^{i-1}"] \arrow[d, "\rho^{i-1}"] & P^i \arrow[r, "\mathrm{d}_P^i"] \arrow[d, "\rho^i"] & P^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "\rho^{i+1}"] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}_P^{-1}"] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "\rho^0"] & 0 \\ M^{i-1} \arrow[r, "\mathrm{d}_M^{i-1}"] & M^i \arrow[r, "\mathrm{d}_M^i"] & M^{i+1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r, "\mathrm{d}_M^{-1}"] & M^0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{10.3.13}$$

Comme $\delta^i \circ \psi^{i-1} = 0$, il s'ensuit que $\mathrm{d}_P^i \circ \mathrm{d}_P^{i-1} = 0$ et aussi

$$\rho^i \circ \mathrm{d}_P^{i-1} = \mathrm{d}_M^{i-1} \circ \rho^{i-1}, \tag{10.3.14}$$

donc le diagramme précédent est commutatif.

Étape 4 : On effectue la construction de l'étape 3 de manière inductive pour tout $i \leqslant -1$, obtenant ainsi un diagramme comme le précédent qui va infiniment vers la gauche.

Soit $P^i := 0$ pour i positif, la collection $P := \{P^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ devient un complexe, de différentielle $\mathrm{d}_P := \{\mathrm{d}_P^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Par l'équation (10.3.14), la collection $\rho := \{\rho^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ est un morphisme strict de complexes $\rho\colon P \to M$.

Étape 5 : Il reste à prouver que ρ est un quasi-isomorphisme.

Prenons $i \leqslant 0$. Examinons ce diagramme :

$$\begin{tikzcd} P^{i-1} \arrow[r, "-\psi^{i-1}"] \arrow[d, "(0,\mathrm{id})"'] & M^{i-1} \oplus P^i \arrow[r, "\delta^i"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & M^i \oplus P^{i+1} \arrow[d, "\mathrm{id}"'] \\ M^{i-2} \oplus P^{i-1} \arrow[r, "\delta^{i-1}"] & M^{i-1} \oplus P^i \arrow[r, "\delta^i"] & M^i \oplus P^{i+1} \end{tikzcd} \tag{10.3.15}$$

En comparant la formule pour δ^{i-1} dans (10.3.10) à la formule pour $-\psi^{i-1}$ dans (10.3.12), on voit que ce diagramme est commutatif. Avec (10.3.14) on voit que $\delta^i \circ \delta^{i-1} = 0$. La ligne du haut est exacte, car (à des signes près) pour $i = 0$ elle fait partie de la suite exacte (10.3.7), et pour $i \leqslant -1$ c'est la suite exacte (10.3.11). Il s'ensuit que la ligne du bas est également exacte.

Soit $N = \{N^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ le complexe $N^i := M^{i-1} \oplus P^i$ pour tout i. La différentielle $\mathrm{d}_N = \{\mathrm{d}_N^i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ est $\mathrm{d}_N^i := -\delta^i\colon N^i \to N^{i+1}$. On a $N^i = 0$ pour $i \geqslant 2$. L'exactitude de la suite (10.3.7)) dit que $\mathrm{H}^1(N) = 0$, et l'exactitude de la deuxième ligne de (10.3.15) dit que $\mathrm{H}^i(N) = 0$ pour $i \leqslant 0$. Donc le complexe N est acyclique. Par contre, par la définition des morphismes δ^i dans (10.3.10), on voit que N est juste le cône standard sur le morphisme strict des complexes $\mathrm{T}^{-1}(\rho)\colon \mathrm{T}^{-1}(P) \to \mathrm{T}^{-1}(M)$. Donc $\mathrm{T}^{-1}(\rho)$ est un quasi-isomorphisme, et ρ aussi.

□

Définition 10.3.16. Soit M une catégorie abélienne, et soit $\mathrm{M}' \subseteq \mathrm{M}$ une sous-catégorie abélienne pleine. On dit que M' *a suffisamment de projectifs par rapport à* M si tout objet $M \in \mathrm{M}'$ admet un épimorphisme $P \twoheadrightarrow M$, où P est un objet de M' qui est projectif dans la catégorie plus grande M.

Bien sûr, si M' a suffisamment de projectifs par rapport à M alors M' elle-même a suffisamment de projectifs.

Théorème 10.3.17. *Soit* M *une catégorie abélienne, et soit* $\mathrm{M}' \subseteq \mathrm{M}$ *une sous-catégorie abélienne pleine qui a suffisamment de projectifs par rapport à* M*. Soit* $M \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$ *un complexe à cohomologie majorée, tel que* $\mathrm{H}^i(M) \in \mathrm{M}'$ *pour tout* i*. Alors il existe un quasi-isomorphisme* $\rho\colon P \to M$ *dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$*, où* $P \in \mathbf{C}^-(\mathrm{M}')$*, chaque* P^i *est projectif dans* M*, et* $\sup(P) = \sup(\mathrm{H}(M))$*.*

Preuve. [8, Theorem 11.3.18].

□

Corollaire 10.3.18. *Si* M *est une catégorie abélienne avec suffisamment de projectifs, alors* $\mathbf{C}^-(\mathrm{M})$ *a suffisamment de* K*-projectifs.*

Preuve. D'après le théorème précédent, tout $M \in \mathbf{C}^-(\mathrm{M})$ admet un quasi-isomorphisme $P \to M$ d'un complexe majoré de projectifs P. Maintenant, on sait que P est semi-projectif, et donc il est K-projectif.

□

Corollaire 10.3.19. *Soit* M *une catégorie abélienne avec suffisamment de projectifs, et soit* $M \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$ *un complexe avec cohomologie majorée. Alors* M *a une résolution* K*-projective* $P \to M$*, telle que* $\sup(P) = \sup(\mathrm{H}(M))$*, et tout* P^i *est un objet projectif de* M.

Preuve. On peut supposer que $\mathrm{H}(M)$ n'est pas nul. Soit $i := \sup(\mathrm{H}(M)) \in \mathbb{Z}$, et prenons $N := \mathrm{smt}^{\leqslant i}(M)$. Alors $N \to M$ est un quasi-isomorphisme et $\sup(N) = i$. D'après le théorème précédent, il existe un quasi-isomorphisme $P \to N$, où P est un complexe de projectifs et $\sup(P) = i$. On sait alors que P est semi-projectif et alors le complexe P est K-projectif. Le quasi-isomorphisme composé $P \to M$ est celui que nous recherchons.

$\square$

Corollaire 10.3.20. *Sous les hypothèses du théorème précédent, le foncteur canonique* $\mathbf{D}^-(\mathrm{M}') \to \mathbf{D}^-_{\mathrm{M}'}(\mathrm{M})$ *est une équivalence.*

Preuve. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{K}^-(\mathrm{M}')_{\mathrm{M-prj}} \arrow[d, "Q"] \arrow[drr] & & \\
\mathbf{D}^-(\mathrm{M}') \arrow[r, "G"'] & \mathbf{D}^-_{\mathrm{M}'}(\mathrm{M}) \arrow[r, hook, "\mathrm{p.f.}"'] & \mathbf{D}(\mathrm{M})
\end{tikzcd}$$

où $\mathbf{K}^-(\mathrm{M}')_{\mathrm{M-prj}}$ est la catégorie d'homotopie des complexes bornés au-dessus des objets de M' projectifs dans M. Comme ce sont des complexes K-projectifs dans $\mathbf{K}(\mathrm{M})$, les foncteurs F et Q sont pleinement fidèles, par Corollaire (9.2.9). Le foncteur marqué "p.f." est l'inclusion pleinement fidèle de cette sous-catégorie pleine. On en déduit que le foncteur G est aussi pleinement fidèle. Le théorème nous dit que l'image essentielle de G est $\mathbf{D}^-_{\mathrm{M}'}(\mathrm{M})$.

$\square$

Proposition 10.3.21. *Soient* A *un anneau et* P *un complexe majoré de* A*-modules plats. Alors* P *est un complexe* K*-plat.*

Preuve. La preuves est très similaire à celle qu'un complexe semi-projectif est K-projectif. (c.f théorème 10.3.2).

$\square$

10.4. **Résolutions K-projectives dans $\mathbf{C}(A)$.**

Dans cette section A est un DG anneau.

Soit $A^\natural$ l'anneau gradué après avoir oublié la différentielle de A. On a déjà vu le foncteur $\mathrm{Und}\colon \mathbf{C}(A) \to \mathbf{G}(A^\natural)$ qui oublie les différentielles des DG modules. On va utiliser la forme abrégée $M^\natural := \mathrm{Und}(M)$.

Rappelons que la translation $\mathrm{T}^{-1}(A)$ est un DG A-module dans lequel l'élément $\mathrm{t}^{-1}(1_A)$ est de degré i. Cet élément est un cocycle, et si l'on oublie les différentielles, le module gradué $\mathrm{T}^{-1}(A)^\natural$ est libre sur l'anneau gradué $A^\natural$, de base $\mathrm{t}^{-1}(1_A)$. Par conséquent, pour chaque DG A-module M il existe un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Hom}_A(\mathrm{T}^{-i}(A), M) \cong \mathrm{T}^i(M)$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, et les isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)}(\mathrm{T}^{-i}(A), M) \cong \mathrm{Z}^0(\mathrm{Hom}_A(\mathrm{T}^{-i}(A), M)) \cong \mathrm{Z}^i(M)$$

dans $\mathbf{M}(\mathbb{K})$.

Définition 10.4.1. Soit P un objet de $\mathbf{C}(A)$.

(1) On dit que P est un *DG A-module libre* s'il existe un isomorphisme $P \cong \bigoplus_{s \in S} \mathrm{T}^{-i_s}(A)$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$, pour un ensemble d'indexation S et une collection d'entiers $\{i_s\}_{s \in S}$.

(2) Une *filtration semi-libre* sur P est une filtration $F = \{F_j(P)\}_{j \geqslant -1}$ de P dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$, telle que :
- — $F_{-1}(P) = 0$.
- — Chaque $\mathrm{Gr}^F_j(P)$ est un DG A-module libre.
- — $P = \varinjlim_j F_j(P)$.

(3) Le DG module P est dit *semi-libre* s'il admet une filtration semi-libre.

Notons que la limite directe au point *(2)* n'est rien d'autre que l'union des DG sous-modules.

Définition 10.4.2. Un ensemble gradué est un ensemble S qui est partitionné en sous-ensembles : $S = \coprod_{i \in \mathbb{Z}} S^i$. Les éléments de S^i ont sont de degré i, de sorte que $S^i = \{s \in S \mid \deg(s) = i\}$.

Un DG A-module libre P peut être décrit comme suit. L'ensemble d'indexation S peut être transformé en un ensemble gradué en définissant $S^k := \{s \in S \mid i_s = k\}$. En d'autres termes, $\deg(s) = i_s$ est. On note $A \cdot s$

le DG A-module libre de base s, tel que $\mathrm{d}(s) = 0$, et il existe un isomorphisme $A \cdot s \xrightarrow{\simeq} \mathrm{T}^{-i_s}(A)$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ envoyant $s \mapsto \mathrm{t}^{-i_s}(1_A)$. En écrivant

$$A \cdot S := \bigoplus_{s \in S} A \cdot s$$

on obtient $A \cdot S \cong P$ en tant que DG A-modules. Notons que $A^\natural \cdot S \cong P^\natural$ en tant que $A^\natural$-modules.

Définition 10.4.3. Soit S un ensemble gradué. Une *filtration* sur S est un système direct $F = \{F_j(S)\}_{j \geqslant -1}$ de sous-ensembles de S, tel que $F_{-1}(S) = \emptyset$ et $\cup_j F_j(S) = S$. Le couple (S, F) est appelé un *ensemble gradué filtré.*

Notons que chaque $F_j(S)$ est lui-même un ensemble gradué, avec une composante de degré i, $F_j(S)^i := F_j(S) \cap S^i$.

Définition 10.4.4. Soit P un DG A-module. Une *semi-base* de P est un ensemble gradué filtré (S, F), ainsi qu'un isomorphisme $P^\natural \cong A^\natural \cdot S$ de $A^\natural$-modules gradués, tel que sous cet isomorphisme on ait $\mathrm{d}_P(F_j(S)) \subseteq A^\natural \cdot F_{j-1}(S)$ pour tout $j \leqslant 0$.

Proposition 10.4.5. *Soit P un DG A-module.*

(1) Si P a une semi-base (S, F), alors P a une filtration semi-libre induite $\{F_j(P)\}_{j \geqslant -1}$ telle que $F_j(P)^\natural = A^\natural \cdot F_j(S)$ comme $A^\natural$-modules gradués pour tout $j \geqslant -1$.

(2) Toute filtration semi-libre de P est induite par une semi-base.

Preuve. [3, 8.2.3. Proposition].

□

Proposition 10.4.6. *Soient A et B des DG anneaux, et soient $P \in \mathbf{C}(A)$ et $Q \in \mathbf{C}(B)$ des DG modules semi-libres. Alors $P \otimes Q \in \mathbf{C}(A \otimes B)$ est un DG module semi-libre.*

Preuve. Il suffit de vérifier qu'étant donné des filtrations semi-libres $\{F_j(P)\}_{j \geqslant -1}$ et $\{G_k(Q)\}_{k \geqslant -1}$ de P et Q respectivement, alors

$$E_j(P \otimes Q) := \sum_{k=0}^{j} (F_k(P) \otimes G_{j-k}(Q)) \subset P \otimes Q,$$

est une filtration semi-libre de $P \otimes Q$.

□

Théorème 10.4.7. *Soit P un objet de $\mathbf{C}(A)$. Si P est semi-libre, alors il est K-projectif.*

Preuve. La preuve est très similaire a celle du théorème (10.3.2). Pour plus de détails [8, Theorem 11.4.14].

□

Théorème 10.4.8. *Soit A un DG anneau. Tout $M \in \mathbf{C}(A)$ admet un quasi-isomorphisme $\rho\colon P \to M$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ depuis un DG A-module semi-libre P.*

Définissons le DG A-module

(10.4.9) $$C := \mathrm{Cone}(\mathrm{id}\colon\ \mathrm{T}^{-1}(A) \to \mathrm{T}^{-1}(A)),$$

le cône standard de l'automorphisme identité de $\mathrm{T}^{-1}(A)$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$. Comme $C = \mathrm{T}^{-1}(A) \oplus \mathrm{T}(\mathrm{T}^{-1}(A)) = \mathrm{T}^{-1}(A) \oplus A$ en tant qu'objets gradués, on a les éléments $e_0 := 1_A \in A \subseteq C^0$ et $e_1 := \mathrm{t}^{-1}(1_A) \in \mathrm{T}^{-1}(A)^1 \subseteq C^1$. Ils satisfont $\mathrm{d}_C(e_0) = e_1$. Notons que le DG module C est semi-libre, avec filtration semi-libre

(10.4.10) $$F_j(C) := \begin{cases} 0 & \text{si } j = -1 \\ \mathrm{T}^{-1}(A) & \text{si } j = 0 \\ C & \text{si } j \geqslant 1. \end{cases}$$

En tant que $A^\natural$-module, $C^\natural$ est libre, avec comme base (e_0, e_1).

Lemme 10.4.11. *Soit $M \in \mathbf{C}(A)$.*

(1) Il existe un homomorphisme $\psi\colon Q \to M$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$, tel que $\mathrm{Z}(\psi)\colon \mathrm{Z}(Q) \to \mathrm{Z}(M)$ est surjectif, et $Q = \bigoplus_{s \in S} \mathrm{T}^{-i_s}(A)$ pour une collection d'entiers $\{i_s\}_{s \in S}$.

(2) Il existe un homomorphisme surjectif $\psi'\colon Q' \to M$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$, tel que $Q' := \bigoplus_{s \in S'} \mathrm{T}^{-i_s}(C)$ pour une collection d'entiers $\{i_s\}_{s \in S'}$, où C est le DG A-module de (10.4.9).

Les collections $\{i_s\}_{s \in S}$ et $\{i_s\}_{s \in S'}$ sont distincts.

Preuve. *(1)* : Pour tout cocycle $m \in \mathrm{Z}^i(M)$ il existe un homomorphisme $\psi_m\colon\ \mathrm{T}^{-i}(A) \to M$ qui envoie l'élément $\mathrm{t}^{-i}(1_A) \in \mathrm{Z}^i(\mathrm{T}^{-i}(A))$ vers m. Ainsi, si $\{m_s\}_{s \in S}$ est une collection de cocycles homogènes qui engendre $\mathrm{Z}(M)$ comme un $\mathbb{K}$-module, on obtient un homomorphisme ψ comme on le voulait.

(2) : Pour tout élément $m \in M^i$ il existe un homomorphisme $\psi'_m : \mathrm{T}^{-i}(C) \to M$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ qui envoie $\mathrm{t}^{-i}(e_0) \mapsto m$ et $\mathrm{t}^{-i}(e_1) \mapsto (-1)^i \cdot \mathrm{d}_M(m)$. Ainsi, en prenant une collection $\{m_s\}_{s \in S'}$ d'éléments homogènes qui engendre M comme un $\mathbb{K}$-module, on obtient un homomorphisme ψ' comme on le voulait.

□

Le DG A-module Q du point *(1)* du lemme est libre. Le DG A-module Q' du point *(2)* est semi-libre, avec une filtration semi-libre induite par celle de C, à savoir

$$F_j(Q') := \bigoplus_{s \in S'} \mathrm{T}^{-i_s}(F_j(C)) \tag{10.4.12}$$

pour $j \leqslant -1$, où $F_j(C)$ est celui de (10.4.10).

Preuve *du Théorème* (10.4.8). [8, Theorem 11.4.17].

□

Corollaire 10.4.13. *Soit A un DG anneau. La catégorie $\mathbf{C}(A)$ a suffisamment de K-projectifs.*

Preuve. Découle du théorème précédent, avec le fait qu'un complexe semi-libre est K-projectif.

□

Corollaire 10.4.14. *Si le DG anneau A est non positif, alors tout $M \in \mathbf{C}(A)$ admet un quasi-isomorphisme $\rho: P \to M$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ depuis un DG A-module semi-libre P, tel que* $\sup(P) = \sup(\mathrm{H}(M))$.

Preuve. [8, Corollary 11.4.27].

□

10.5. **Résolutions K-injectives dans $\mathbf{C}^+(\mathrm{M})$.**

Dans cette section M est une catégorie abélienne, et $\mathbf{C}(\mathrm{M})$ est la catégorie des complexes dans M.

Définition 10.5.1. Soit I un complexe dans $\mathbf{C}(\mathrm{M})$

(1) Une *cofiltration semi-injective* de I est un cofiltration $\{G_q(I)\}_{q \geqslant -1}$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$ telle que :
- — $G_{-1} = 0$.
- — Chaque $\mathrm{Gr}^G_q(I)$ est un complexe d'objets injectifs de M avec différentielle nulle.
- — $I = \varprojlim_q G_q(I)$.

(2) Le complexe I est appelé *complexe semi-injectif* s'il admet une cofiltration semi-injective.

Théorème 10.5.2. *Soit* M *une catégorie abélienne, et soit I un complexe semi-injectif dans* $\mathbf{C}(\mathrm{M})$. *Alors I est K-injectif.*

Preuve.

Étape 1 : On commence par prouver que si $I = \mathrm{T}^p(J)$, la translation d'un objet injectif $J \in \mathrm{M}$, alors I est K-injectif. Étant donné un complexe acyclique $N \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$, on a

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, I) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, \mathrm{T}^p(J)) \cong \mathrm{T}^p \, \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, J)$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Or $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(-, J)$ est un foncteur exact $\mathrm{M} \to \mathbf{M}(\mathbb{K})$, donc $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, J)$ est un complexe acyclique.

Étape 2 : Soit maintenant I est un complexe d'objets injectifs de M avec différentielle nulle. Cela signifie que $I \cong \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{T}^p(J_p)$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$, où chaque J_p est un objet injectif dans M. Mais alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, I) \cong \prod_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, \mathrm{T}^p(J_p).$$

Par l'étape 1 et le fait qu'un produit de complexes acycliques dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ est acyclique, on conclut que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, I)$ est acyclique

Étape 3 : Fixons une cofiltration semi-injective $G = \{G_q(I)\}_{q \geqslant -1}$ de I. On montre que pour tout q le complexe $G_q(I)$ est K-injectif. Cela se fait par induction sur q. Pour $q = -1$ c'est trivial. Pour $q \geqslant 0$ il existe une suite exacte de complexes

$$0 \to \mathrm{Gr}^G_q(I) \to G_q(I) \to G_{q-1}(I) \to 0 \tag{10.5.3}$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$. Pour chaque degré $p \in \mathbb{Z}$ la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Gr}^G_q(I)^p \to G_q(I)^p \to G_{q-1}(I)^p \to 0$$

dans M est scindée, car $\mathrm{Gr}^G_q(I)^p$ est un objet injectif. Ainsi la suite exacte (10.5.3) est scindée dans la catégorie $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$ des objets gradués dans M.

Soit $N \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$ un complexe acyclique. En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, -)$ à la suite (10.5.3) on obtient une suite

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, \mathrm{Gr}^G_q(I)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, G_q(I)) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, G_{q-1}(I)) \to 0 \tag{10.5.4}$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Comme (10.5.3) est scindée exacte dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$, la suite (10.5.4) est scindée exacte dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Donc (10.5.4) est exacte dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$.

Par l'hypothèse de récurrence le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, G_{q-1}(I))$ est acyclique. Par l'étape 2 le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, \mathrm{Gr}_q^G(I))$ est acyclique. La suite exacte longue de cohomologie associée à (10.5.4) montre que le complexe $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, G_q(I))$ est aussi acyclique.

Étape 4 : On conserve la cofiltration semi-injective $G = \{G_q(I)\}_{q \geqslant -1}$ de l'étape 3. Soit un complexe acyclique $N \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$. On sait que

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, I) \cong \varprojlim_q \mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, G_q(I))$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Par l'étape 3, les complexes $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, G_q(I))$ sont tous acycliques. L'exactitude des suites (10.5.4) implique que le système inverse $\{\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, G_q(I))\}_{q \geqslant -1}$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ admet des transitions surjectives. Par l'argument de Mittag–Leffler, le complexe limite inverse $\mathrm{Hom}_{\mathrm{M}}(N, I)$ est acyclique.

□

Proposition 10.5.5. *Soit* M *une catégorie abélienne. Si I est un complexe borné en dessous d'injectifs, alors I est un complexe semi-injectif.*

Preuve. On peut supposer que $I \neq 0$. Soit $p_0 := \inf(I) \in \mathbb{Z}$. Pour $q \geqslant -1$ soit $G_q(I) := \mathrm{stt}^{\leqslant p_0+q}(I)$. Alors la cofiltration $G = \{G_q(I)\}_{q \geqslant -1}$ est semi-injective.

□

Théorème 10.5.6. *Soit* M *une catégorie abélienne, et soit* $\mathrm{J} \subseteq \mathrm{M}$ *une sous-catégorie pleine telle que tout objet* $M \in \mathrm{M}$ *admette un monomorphisme* $M \hookrightarrow I$ *vers un objet* $I \in \mathrm{J}$. *Alors tout complexe* $M \in \mathbf{C}^+(\mathrm{M})$ *admet un quasi-isomorphisme* $\rho\colon M \to I$ *dans* $\mathbf{C}^+_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$, *tel que* $\inf(I) = \inf(M)$, *et chaque* I^p *est un objet de* J.

Preuve. La preuve est duale à celle du théorème (10.3.6). En effet, on pose $\mathrm{N} := \mathrm{M}^{\mathrm{op}}$ et $\mathrm{P} := \mathrm{J}$. Comme les monomorphismes dans M deviennent des épimorphismes dans N, la sous-catégorie pleine $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{N}$ vérifie les hypothèses du théorème (10.3.6). Comme on a un isomorphisme canonique des catégories $\mathbf{C}^-_{\mathrm{str}}(\mathrm{N}) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{C}^+_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})^{\mathrm{op}}$. Ainsi un quasi-isomorphisme $Q \to N$ dans $\mathbf{C}^-_{\mathrm{str}}(\mathrm{N})$ donne lieu à un quasi-isomorphisme $M \to I$ dans $\mathbf{C}^+_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$.

□

Définition 10.5.7. Soit M une catégorie abélienne, et soit $\mathrm{M}' \subseteq \mathrm{M}$ une sous-catégorie abélienne pleine. On dit que M' a *suffisamment d'injectifs par rapport à* M si tout objet $\mathrm{M} \in \mathrm{M}'$ admet un monomorphisme $M \hookrightarrow I$, où I est un objet de M' qui est injectif dans la catégorie plus grande M.

Bien sûr, dans cette situation, la catégorie M' elle-même a suffisamment d'injectifs.

Théorème 10.5.8. *Soit* M *une catégorie abélienne, et soit* $\mathrm{M}' \subseteq \mathrm{M}$ *une sous-catégorie abélienne épaisse qui a suffisamment d'injectifs par rapport à* M. *Soit* $M \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$ *un complexe à cohomologie bornée inférieure, tel que* $\mathrm{H}^i(M) \in \mathrm{M}'$ *pour tout* i. *Alors il existe un quasi-isomorphisme* $\rho\colon M \to I$ *dans* $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathrm{M})$, *tel que* $I \in \mathbf{C}^+(\mathrm{M}')$, *chaque* I^p *est un objet injectif dans* M, *et* $\inf(I) = \inf(\mathrm{H}(M))$.

Avant la preuve, nous avons besoin de quelques résultats intermédiaires.

Supposons qu'on nous donne les morphismes $\psi_1\colon K \to L_1$ et $\psi_2\colon K \to L_2$ dans M. Le *coproduit fibré* est l'objet

$$L_1 \oplus_K L_2 := \mathrm{Coker}((\psi_1, -\psi_2)\colon K \to L_1 \oplus L_2) \tag{10.5.9}$$

dans M avec la propriété universelle évidente. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_2"'] & L_1 \arrow[d, "\epsilon_1"] \\ L_2 \arrow[r, "\epsilon_2"] & L_1 \oplus_K L_2 \end{tikzcd}$$

dans lequel ϵ_i sont les morphismes induits par les plongements $L_i \to L_1 \oplus L_2$, est parfois appelé le *pushout.*

Lemme 10.5.10. *Dans la situation précédente :*

(1) *La suite*

$$\mathrm{Ker}(\psi_1) \xrightarrow{\psi_2} L_2 \xrightarrow{\epsilon_2} L_1 \oplus_K L_2 \xrightarrow{\pi_1} \mathrm{Coker}(\psi_1) \to 0$$

dans laquelle π_1 est le morphisme induit par la projection $L_1 \oplus L_2 \to L_1$, est exacte.

(2) *Supposons que $L_1 \to L'_1$ soit un monomorphisme. Alors le morphisme induit $L_1 \oplus_K L_2 \to L'_1 \oplus_K L_2$ est un monomorphisme.*

Preuve. Le point deux est tout simplement un conséquence de la propriété duale du point *(2)* du Lemme (2.6.3) et le fait que le diagramme

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, hook] \arrow[d] & L_1' \arrow[d] \\ L_1 \oplus_K L_2 \arrow[r] & L_1' \oplus_K L_2 \end{tikzcd}$$

est un pushout.

Prouvons maintenant le premier point. Déjà, remarquons que la surjectivité de π_1 peut être vue grâce au diagramme commutatif obtenu par la propriété universelle de $\operatorname{Coker}(\psi_1, -\psi_2)$:

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, two heads] & \operatorname{Coker}\psi_1 \\ L_1 \oplus L_2 \arrow[u, two heads, "p_1"] \arrow[r, two heads] & \operatorname{Coker}(\psi_1, -\psi_2) \arrow[u, two heads, dashed] \end{tikzcd}$$

Dans le reste de la preuve on va se placer dans une catégorie de modules et utiliser Freyd-Mitchell pour conclure.

On va voit maintenant l'exactitude en L_2. On sait que $\epsilon_2 \circ \psi_2 = \epsilon_1 \circ \psi_1$, donc lorsqu'on se restreint à $\operatorname{Ker}\psi_1$, on a $\epsilon_2 \circ \psi_2 = 0$. Dans Mod, on a $L_1 \oplus_K L_2 = L_1 \oplus L_2/S$, où S est le module engendré par les $(\psi_(k), -\psi_2(k))$. Ainsi, pour $x \in \operatorname{Ker}\epsilon_2$, on a $(0, x) = (\psi_(k), -\psi_2(k))$ et donc $x = -\psi_2(k)$ pour un $k \in \operatorname{Ker}\psi_1$.

Maintenant, pour l'exactitude en $L_1 \oplus_K L_2$. On considère le diagramme

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_2"'] & L_1 \arrow[r, two heads, "q"] & L_1/\operatorname{Im}\psi_1 \\ L_2 \arrow[r, "e_2"'] \arrow[rr, bend right, "\epsilon_2"'] & L_1 \oplus L_2 \arrow[u, two heads, "p_1"'] \arrow[r, two heads, "q'"'] & L_1 \oplus L_2/S \arrow[u, "\pi_1"'] \end{tikzcd}$$

où le deuxième carré et le diagramme avec le flèche courbée sont commutatifs. On a alors $\pi_1 \circ \epsilon_2 = q \circ p_1 \circ e_2 = 0$. Maintenant, pour $\overline{(x, y)} \in \operatorname{Ker}\pi_1$, alors $\overline{(x, y)} = \overline{(\psi_1(k), y)} = \overline{(0, y - \psi_2(k))} \in \operatorname{Im}\epsilon_2$, donc on a l'autre inclusion comme on le souhaitait.

□

Preuve *du Théorème 10.5.8.* [8, Theorem 11.5.8].

□

Corollaire 10.5.11. *Sous les conditions du théorème précédent, le foncteur canonique* $\mathbf{D}^+(\mathrm{M}') \to \mathbf{D}^+_{\mathrm{M}'}(M)$ *est un équivalence.*

Preuve. Elle est très similaire à celle du corollaire 10.3.20.

□

Corollaire 10.5.12. *Si* M *est une catégorie abélienne avec suffisamment d'injectifs, alors* $\mathbf{C}^+(\mathrm{M})$ *a suffisamment de K-injectifs.*

Preuve. D'après soit le théorème précédent, tout $M \in \mathbf{C}^+(\mathrm{M})$ admet un quasi-isomorphisme $M \to I$ vers un complexe d'injectifs borné en dessous I. Maintenant on sait que I est alors un semi-injectif et donc il est un K-injectif.

□

Corollaire 10.5.13. *Soit* M *une catégorie abélienne avec suffisamment d'injectifs, et soit* $M \in \mathbf{C}(\mathrm{M})$ *un complexe de cohomologie bornée inférieure. Alors* M *a une résolution K-injective $M \to I$, telle que* $\inf(I) = \inf(\mathrm{H}(M))$*, et tout I^p est un objet injectif de* M.

Preuve. On peut supposer que $\mathrm{H}(M)$ est non nul. Soit $p := \inf(\mathrm{H}(M)) \in \mathbb{Z}$, et soit $N := \operatorname{smt}^{\geqslant p}(M)$. Donc $M \to N$ est un quasi-isomorphisme, et $\inf(N) = p$. D'après le théorème précédent, il existe un quasi-isomorphisme $N \to I$, où I est un complexe d'injectifs et $\inf(I) = p$. Maintenant on sait que I est alors un semi-injectif et donc il est un K-injectif. Le quasi-isomorphisme composé $M \to I$ est le recherché.

□

10.6. **Résolutions K-injectives dans $\mathbf{C}(A)$.**

Dans cette section, on utilise la convention suivante.

Convention 10.6.1. Il existe un cogénérateur injectif fixe $\mathbb{K}^*$ de $\mathbf{M}(\mathbb{K})$.

Nous considérons $\mathbb{K}^*$ comme un DG $\mathbb{K}$-module concentré en degré 0 (avec différentielle nulle). Pour tout $p \in \mathbb{Z}$ il existe le DG $\mathbb{K}$-module $\mathrm{T}^{-p}(\mathbb{K}^*)$, qui est concentré en degré p.

Il conviendra d'oublier la distinction entre les DG $\mathbb{K}$-modules à différentielle nulle et les $\mathbb{K}$-modules gradués. A savoir, si N est un DG $\mathbb{K}$-module tel que $\mathrm{d}_N = 0$, on identifiera N aux modules gradués $N^\natural$, $\mathrm{H}(N)$, etc.

Définition 10.6.2. Pour un DG $\mathbb{K}$-module V, on définit le DG $\mathbb{K}$-module $V^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V\mathbb{K}^*)$.

L'opération $(-)^*$ est un foncteur contravariant exact et fidèle de $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ vers elle-même, et aussi de $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ vers elle-même. Notons que étant donné $M \in \mathbf{C}(A)$, son dual M^* est un objet de $\mathbf{C}(A^{\mathrm{op}})$, de sorte qu'on a un foncteur exact

$$(-)^* \colon \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)^{\mathrm{op}} \to \mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A^{\mathrm{op}}).$$

Définition 10.6.3. Un DG $\mathbb{K}$-module W est dit *colibre* s'il existe un isomorphisme $W \cong V^*$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, pour un DG $\mathbb{K}$-module V libre.

Puisque la différentielle d'un DG $\mathbb{K}$-module libre V est nulle, on voit qu'un DG module colibre W a également une différentielle nulle.

Lemme 10.6.4. *Soit V un DG $\mathbb{K}$-module libre et soit $W := V^*$.*

(1) Si $V \cong \bigoplus_{s\in S} \mathrm{T}^{p_s}(\mathbb{K})$ pour un ensemble d'indexation S et une collection d'entiers $\{p_s\}_{s\in S}$, alors $W \cong \prod_{s\in S} \mathrm{T}^{-p_s}(\mathbb{K}^*)$.

(2) En tant qu'objet de la catégorie abélienne $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, W est injectif.

Au point *(1)* les isomorphismes peuvent être considérés soit dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ soit dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, car V et W ont des différentielles nulles. Cependant, le point *(2)* n'est vrai que dans la catégorie $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$.

Preuve. Pour le point *(1)*, on a simplement

$$W = \prod_{s\in S} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathrm{T}^{p_s}(\mathbb{K}), \mathbb{K}^*) = \prod_{s\in S} \mathrm{T}^{-p_s}\,\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, \mathbb{K}^*) = \prod_{s\in S} \mathrm{T}^{-p_s}(\mathbb{K}^*).$$

Pour le point *(2)*, il découle du fait qu'un produit d'injectifs est injectif

□

Lemme 10.6.5. *Soit $\phi \colon U \to V$ un homomorphisme dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$.*

(1) ϕ est injective si et seulement si $\phi^* \colon U^* \to V^*$ est surjective.

(2) ϕ est surjective si et seulement si $\phi^* \colon U^* \to V^*$ est injective.

(3) L'homomorphisme canonique $U \to U^{**} = (U^*)^*$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ est injectif.

(4) Il existe un homomorphisme injectif $U \hookrightarrow W$ dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ vers un DG $\mathbb{K}$-module W colibre.

Preuve. Les deux premiers points sont clairs. Pour le troisième, le morphisme canonique est $U \xrightarrow{\psi} U^{**}$, $\psi(u)(f) = (-1)^{|f|\cdot|u|} \cdot f(u)$. Alors pour montrer l'injectivité on considère $u \in U - \{0\}$, alors le module engendré par u, $\mathbb{K}\cdot u$ est non nul. Par le fait que $\mathbb{K}^*$ est un cogénérateur injectif, il existe un $f \colon \mathbb{K}\cdot u \to \mathbb{K}^*$ qui est non nul, $\mathbb{K}$-linéaire, et nécessairement $f(u) \neq 0$. Maintenant, on étend f a $g \colon U \to \mathbb{K}^*$ puisque

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K}^* & \\
\mathbb{K}\cdot u \arrow[u, "f"] \arrow[r, hook] & U \arrow[ul, dashed, "g"']
\end{tikzcd}$$

commute. Finalement, on obtient $\psi(u)(g) = \pm g(u) = \pm f(u) \neq 0$, donc on a bien l'injectivité.

Pour le dernier point, on utilise [3, 10.2.1 Fact], qui consiste à dire, du fait que U^* est un $\mathbb{K}$-module gradué, en considérant un ensemble qui le génère, on obtient un morphisme $V \twoheadrightarrow U^*$ partant d'un $\mathbb{K}$-module gradué libre. Maintenant, on dualise se morphisme et on obtient $U^{**} \hookrightarrow V^*$, et on compose finalement par $U \hookrightarrow U^{**}$ pour obtenir le résultat.

□

Définition 10.6.6. Soit W un DG $\mathbb{K}$-module colibre. Le *DG A-module co-libre co-induit de W* est le DG A-module $I_W := \mathrm{H}\,om_{\mathbb{K}}(A, W)$. Il existe un homomorphisme $\theta_W \colon I_W \to W$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$, de formule $\theta_W(\chi) := \chi(1_A) \in W$.

Définition 10.6.7. Un DG A-module J est dit colibre s'il existe un isomorphisme $J \cong I_W$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ pour un DG $\mathbb{K}$-module W colibre.

Lemme 10.6.8. *Considérons le DG $\mathbb{K}$-module libre $V \cong \bigoplus_{s\in S} \mathrm{T}^{p_s}(\mathbb{K})$ et le DG $\mathbb{K}$-module colibre $W := V^*$. Alors il y a les isomorphismes canoniques dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$*

$$I_W \cong (A \otimes V)^* \cong (\bigoplus_{s\in S} \mathrm{T}^{p_s}(A))^* \cong \prod_{s\in S} \mathrm{T}^{-p_s}(A^*)$$

Lemme 10.6.9. *Ils sont clairs, mais on les détailles :*

$$I_W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}^*)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A \otimes_{\mathbb{K}} V, \mathbb{K}^*) = (A \otimes V)^*,$$

$$I_W = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, W) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \prod_{s\in S} \mathrm{T}^{-p_s}(\mathbb{K}^*)) = \prod_{s\in S} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \mathrm{T}^{-p_s}(\mathbb{K}^*)) = \prod_{s\in S} \mathrm{T}^{-p_s}(A^*),$$

$$\prod_{s\in S} \mathrm{T}^{-p_s} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, \mathbb{K}^*) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\bigoplus_{s\in S} \mathrm{T}^{p_s}(A), \mathbb{K}^*) = (\bigoplus_{s\in S} \mathrm{T}^{p_s}(A))^*.$$

□

Lemme 10.6.10. *Soit W un $\mathbb{K}$-module DG colibre, et soit M un DG A-module. L'homomorphisme*

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_M, \theta_W)\colon\ \mathrm{Hom}_A(M, I_W) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, W)$$

dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme.

Preuve. L'homomorphisme

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{id}_M, \theta_W)\colon\ \mathrm{Hom}_A(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, W)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, W)$$

est juste une adjonction pour l'homomorphisme de DG anneaux $\mathbb{K} \to A$, il est donc bijectif.

□

Lemme 10.6.11. *Soit I un DG A-module colibre. Alors $I^\natural$ est un objet injectif de $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A^\natural)$.*

Preuve. On peut supposer que $I = I_W$ pour un DG $\mathbb{K}$-module W colibre. Pour tout $M \in \mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A^\natural)$ il existe un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A^\natural)}(M, I_W^\natural) = \mathrm{Hom}_A(M, I_W)^0 \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M, W)^0 = \prod_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(M^p, W^p)$$

dans $\mathbf{M}(\mathbb{K})$. L'isomorphisme découle du lemme précédent. Pour tout p le foncteur $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A^\natural) \to \mathbf{M}(\mathbb{K})$, $M \mapsto M^p$, est exact. Comme chaque W^p est un objet injectif de $\mathbf{M}(\mathbb{K})$, le foncteur contravariant $\mathrm{Hom}(-, W^p)$ de $\mathbf{M}(\mathbb{K})$ vers lui-même est exact. Et le produit des foncteurs exacts dans $\mathbf{M}(\mathbb{K})$ est exact. On en déduit que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A^\natural)}(-, I_W^\natural)$ est exact.

□

Lemme 10.6.12. *Soit W un DG $\mathbb{K}$-module colibre, soit M un DG A-module, et soit $\chi\colon \mathrm{Y}(M) \to W$ un homomorphisme dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. Alors il existe un unique homomorphisme $\psi\colon M \to I_W$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$, tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Y}(M) \arrow[r, "\mathrm{Y}(\psi)"'] \arrow[rr, bend left, "\chi"] & \mathrm{Y}(I_W) \arrow[r, "\mathrm{Y}(\theta_W)"'] & \mathrm{Y}(W) = W \end{tikzcd}$$

dans $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$ soit commutatif.

Preuve. Comme les différentielles de W et $\mathrm{Y}(M)$ sont nulles, l'homomorphisme canonique

$$\alpha\colon\ \mathrm{Hom}(\mathrm{Y}(M), W)^0 = \mathrm{Z}^0\,\mathrm{Hom}(\mathrm{Y}(M), W) \to \mathrm{Z}^0\,\mathrm{Hom}(M, W),$$

induit par la surjection canonique $M \twoheadrightarrow \mathrm{Y}(M)$, est bijective. Ceci nous donne un unique homomorphisme $\alpha(\chi)\colon M \to W$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(\mathbb{K})$. On utilise ensuite le lemme 10.6.10 pour obtenir un unique $\psi\colon M \to I_W$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ t.q. $\theta_W \circ \psi = \alpha(\chi)$. Ce ψ est ce que nous recherchons

□

Définition 10.6.13. Soit I un objet de $\mathbf{C}(A)$.

(1)) Une *cofiltration semi-colibre* sur I est une cofiltration $G = \{G_q(I)\}_{q\geqslant -1}$ sur I dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ telle que
- — $G_{-1}(I) = 0$.
- — Chaque $\mathrm{Gr}_q^G(I)$ est un DG A-module colibre.
- — $I = \varprojlim_q G_q(I)$.

(2) Le DG A-module I est dit *semi-colibre* s'il admet une cofiltration semi-colibre.

Proposition 10.6.14. *Si I est un A-module DG semi-colibre, alors $I^\natural$ est un objet injectif de la catégorie abélienne $\mathbf{G}_{\mathrm{str}}(A^\natural)$.*

Preuve. [3, 10.2.3. Proposition.].

□

Corollaire 10.6.15. *Supposons que A est un anneau. Si I est un DG A-module semi-colibre, alors chaque I^p est un A-module injectif*

Preuve. Il suffit de ce rappeler qu'un facteur d'une somme directe injectif est lui-même injectif.

□

Théorème 10.6.16. *Soit I un objet de $\mathbf{C}(A)$. Si I est semi-colibre, alors il est K-injectif.*

Preuve. La preuve est dans le même style que plusieurs démonstrations du même type, pour plus de détails [8, Theorem 11.6.2].

□

Les prochains résultats sont en quelques sortes le dual des résultats qui suivent après le théorème (10.4.8). On ne donne pas donc les preuves.

Théorème 10.6.17. *Soit A un DG anneau. Tout DG A-module M admet un quasi-isomorphisme $\rho \colon M \to I$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ vers un DG A-module semi-colibre I.*

Corollaire 10.6.18. *Soit A un DG anneau. La catégorie $\mathbf{C}(A)$ a suffisamment de K-injectifs.*

Corollaire 10.6.19. *Si le DG anneau A est non positif, alors tout $M \in \mathbf{C}(A)$ admet un quasi-isomorphisme $\rho \colon M \to I$ dans $\mathbf{C}_{\mathrm{str}}(A)$ vers un DG A-module semi-colibre I, tel que* $\inf(I) = \inf(\mathrm{H}(M))$.

Références

[1] Sergei I. Gelfand and Yuri I. Manin, *Methods of homological algebra*, Second, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2003. MR1950475 ↑49

[2] Masaki Kashiwara and Pierre Schapira, *Categories and sheaves*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 332, Springer-Verlag, Berlin, 2006. MR2182076 ↑3

[3] Stephen Halperin Luchezar L. Avramov Hans–Bjørn Foxby, *Differential graded homological algebra.* ↑105, 109, 111

[4] Sophie Morel, *Mat 540 : Homological algebra*, 2020. Lecture Notes. ↑3

[5] nLab authors, *HomePage*, 2023. Revision 304. ↑3

[6] The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, 2018. ↑63, 94

[7] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, 1994. ↑3

[8] Amnon Yekutieli, *Derived categories*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 183, Cambridge University Press, Cambridge, 2020. MR3971537 ↑3, 15, 24, 26, 34, 38, 39, 41, 45, 52, 54, 55, 57, 58, 60, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 80, 82, 84, 85, 86, 92, 96, 98, 103, 105, 106, 108, 111