Algèbres de Frobenius et structure de double algèbre sur l'homologie de Hochschild

Par Marion Boucrot
sous la direction
d'Estanislao Herscovich

4 juin 2021

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La notion d'algèbre de Frobenius est apparue dans les années 1930, avec les travaux de R. Brauer et de C.Nesbitt. Il s'agit d'algèbres munies d'une forme linéaire dont le noyau ne contient pas d'idéaux à gauche non triviaux, ou de manière équivalente, munies d'une forme bilinéaire non dégénérée. On s'intéressera ici plus particulièrement aux algèbres de Frobenius symétriques, c'est-à-dire munies d'une forme bilinéaire non dégénérée symétrique.
Une double algèbre est un espace vectoriel A muni d'une application linéaire $A \otimes A \to A \otimes A$ appelée double crochet. Cette notion est relativement récente puisqu'elle a été introduite en 2008 par M.Van den Bergh dans [10], dans le contexte de Poisson. En effet, les doubles algèbres de Poisson sont des candidates naturelles pour les structures de Poisson basées sur les doubles dérivations comme présentées dans [2]. Dans ce mémoire, on s'intéressera particulièrement aux doubles algèbres associatives et à leurs propriétés.
L'homologie et la cohomologie de Hochschild ont été introduites en 1945 par G.Hochschild et généralisent l'homologie et la cohomologie des groupes. Ce sont des théories homologiques dont l'étude s'est révélée importante en géométrie non commutative et on y trouve des applications en théorie des cordes.
La notion d'A_∞-algèbre a été introduite dans les années 1960 par J.Stasheff tandis que les algèbres de pre-Calabi-Yau ont été introduites en 2018 et ont

un rôle important en algèbre homolgique, en géométrie symplectique et dans la théorie des champs quantiques topologiques (TQFT's). Ces structures de pre-Calabi-Yau sont apparues sous différents noms, comme V_∞-algèbres dans [9], A_∞-algèbres avec bord dans [6] ou diviseurs noncommutatifs dans [7].

Le chapitre 2 contient les définitions et premières propriétés des algèbres de Frobenius, et présente la structure de cogèbre d'une algèbre de Frobenius. Le chapitre 3 traite des doubles algèbres et de leurs idéaux tandis que le chapitre 4 présente l'homologie et la cohomologie de Hochschild d'une algèbre ainsi que la manière de les calculer. Le chapitre 5 aborde les définitions d'A_∞-algèbres et de structure de pre-Calabi-Yau. Dans le chapitre 6, on étudie la structure de double algèbre d'une algèbre de Frobenius symétrique, ainsi que des conditions suffisantes sur le double crochet d'une double algèbre associative pour induire un produit associatif sur l'homologie de Hochschild en degré 0. En effet, on démontre que toute algèbre de Frobenius symétrique possède une structure canonique de double algèbre associative, vérifiant les conditions pour que son homologie de Hochschild en degré 0 soit munie d'un produit associatif induit par cette structure. On démontre également qu'une algèbre de Frobenius symétrique est une A_∞-algèbre 0-cyclique et qu'elle peut être munie d'une structure de pre-Calabi-Yau. Plus généralement, on montre ensuite que toute A_∞-algèbre cyclique peut être munie d'une telle structure.

Chapitre 2

Algèbres de Frobenius

On fixe un corps $\mathbb{K}$ et on notera $Vect_{\mathbb{K}}$ la catégorie des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, avec pour morphismes les applications linéaires.

2.1 Quelques notions d'algèbre

Définition 2.1.1. *Une forme bilinéaire $\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$ est* ***non dégénérée*** *en la variable V s'il existe une application linéaire $\gamma : \mathbb{K} \to W \otimes V$ telle que :*

$$V \otimes \mathbb{K} \stackrel{id_V \otimes \gamma}{\to} V \otimes (W \otimes V) \stackrel{\beta \otimes id_V}{\to} \mathbb{K} \otimes V = id_V$$

Définition 2.1.2. *Une forme bilinéaire $\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$ est* ***non dégénérée*** *en W s'il existe une application linéaire $\gamma' : \mathbb{K} \to W \otimes V$ telle que :*

$$\mathbb{K} \otimes W \stackrel{\gamma' \otimes id_W}{\to} W \otimes (V \otimes W) \stackrel{id_W \otimes \beta}{\to} W \otimes \mathbb{K} = id_W$$

Définition 2.1.3. *Une forme bilinéaire $\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$ est* ***non dégénérée*** *si elle l'est simultanément en V et W.*

Remarque 2.1.4. *Si β est non dégénérée, les applications γ et γ' coïncident. En effet, si β est non dégénérée simultanément en V et W, on considère la* *composition*

$$\lambda : \mathbb{K} \overset{\gamma\otimes\gamma'}{\to} W \otimes V \otimes W \otimes V \overset{id_W\otimes\beta\otimes id_V}{\to} W \otimes V$$

qui est la même chose que

$$\mathbb{K} \overset{\gamma}{\to} W \otimes V \overset{\gamma'\otimes id_W\otimes id_V}{\to} W \otimes V \otimes W \otimes V \overset{id_W\otimes\beta\otimes id_V}{\to} W \otimes V \tag{2.1}$$

et que

$$\mathbb{K} \overset{\gamma'}{\to} W \otimes V \overset{id_W\otimes id_V\otimes\gamma}{\to} W \otimes V \otimes W \otimes V \overset{id_W\otimes\beta\otimes id_V}{\to} W \otimes V \tag{2.2}$$

En utilisant (2.1) et le fait que β est non dégénérée en W, on a $\lambda = \gamma$. En utilisant (2.2) et le fait que β est non dégénérée en V, on a $\lambda = \gamma'$.

Définition 2.1.5. *L'application γ résultante est appelée **coforme**.*

Exemple 2.1.6. *L'évaluation*

$$\begin{aligned} V \otimes V^* &\to \mathbb{K} \\ v \otimes \Phi &\mapsto \Phi(v) \end{aligned}$$

est une forme bilinéaire. Elle est non dégénérée si et seulement si V est de dimension finie.

Définition 2.1.7. *Si $\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire, on définit son **adjoint à gauche** par*

$$\begin{aligned} \beta_{left} : W &\to V^* \\ w &\mapsto \beta(-, w) \end{aligned}$$

*et son **adjoint à droite** par*

$$\begin{aligned} \beta_{right} : V &\to W^* \\ v &\mapsto \beta(v, -) \end{aligned}$$

Proposition 2.1.8. *$\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire non dégénérée si et seulement si W (resp. V) est de dimension finie et β_{left} (resp. β_{right}) est injective.*

Démonstration. Supposons d'abord que $\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$ soit une forme bilinéaire non dégénérée, qu'on notera $\langle$-,-$\rangle$. On écrit

$$\gamma(1) = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes v_i$$

Pour $x \in W$, puisque β est non dégénérée en W, on a

$$x = \sum_{i=1}^{n} w_i \langle v_i, x\rangle$$

En particulier, $\{w_i\}_{i=1,...n}$ est une famille génératrice de W, qui est alors de dimension finie.
Si $\langle -, x\rangle = 0$, en particulier $\langle v_i, x\rangle = 0$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Les v_i étant les coordonnées de x selon $\{w_i\}_{i=1,...n}$, on a alors x=0 et β_{left} est donc injective.
Supposons à présent que W soit de dimension finie et que β_{left} soit injective. On considère une base (w_1,...,w_n) de W. Ces vecteurs sont linéairement indépendants et par injectivité de β_{left}, on a alors que les vecteurs $\langle -, w_1\rangle$, ...,$\langle -, w_n\rangle$ sont linéairement indépendants. Il existe alors une famille (v_1,...,v_n) telle que $\langle v_i, w_j\rangle = \delta_{i,j}$.
On définit alors $\gamma : 1 \mapsto \sum_{i=1}^{n} w_i v_i$ qui fait de β une application non dégénérée. □

Proposition 2.1.9. *Si V et W sont de dimension finie, β_{left} et β_{right} sont duales l'une de l'autre.*

Démonstration. On va montrer que β_{left} est l'application duale de β_{right}. On a

$$\beta^*_{left} : (V^*)^* \to W^*$$
$$T \mapsto T \circ \beta_{left}$$

et

$$\iota : V \to (V^*)^*$$

donnée par ι(v)(f)=f(v) pour $v \in V$ et $f \in V^*$. En composant, on obtient alors

$$\beta_{left}^* \circ \iota : V \to (V^*)^* \to W^*$$

donnée, pour $v, w \in V$, par

$$\beta_{left}^* \circ \iota(v)(w) = \iota(v) \circ \beta_{left}(w) = \langle v, w \rangle$$

Pour $w \in W$, β_{left}(w)=⟨-,w⟩ et ι(v)(β_{left}(w))=⟨v,w⟩, donc

$$\beta_{left}^* : v \mapsto \langle v, - \rangle = \beta_{right}$$

On peut procéder de la même manière pour montrer que β_{right} est l'application duale de β_{left}. $\square$

Remarque 2.1.10. *Dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie, le foncteur (-)* est une équivalence de catégories, et préserve en particulier le fait d'être inversible. Dans ce cas, on a alors que β_{left} est injective si et seulement si β_{right} l'est. En utilisant qu'une application est surjective si et seulement si sa duale est injective, on peut écrire la proposition suivante.*

Proposition 2.1.11. *Considérons une forme bilinéaire $\beta : V \otimes W \to \mathbb{K}$, avec V et W de dimension finie. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) β est non dégénérée,
(ii) β_{left} est un isomorphisme,
(iii) β_{right} est un isomorphisme.

Proposition 2.1.12. *Si V et W sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, alors on a un isomorphisme $W^* \otimes V^* \simeq (V \otimes W)^*$*

Démonstration. On peut montrer que

$$\begin{aligned} W^* \otimes V^* &\to (V \otimes W)^* \\ \Psi \otimes \Phi &\mapsto (x \otimes y \mapsto \Phi(x) \otimes \Psi(y)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. $\square$

Définition 2.1.13. *Une **$\mathbb{K}$-algèbre** est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni de deux applications linéaires $\mu : A \otimes A \to A$, appelée **multiplication** et $\nu : \mathbb{K} \to A$, appelée **unité**, telles que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "id_A \otimes \mu"] \arrow[d, "\mu \otimes id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

$$\begin{tikzcd} k \otimes A \arrow[r, "\nu \otimes id_A"] \arrow[dr] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] & A \otimes k \arrow[l, "id_A \otimes \nu"'] \arrow[dl] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Remarque 2.1.14. *La condition (2.3) traduit l'associativité de la mutlipli-cation de A.*

Définition 2.1.15. *Un **homomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres** est une application $\mathbb{K}$-linéaire $\Phi : A \to B$ telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\Phi \otimes \Phi"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "\Phi"] & B \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} \arrow[d, "\nu_A"] \arrow[dr, "\nu_B"] & \\
A \arrow[r, "\Phi"] & B
\end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Définition 2.1.16. *Une* ***cogèbre*** *sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel A muni de deux applications linéaires $\Delta : A \to A \otimes A$, appelée* ***comultiplication*** *et $\epsilon : A \to \mathbb{K}$, appelée* ***counité****, vérifiant :*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "id_A \otimes \Delta"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\Delta \otimes id_A"] & A \otimes A \otimes A
\end{tikzcd} \tag{2.7}$$

$$\begin{tikzcd}
k \otimes A & A \otimes A \arrow[l, "\epsilon \otimes id_A"'] \arrow[r, "id_A \otimes \epsilon"] & A \otimes k \\
& A \arrow[ul] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{2.8}$$

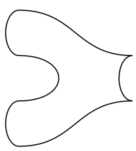
Remarque 2.1.17. *La condition* (2.7) *traduit la coassociativité de la comultiplication de A.*

Définition 2.1.18. *Un* ***homomorphisme de cogèbres*** *est une application $\mathbb{K}$-linéaire $\Phi : A \to B$ telle que les diagrammes suivants soient commutatifs :*

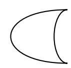
$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \arrow[r, "\Phi \otimes \Phi"] & B \otimes B \\
A \arrow[u, "\Delta_A"] \arrow[r, "\Phi"] & B \arrow[u, "\Delta_B"']
\end{tikzcd} \tag{2.9}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{K} & \\
A \arrow[u, "\epsilon_A"] \arrow[r, "\Phi"] & B \arrow[ul, "\epsilon_B"]
\end{tikzcd} \tag{2.10}$$

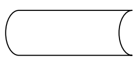
Nous allons à présent utiliser les dessins suivants pour présenter les concepts précédents de manière graphique :



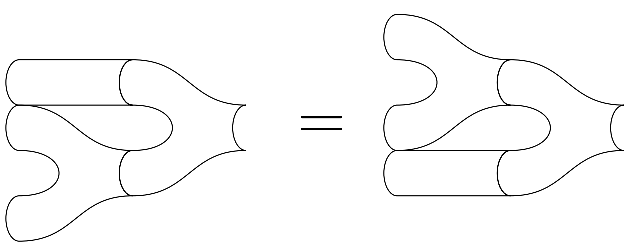
pour la multiplication



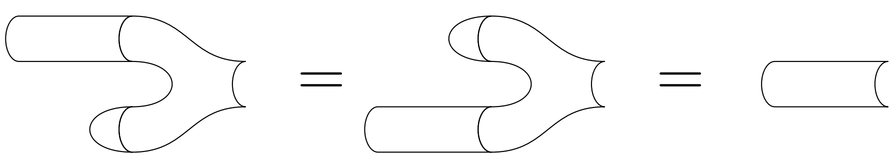
pour l'unité

 pour l'identité

Un espace vectoriel A sur $\mathbb{K}$ muni de cette multiplication et de cette unité est donc une $\mathbb{K}$-algèbre si la condition d'associativité (2.3) est vérifiée, que l'on traduit comme suit :



et que l'on a la condition (2.4), traduite par :



2.2 Définitions et premières propriétés des algèbres de Frobenius

Définition 2.2.1. *Une **algèbre de Frobenius** A est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie équipée d'une forme linéaire $\epsilon : A \to \mathbb{K}$ dont le noyau ne contient aucun idéal à gauche non trivial, appelée **forme de Frobenius**.*

Proposition 2.2.2. *Si A est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie, les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i)Le noyau de la forme linéaire $\epsilon : A \to \mathbb{K}$ ne contient aucun idéal à gauche non trivial,
(ii)La forme bilinéaire $\beta : A \otimes A \to A$ définie par $(a, b) \mapsto \epsilon(ab)$ associée à ϵ est non dégénérée,
(iii)Il existe un isomorphisme de A-modules à gauche $A \tilde{\to} A^*$,
(iv)Il existe un isomorphisme de A-modules à droite $A \tilde{\to} A^*$.

Démonstration. Le fait que β soit non dégénérée équivaut à

$$\beta(A, y) = 0 \Rightarrow y = 0$$

ce qui équivaut à

$$\epsilon(Ay) = 0 \Rightarrow y = 0$$

donc au fait que le noyau de la forme linéaire ϵ ne contienne pas d'idéal principal à gauche non trivial. Puisque chaque idéal à gauche non trivial contient un idéal principal à gauche non trivial, on en déduit que ϵ est une forme de Frobenius.
Étant donné une forme de Frobenius ϵ, on peut construire une application $A \to A^*$ définie par $1_A \mapsto \epsilon$. Cette application est injective puisque $\mathrm{Ker}(\epsilon)$ n'a pas d'idéal à gauche non trivial et puisque A est de dimension finie, c'est un isomorphisme.
Étant donné un isomorphisme Φ : A$\tilde{\to} A^*$, l'image de 1_A est une forme

linéaire $\epsilon : A \to \mathbb{K}$ dont le noyau ne contient pas d'idéaux à gauche non triviaux par injectivité de Φ. $\square$

Définition 2.2.3. *β est appelée* ***forme bilinéaire de Frobenius****.*

Remarque 2.2.4. *On a alors quatre caractérisations différentes d'une algèbre de Frobenius.*

Définition 2.2.5. *On dit qu'une forme linéaire $\Phi : A \to \mathbb{K}$ satisfait la* ***condition trace*** *si elle vérifie*

$$\Phi(ab) = \Phi(ba)\ \forall a, b \in A \tag{2.11}$$

Définition 2.2.6. *Une algèbre de Frobenius est dite* ***symétrique*** *si la forme de Frobenius $\epsilon : A \to \mathbb{K}$ satisfait (2.11).*
ϵ est alors dite ***centrale****.*

Proposition 2.2.7. *Si A est une algèbre de Frobenius, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i)La forme de Frobenius $\epsilon : A \to \mathbb{K}$ est centrale,
(ii)La forme bilinéaire de Frobenius $\beta : A \otimes A \to A$ associée à ϵ est symétrique,
(iii)L'isomorphisme de A-modules à gauche $A \tilde{\to} A^*$ est aussi A-linéaire à droite,
(iv)L'isomorphisme de A-modules à droite $A \tilde{\to} A^*$ est aussi A-linéaire à gauche.

Démonstration. Grâce à la proposition (2.2.2), pour l'équivalence de deux premières conditions il nous faut seulement montrer que la symétrie de la forme de Frobenius ϵ est équivalente à la symétrie de la forme associée β.
Pour $a, b \in A$, si ϵ est symétrique, on a

$$\beta(a, b) = \epsilon(ab) = \epsilon(ba) = \beta(b, a)$$

donc β est symétrique.
Pour $a, b \in A$, si β est symétrique, on a

$$\epsilon(ab) = \beta(a, b) = \beta(b, a) = \epsilon(ba)$$

donc ϵ est symétrique.
Si β est symétrique, pour tous $a, b \in A$, on a

$$\beta_{left}(ab) = \langle -, ab\rangle = \langle ab, -\rangle = \langle a, b-\rangle = \langle b-, a\rangle$$

et

$$\beta_{left}(a).b = \langle b-, a\rangle$$

donc β_{left} est A-linéaire à droite.
Supposons que β_{left} soit également A-linéaire à droite. On a, par A-linéarité à droite,

$$\begin{aligned}\beta(a, b) &= \beta_{left}(1_A)(ab) = (b.\beta_{left}(1_A))(a)\\ &= \beta_{left}(b)(a) = (\beta_{left}(1_A).b)(a)\\ &= \beta_{left}(1_A)(ba) = \beta(b, a)\end{aligned}$$

donc β est symétrique.
On traite de la même façon l'équivalence entre (ii) et (iv). □

Remarque 2.2.8. *On a ici encore quatre caractérisations différentes d'une algèbre de Frobenius symétrique.*

Définition 2.2.9. *Le* ***produit intérieur*** *est défini par*

$$b * (a_1 \otimes a_2) * c = a_1 c \otimes b a_2 \ \forall a_1, a_2, b, c \in A \tag{2.12}$$

Remarque 2.2.10. *En termes de coforme, la symétrie se traduit par*

$$\gamma(1).a = a.\gamma(1)$$
$$\gamma(1) * a = a * \gamma(1)$$

Définition 2.2.11. *Une algèbre de Frobenius (A,ϵ) est dite* ***commutative*** *si A est commutative.*

Remarque 2.2.12. *Toute algèbre de Frobenius A commutative est symétrique. En effet, si A est commutative, pour tous $a, b \in A$ on a ab=ba, donc $\epsilon(ab) = \epsilon$(ba).*

Nous allons à présent donner quelques exemples d'algèbres de Frobenius.

Exemple 2.2.13. *(l'algèbre de Frobenius triviale)*
$(\mathbb{K}, id_{\mathbb{K}})$ *est une algèbre de Frobenius.*

Exemple 2.2.14. *(un exemple concret)*
$\mathbb{C}$ *est une algèbre de Frobenius sur $\mathbb{R}$ avec une forme de Frobenius donnée par :*

$$\mathbb{C} \to \mathbb{R}$$
$$a + ib \mapsto a$$

Exemple 2.2.15. *(extensions algébriques de corps)*
Si $\mathbb{L}$ est une extension finie de $\mathbb{K}$, alors toute application $\mathbb{K}$-linéaire non nulle ϵ : $\mathbb{L} \to \mathbb{K}$ est une forme de Frobenius puisque les corps n'ont pas d'idéaux propres non nuls.

Remarque 2.2.16. *La structure de Frobenius sur une algèbre n'est donc pas unique. On a cependant la proposition suivante :*

Proposition 2.2.17. *Si ϵ est une forme de Frobenius sur A, toute autre forme de Frobenius sur A est donnée par $\mu \circ \epsilon$, où μ désigne la multiplication par un élément inversible de A.*
De plus, si (A,ϵ) est symétrique, toute autre forme de Frobenius centrale est donnée par $\mu' \circ \epsilon$, où μ' désigne la multiplication par un élément inversible central de A.

Exemple 2.2.18. *(algèbres de matrices)*
$M_n(\mathbb{K})$ *est une algèbre de Frobenius sur* $\mathbb{K}$ *avec la trace*

$$\begin{aligned} Tr : M_n(\mathbb{K}) &\to \mathbb{K} \\ A = (a_{ij})_{i,j} &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{aligned}$$

Cette algèbre de Frobenius est même symétrique.
En revanche, si on considère la matrice B=$(b_{ij})_{i,j}$ *définie par* $b_{ij} = 1$ *si* $j = n - i + 1$, $M_n(\mathbb{K})$ *munie de*

$$\begin{aligned} \epsilon : M_n(\mathbb{K}) \to & \quad \mathbb{K} \\ A = (a_{ij})_{i,j} \mapsto & \quad Tr(AB) \end{aligned}$$

n'est pas symétrique puisque B *n'est pas centrale.*

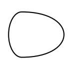
Remarque 2.2.19. *La symétrie d'une algèbre de Frobenius dépend donc de la forme de Frobenius choisie.*

Exemple 2.2.20. *(Anneaux de Gorenstein) On considère un anneau commutatif* A *artinien et local, avec pour idéal maximal* $\mathtt{m}$. A *est un anneau de Gorenstein si on a* $Soc(A) \simeq A/\mathtt{m}$ *où* $Soc(A)$ *est l'annulateur de* $\mathtt{m}$.
On a alors que A*, muni de n'importe quelle forme linéaire ne s'annulant pas sur le socle, est une algèbre de Frobenius.*
$\mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle$ *a pour socle* $\langle x^{n-1} \rangle$ *et peut donc être muni de la forme de Frobenius*

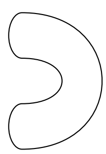
$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle &\to \mathbb{K} \\ a_0 + ... + a_{n-1}x^{n-1} &\mapsto a_{n-1} \end{aligned}$$

2.3 La comultiplication sur une algèbre de Frobenius

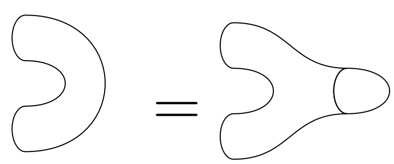
On munit la $\mathbb{K}$-algèbre A d'une forme de Frobenius ϵ qu'on présente comme suit :



La forme bilinéaire de Frobenius β sera représentée par :

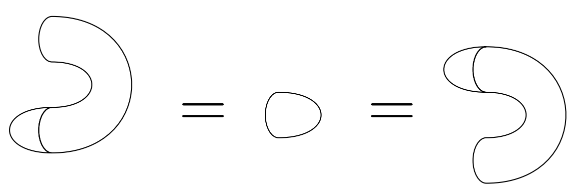


On a les relations suivantes entre β et ϵ :



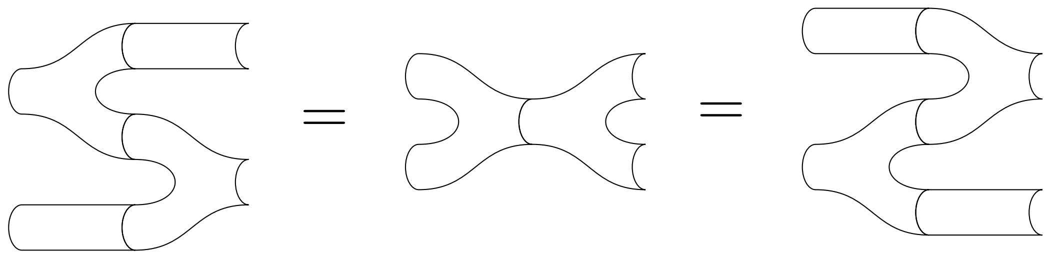
(2.13)

et



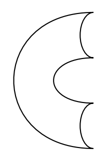
(2.14)

Définition 2.3.1. *On dit que* Δ *satisfait la* ***condition de Frobenius*** *si on a*

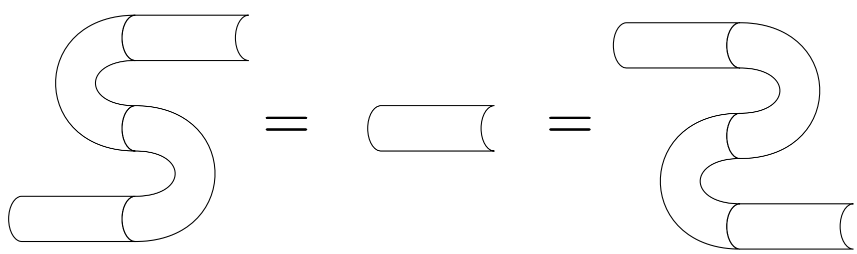


(2.15)

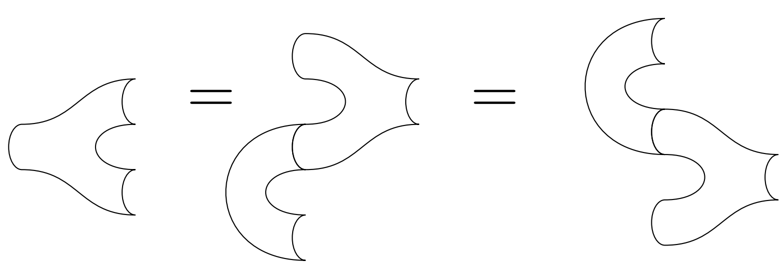
La non dégénérescence de la forme de Frobenius est caractérisée par l'existence d'une forme γ représentée par



et satisfaisant la condition suivante, appelée **relation du serpent** :



On peut alors définir Δ par :

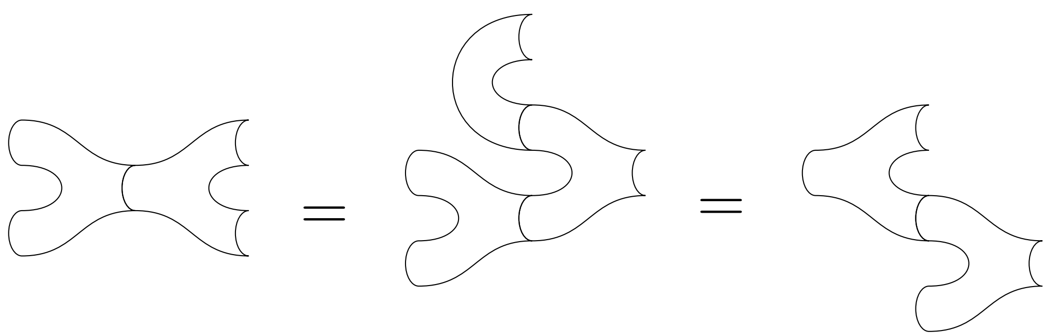


Cela signifie que l'on a

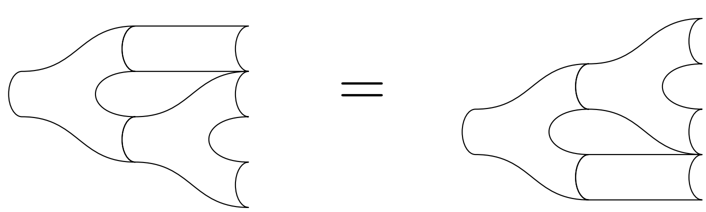
$$\Delta = (\mu \otimes id_A) \circ (id_A \otimes \gamma) = (id_A \otimes \mu) \circ (\gamma \otimes id_A)$$

Proposition 2.3.2. *Si (A,ϵ) est une algèbre de Frobenius, Δ est une comultiplication sur A satisfaisant la condition de Frobenius et fait de A une cogèbre avec la counité ϵ.*
De plus, c'est l'unique comultiplication de counité ϵ.

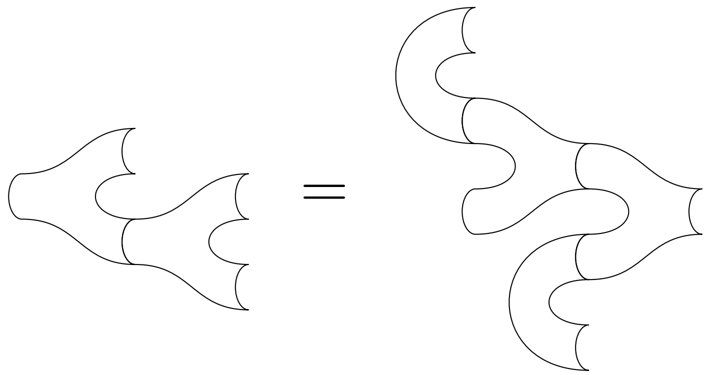
Démonstration. On va d'abord montrer que Δ satisfait la condition de Frobenius (2.15). On a, en utilisant l'associativité de la multiplication μ,



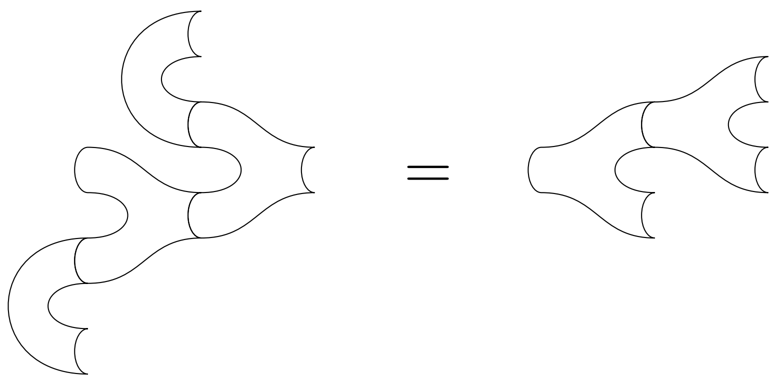
Ce qui nous donne la première égalité de (2.15). La deuxième égalité se montre de la même façon.
Il nous reste à montrer que Δ est coassociative, c'est-à-dire vérifie (2.7) et que ϵ vérifie (2.8).
On peut traduire (2.7) comme :



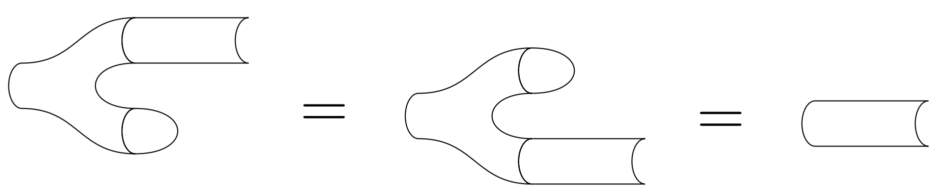
Par définition de Δ, on a :



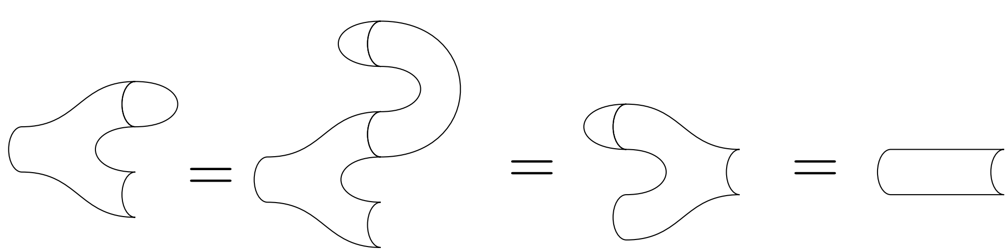
En utilisant l'associativité de la multiplication, on remarque que l'on a égalité avec :



On va à présent montrer que ϵ est une counité pour Δ, c'est-à-dire que :



En utilisant (2.14), on a :



ϵ est donc bien une counité pour Δ.
Une preuve de l'unicité est donnée dans [5]. $\square$

On vient donc de montrer que toute algèbre de Frobenius (A,ϵ) peut être munie d'une unique structure de cogèbre ayant pour counité ϵ.

Proposition 2.3.3. *Si A est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une multiplication μ et d'une unité ν ainsi que d'une comultiplication Δ et d'une counité ϵ, vérifiant la condition de Frobenius (2.15), alors :*
(i) A est de dimension finie,
(ii) μ est associative (et A est donc une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie),
(iii) ϵ est une forme de Frobenius.

Remarque 2.3.4. *On a alors qu'une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie est une algèbre de Frobenius si et seulement si elle admet une comultiplication qui est un morphisme de A^e-modules et une counité.*
C'est Lowell Abrams qui démontra cette équivalence en premier, dans l'article [1].

Proposition 2.3.5. *La comultiplication d'une algèbre de Frobenius est commutative si et seulement si sa multiplication l'est.*

On pourra trouver une preuve graphique de ces propositions dans [5].

Remarque 2.3.6. *Si $\Phi : A \to A'$ est un homomorphisme d'algèbres vérifiant $\epsilon' \circ \Phi = \epsilon$ pour $\epsilon : A \to \mathbb{K}$ une forme de Frobenius et $\epsilon' : A' \to \mathbb{K}$ alors Φ est injectif. En effet, Ker(Φ) étant un idéal de A inclus dans Ker(ϵ), Ker(Φ)=0.*

Définition 2.3.7. *Un **homomorphisme d'algèbres de Frobenius** est un homomorphisme qui est simultanément un homomorphisme d'algèbres et un homomorphisme de cogèbres.*
En particulier, un homomorphisme d'algèbres de Frobenius
$\Phi : (A, \epsilon) \to (A', \epsilon')$ vérifie $\epsilon' \circ \Phi = \epsilon$.

Proposition 2.3.8. *Un homomorphisme entre algèbres de Frobenius* $\Phi : (A, \epsilon) \to (A', \epsilon')$ *est toujours inversible.*

Démonstration. Φ est comultiplicatif et respecte les counités donc son dual Φ^* est mutliplicatif et respecte les unités.
On a alors que Φ^* est injectif, donc c'est un isomorphisme. Ceci implique que Φ est surjectif et puisqu'il est injectif par (2.3.6), c'est un isomorphisme. $\square$

Chapitre 3

Doubles algèbres

Dans ce chapitre, on considérera un corps $\mathbb{K}$.

3.1 Doubles algèbres de Lie et associatives

Définition 3.1.1. *Une **double algèbre** est un espace vectoriel A muni d'une application linéaire appelée **double crochet** $M : A \otimes A \to A \otimes A$.*
Pour $a, b \in A$, on notera $M(a,b) = M'(a,b) \otimes M''(a,b)$.

Définition 3.1.2. *Une **double algèbre unitaire** est une double algèbre (A,M) munie d'un élément $e \in A$ vérifiant pour tout $a \in A$*

$$M(e \otimes a) = e \otimes a$$
$$M(a \otimes e) = a \otimes e$$

Définition 3.1.3. *Une **sous-algèbre** d'une double algèbre (A,M) est un sous-espace vectoriel A' de A tel que $M_{|A' \otimes A'}$ est à valeurs dans $A' \otimes A'$.*

Remarque 3.1.4. *L'intersection de deux sous-algèbres A_1, A_2 d'une double algèbre (A,M) est une double algèbre.*

En effet, puisque l'on a

$$M_{|A_1\otimes A_1} \subseteq A_1 \otimes A_1$$
$$M_{|A_2\otimes A_2} \subseteq A_2 \otimes A_2$$

pour $a, b \in A_1 \cap A_2$, *on a*

$$M(a,b) \in (A_1 \otimes A_1) \cap (A_2 \otimes A_2)$$

donc $M_{|(A_1\cap A_2)\otimes(A_1\cap A_2)}$ *est à valeurs dans* $(A_1 \cap A_2) \otimes (A_1 \cap A_2)$ *et* $A_1 \cap A_2$ *est une sous-algèbre.*

Définition 3.1.5. *Un* ***homomorphisme*** *entre les doubles algèbres* (A, M_A) *et* (B, M_B) *est une application linéaire* $\Phi : A \to B$ *telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "\Phi\otimes\Phi"] \arrow[d, "M_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "M_B"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\Phi\otimes\Phi"] & B \otimes B \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

Définition 3.1.6. *Un* ***homomorphisme*** *entre les doubles algèbres unitaires* (A, M_A, e_A) *et* (B, M_B, e_B) *est un homomorphisme de doubles algèbres* $\Phi : A \to B$ *tel que* $\Phi(e_A) = e_B$.

On peut étendre le double crochet $M : A \otimes A \to A \otimes A$ à quatre applications linéaires $A^{\otimes 3} \to A^{\otimes 3}$, en notant $\tau : A\otimes A \to A\otimes A$ l'application $a\otimes b \mapsto b\otimes a$:

$$a \otimes b \otimes c \mapsto M(a, b \otimes c)_L = M(a, b) \otimes c$$
$$a \otimes b \otimes c \mapsto M(a, b \otimes c)_R = (\tau \otimes id)(b \otimes M'(a, c) \otimes M''(a, c))$$
$$a \otimes b \otimes c \mapsto M(a \otimes b, c)_L = (id \otimes \tau)(b \otimes M'(a, c) \otimes M''(a, c))$$
$$a \otimes b \otimes c \mapsto M(a \otimes b, c)_R = a \otimes M(b, c)$$

On remarque que l'on a $M(a, b\otimes c)_R = M(a\otimes b, c)_L$, ce que l'on peut réécrire :

$$(\tau \otimes id) \circ (id \otimes M) \circ (\tau \otimes id) = (id \otimes \tau) \circ (M \otimes id) \circ (id \otimes \tau)$$

On notera

$$\hat{M} = (id \otimes \tau) \circ (M \otimes id) \circ (id \otimes \tau)$$

Remarque 3.1.7. *On a*

$$\hat{\tau} = (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau) = (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id)$$

Définition 3.1.8. *Une double algèbre (A,M) est appelée* ***double algèbre de Lie*** *si elle vérifie :*
(Anti-symétrie)

$$M(a, b) = -\tau(M(b, a)) \forall a, b \in A \tag{3.2}$$

(Jacobi)

$$M(a, M(b, c))_L - (\tau \otimes id)(M(b, M(a, c))_R) = M(M(a, b), c)_L \; \forall a, b, c \in A \tag{3.3}$$

Définition 3.1.9. *Une double algèbre (A,M) est* ***associative*** *si le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
& A^{\otimes 3} \arrow[r, "M\otimes id"] \arrow[dl, "id\otimes M"'] & A^{\otimes 3} \arrow[dr, "id\otimes M"] & \\
A^{\otimes 3} \arrow[rrr, "\hat{M}"] & & & A^{\otimes 3} \\
& A^{\otimes 3} \arrow[r, "id\otimes M"] \arrow[ul, "M\otimes id"] & A^{\otimes 3} \arrow[ur, "M\otimes id"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

Pour $a, b, c \in A$, la commutativité du trapézoïde supérieur est équivalente à

$$M(a, M(b, c))_R = M(M(a, b), c)_R$$

et celle du trapézoïde inférieur à

$$M(a, M(b,c))_L = M(M(a,b),c)_L$$

Définition 3.1.10. *Une double algèbre (A,M) est* ***commutative*** *si elle est associative et que le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} A^{\otimes 2} & \xrightarrow{\tau} & A^{\otimes 2} \\ {\scriptstyle M}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle M} \\ A^{\otimes 2} & \xrightarrow{\tau} & A^{\otimes 2} \end{array} \tag{3.5}$$

Pour $a, b \in A$, cela se traduit par :

$$M(a,b) = \tau(M(b,a)) \forall a, b \in A$$

Exemple 3.1.11. *Pour un $\mathbb{K}$-espace linéaire A, on définit la double algèbre A_c par A muni du double crochet défini par $M(a,b) = a \otimes b$ pour tous $a, b \in A$. Cette double algèbre est associative et commutative.*

Exemple 3.1.12. *(un exemple concret)*
Si $B = \mathbb{K}^2$ est muni de la base canonique (e_1, e_2), on définit un double crochet sur B par

$$M(e_1, e_1) = e_1 \otimes e_2, M(e_1, e_2) = M(e_2, e_1) = M(e_2, e_2) = 0.$$

B est alors une double algèbre associative et non commutative.

On notera $\tau \circ M = {}_\tau M$ et $M \circ \tau = M_\tau$.

Exemple 3.1.13. *(double algèbre opposée à gauche)*
Si (A,M) est une double algèbre, on définit son opposée A^{op} par A muni du double crochet défini par $M(a,b)^{op} = {}_\tau M(b,a)$ pour tous $a, b \in A$. De plus, si A est une double algèbre de Lie (resp. associative, resp. commutative), A^{op}

l'est aussi.
En effet, pour $a, b, c \in A$, on a

$$
\begin{aligned}
{}_\tau M({}_\tau M(a,b),c)_R &= (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau)(M(M(a,b),c)_L) \\
{}_\tau M(a,{}_\tau M(b,c))_R &= (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau)(M(a,M(b,c))_L) \\
{}_\tau M({}_\tau M(a,b),c)_L &= (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id)(M(M(a,b),c)_R) \\
{}_\tau M(a,{}_\tau M(b,c))_L &= (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id)(M(a,M(b,c))_R)
\end{aligned}
$$

ce qui nous permet de conclure que A^{op} est une double algèbre associative si A l'est.
On a également, pour $a, b \in A$,

$$\tau({}_\tau M(a,b)) = M(a,b)$$

ce qui nous donne que A^{op} est une double algèbre de Lie (resp. commutative) si A l'est.

Proposition 3.1.14. *(double algèbre opposée à droite)*
Si (A,M) est une algèbre double associative, alors (A, M_τ) est également une algèbre double associative.

Démonstration. On va montrer dans un premier temps que l'on a

$$(id \otimes M_\tau) \circ (M_\tau \otimes id) = \hat{M}_\tau \circ (id \otimes M_\tau)$$

On a

$$
\begin{aligned}
&(id \otimes M_\tau) \circ (M_\tau \otimes id) \\
&= (id \otimes M) \circ (id \otimes \tau) \circ (M \otimes id) \circ (\tau \otimes id) \\
&= (id \otimes M) \circ (id \otimes \tau) \circ (M \otimes id) \circ (id \otimes \tau) \circ (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id) \\
&= (id \otimes M) \circ (\tau \otimes id) \circ (id \otimes M) \circ (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id) \\
&= (\tau \otimes id) \circ \hat{M} \circ (id \otimes M) \circ \hat{\tau} \\
&= (\tau \otimes id) \circ (id \otimes M) \circ (M \otimes id) \circ \hat{\tau}
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
&\hat{M}_\tau \circ (id \otimes M_\tau) \\
&= (\tau \otimes id) \circ (id \otimes M) \circ (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id) \circ (id \otimes M) \circ (id \otimes \tau) \\
&= (\tau \otimes id) \circ (id \otimes M) \circ (id \otimes \tau) \circ (id \otimes \tau) \circ (M \otimes id) \circ \hat{\tau} \\
&= (\tau \otimes id) \circ (id \otimes M) \circ (M \otimes id) \circ \hat{\tau}
\end{aligned}
$$

Il nous faut à présent montrer que

$$(M_\tau \otimes id) \circ (id \otimes M_\tau) = \hat{M}_\tau \circ (M_\tau \otimes id)$$

On a

$$
\begin{aligned}
&(M_\tau \otimes id) \circ (id \otimes M_\tau) \\
&= (M \otimes id) \circ (\tau \otimes id) \circ (id \otimes M) \circ (id \otimes \tau) \\
&= (M \otimes id) \circ (\tau \otimes id) \circ (id \otimes M) \circ (\tau \otimes id) \circ (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau) \\
&= (M \otimes id) \circ (id \otimes \tau) \circ (M \otimes id) \circ (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau) \\
&= (id \otimes \tau) \circ \hat{M} \circ (M \otimes id) \circ \hat{\tau} \\
&= (id \otimes \tau) \circ (M \otimes id) \circ (id \otimes M) \circ \hat{\tau}
\end{aligned}
$$

et

$$\begin{aligned}
&\hat{M}_\tau \circ (M_\tau \otimes id) \\
&= (id \otimes \tau) \circ (M \otimes id) \circ (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau) \circ (M \otimes id) \circ (\tau \otimes id) \\
&= (id \otimes \tau) \circ (M \otimes id) \circ (\tau \otimes id) \circ (\tau \otimes id) \circ (id \otimes M) \circ \hat{\tau} \\
&= (id \otimes \tau) \circ (M \otimes id) \circ (id \otimes M) \circ \hat{\tau}
\end{aligned}$$

□

Proposition 3.1.15. *Si (A,M) est une double algèbre associative, alors* $(A, \tilde{M})$ *est une algèbre de Lie notée* $A^{(-)}$*, où* $\tilde{M}(a,b) = M(a,b) - {}_\tau M(b,a)$ *pour tous* $a, b \in A$*.*

Démonstration. On commence par vérifier la condition (3.2) d'anti-symétrie. Pour $a, b, c \in A$, on a

$$\tilde{M}(a,b) = M(a,b) - {}_\tau M(b,a) = -(-M(a,b) + {}_\tau M(b,a))$$

et

$${}_\tau \tilde{M}(a,b) = {}_\tau M(b,a) - {}_{\tau^2} M(a,b) = {}_\tau M(b,a) - M(a,b)$$

d'où $\tilde{M}$(a,b)=-${}_\tau \tilde{M}$(b,a).
On doit ensuite vérifier la condition (3.3) de Jacobi. On peut vérifier que pour $a, b, c \in A$,

$$\begin{aligned}
\tilde{M}(a, \tilde{M}(b,c))_L &= \tilde{M}(a, M(b,c))_L - (\tilde{M}(a, {}_\tau M(c,b))_L) \\
&= M(a, M(b,c))_L - (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau)(M(M(b,c),a)_L) \\
&- (id \otimes \tau) \circ M(a, M(c,b))_R \\
&+ (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau)(M(M(c,b),a)_R)
\end{aligned}$$

et

$$
\begin{aligned}
(\tau \otimes id)(\tilde{M}(b, \tilde{M}(a,c))_R) &= \tilde{M}(b, M(a,c))_R - (\tilde{M}(b, {}_\tau M(c,a))_R) \\
&= (\tau \otimes id)(M(b, M(a,c))_R) - (id \otimes \tau) \circ M(M(a,c),b)_R \\
&- (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau)(M(b, M(c,a))_L) \\
&+ (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id)(M(M(c,a),b)_L)
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
\tilde{M}(\tilde{M}(a,b),c)_L &= \tilde{M}(M(a,b),c)_L - (\tilde{M}({}_\tau M(b,a),c))_L \\
&= M(a, M(b,c))_L - (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id)(M(c, M(a,b))_L) \\
&- (\tau \otimes id)(M(M(b,a),c)_R) \\
&+ (id \otimes \tau) \circ (\tau \otimes id) \circ (id \otimes \tau)(M(c, M(b,a))_R)
\end{aligned}
$$

En utilisant l'associativité de (A,M), on obtient alors l'identité désirée. $\square$

Proposition 3.1.16. *Si (A, M_A) et (B, M_B) sont des doubles algèbres, alors $A \otimes B$ est une double algèbre munie de*

$$M(a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2) = (id \otimes \tau \otimes id) \circ (M_A(a_1, a_2) \otimes M_B(b_1, b_2))$$

pour $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$.
De plus, si A est une double algèbre de Lie (resp. associative, resp. commutative) et si B est commutative, alors $A \otimes B$ est une double algèbre de Lie (resp. associative, resp. commutative).

Proposition 3.1.17. *Si A est une double algèbre de dimension finie, alors l'application conjuguée M^* munit A^* d'une structure de double algèbre.*
De plus, si A est une double algèbre de Lie (resp. commutative), alors A^* l'est aussi.
En revanche, c'est faux pour l'associativité.

Exemple 3.1.18. *On considère* $A = \mathbb{K}^2$ *muni du double crochet défini par*

$$M(e_1, e_1) = e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1$$
$$M(e_i, e_j) = 0 \text{ si } (i, j) \neq (1, 1).$$

C'est alors une double algèbre de Lie isomorphe à $B^{(-)}$*, où* B *définie dans l'exemple (*3.1.12*).*
Cependant, $A^* = \mathbb{K}^2$ *muni de* $M(e_1, e_2) = e_1 \otimes e_1 = -M(e_2, e_1)$ *est également une double algèbre de Lie mais ne peut pas être présentée comme* $A'^{(-)}$ *pour une double algèbre associative* A'*.*

3.2 Structure de double algèbre comme opérateur linéaire

Définition 3.2.1. *Pour* A *un espace vectoriel de dimension finie, on définit la* ***forme trace*** *par*

$$\begin{aligned} \langle -, - \rangle : End(A) \times End(A) &\to \mathbb{K} \\ (a, b) &\mapsto tr(ab) \end{aligned}$$

Remarque 3.2.2. *C'est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et invariante (i.e* $\langle ab, c\rangle = \langle a, bc\rangle = \langle b, ca\rangle \ \forall \ a, b, c \in A$*).*

On fixe un isomorphisme linéaire $\iota : End(A) \to End(A)^*$ donné par

$$\langle \iota(a), b\rangle = \langle a, b\rangle \ \forall a, b \in A,$$

.

On peut identifier End(A) et $A^* \otimes A$ grâce à l'application

$$A^* \otimes A \to End(A)$$
$$\Phi \otimes a \mapsto (b \mapsto \langle \Phi, b\rangle a)$$

De même, on identifie $End(A) \otimes End(A)$ à End(End(A)) en remplaçant A par End(A) dans l'identification précédente.
On a alors les isomorphismes suivants :

$$\begin{aligned} End(A \otimes A) &\simeq (A \otimes A^*) \otimes (A \otimes A) \\ &\simeq A^* \otimes A^* \otimes A \otimes A \\ &\simeq A^* \otimes A \otimes A^* \otimes A \\ &\simeq End(A) \otimes End(A) \\ &\simeq End(End(A)) \end{aligned}$$

Ceci nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.2.3. *Toute structure de double algèbre M est déterminée par un opérateur linéaire $R : End(A) \to End(A)$.*

On peut même avoir une expression explicite d'un double crochet en termes d'opérateurs :
On considère $(e_1, ..., e_N)$ une base de End(A) et $(e_1^*, ...e_N^*)$ la base duale relativement à la forme trace, i.e $\langle e_i^*, e_j \rangle = \delta_{i,j}$.
On considère également R* l'opérateur conjugué de R relativement à la forme trace.
On a alors pour $a, b \in A$:

$$M(a,b) = \sum_{i=0}^{n} e_i(a) \otimes R(e_i^*)(b) = \sum_{i=0}^{n} R^*(e_i)(a) \otimes e_i^*(b) \tag{3.6}$$

Théorème 3.2.4. *Considérons une double algèbre (A,M) déterminée par un opérateur R. On a alors les équivalences suivantes :*
(i) A est une double algèbre de Lie si et seulement si

$$R = -R^*, R(a)R(b) = R(R(a)b) + R(aR(b)) \tag{3.7}$$

(ii)A est une double algèbre associative si et seulement si

$$R(a)R(b) = R(R(a)b), R^*(a)R^*(b) = R^*(R^*(a)b) \tag{3.8}$$

(iii) A est une double algèbre commutative si et seulement si

$$R = R^*, R(a)R(b) = R(R(a)b) = R(aR(b)) \tag{3.9}$$

On pourra trouver une preuve de ce théorème dans [4].

Remarque 3.2.5. *Si (A,M) est une double algèbre associative déterminée par un opérateur linéaire R, (*3.8*) implique que A munie du produit double déterminé par R^* est aussi une double algèbre associative, puisque $(R^*)^* = R$. Or l'opérateur R^* définit, pour $a, b \in A$, le produit*

$$\sum_{i=0}^{n} e_i(a) \otimes R^*(e_i^*)(b) = \sum_{i=0}^{n} R(e_i)(a) \otimes e_i^*(b)$$

qui est ${}_\tau M_\tau$.
En effet,

$$\begin{aligned} {}_\tau M_\tau(a,b) &= {}_\tau M(b,a) \\ &= \tau(\sum_{i=0}^{n} e_i(b) \otimes R(e_i^*)(a)) \\ &= \sum_{i=0}^{n} R(e_i^*)(a) \otimes e_i(b) \\ &= \sum_{i=0}^{n} R(e_i)(a) \otimes e_i^*(b) \end{aligned}$$

*Puisque $(A, {}_\tau M)$ est associative d'après l'exemple (*3.1.13*) si (A,M) l'est, on retrouve l'associativité de M_τ énoncée dans la proposition (*3.1.14*), dans le cas où A est de dimension finie.*

3.3 Idéaux d'une double algèbre

Définition 3.3.1. *Un* ***idéal*** *d'une double algèbre (A,M), un sous-espace $I \subseteq A$ tel que $M(A,I) + M(I,A) \subseteq I \otimes A + A \otimes I$, où l'on a noté $M(A,I) = M(A \otimes I)$.*

Remarque 3.3.2. *Si I est un idéal d'une double algèbre A, alors le quotient A/I est muni d'une structure de double algèbre.*
En effet, le quotient A/I est bien défini puisque I est un sous-espace de A, et on peut considérer l'application

$$\begin{aligned}\bar{M} : A/I \otimes A/I &\to A/I \otimes A/I \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\mapsto \overline{M'(a,b)} \otimes \overline{M''(a,b)}\end{aligned}$$

Cette application est bien définie puisque si $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{c}, \bar{d})$, on a

$$\begin{aligned}M(a,b) - M(c,d) &= M(a,b) - M(c,b) + M(c,b) - M(c,d) \\ &= M(a-c,b) + M(c,b-d) \\ &\in M(I,A) + M(A,I) \subseteq A \otimes I + I \otimes A\end{aligned}$$

donc $\overline{M'(a,b)} \otimes \overline{M''(a,b)} = \overline{M'(c,d)} \otimes \overline{M''(c,d)}$.

Nous allons à présent énoncer quelques propriétés du produit tensoriel de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels qui seront utiles par la suite.

Proposition 3.3.3. *Si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels, et si $\{v_i\}_{i \in I}$, $\{w_i\}_{i \in I}$ sont des familles de vecteurs de E et F respectivement telles que $\{v_i\}_{i \in I}$ forme une famille libre, alors*

$$\sum_{i \in I} v_i \otimes w_i = 0 \Longleftrightarrow w_i = 0 \, \forall i$$

Démonstration. Soit $u \in F^*$ une forme linéaire sur F.

On peut vérifier que l'application

$$\begin{aligned} f : E \otimes F &\to E \\ x \otimes y &\mapsto xu(y) \end{aligned}$$

est bien définie. Si $\sum_{i \in I} v_i \otimes w_i = 0$, on a alors $f(\sum_{i \in I} v_i \otimes w_i) = 0$, ce qui donne $\sum_{i \in I} v_i u(w_i) = 0$.
La famille $\{v_i\}_{i \in I}$ étant libre, on en déduit que $u(w_i) = 0$ pour tout $i \in I$.
Ceci étant vrai pour toute forme linéaire $u \in F^*$, $w_i = 0$ pour tout $i \in I$. $\square$

Remarque 3.3.4. *On en déduit que si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels, et si $\{v_i\}_{i \in I}$, $\{w_j\}_{j \in J}$ sont des familles libres de vecteurs de E et F respectivement, alors $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ est une famille libre de $E \otimes F$.*
On peut également montrer que si $\{v_i\}_{i \in I}$, $\{w_j\}_{j \in J}$ sont des familles génératices de vecteurs de E et F respectivement, alors $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ est une famille génératrice de $E \otimes F$.
On a alors que si $\{v_i\}_{i \in I}$, $\{w_j\}_{j \in J}$ sont des bases respectives de E et F, $\{v_i \otimes w_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ est une base de $E \otimes F$.

Proposition 3.3.5. *Si V_1, V_2, W_1, W_2 sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f_1 : V_1 \to W_1,\ f_2 : V_2 \to W_2$ des applications linéaires, alors*

$$Ker(f_1 \otimes f_2) = Ker(f_1) \otimes V_2 + V_1 \otimes Ker(f_2)$$

Démonstration. On a clairement $Ker(f_1) \otimes V_2 + V_1 \otimes Ker(f_2) \subseteq Ker(f_1 \otimes f_2)$.
On peut écrire

$$\begin{aligned} V_1 &= U_1 \oplus Ker(f_1) \\ V_2 &= U_2 \oplus Ker(f_2) \end{aligned}$$

où U_1, U_2 sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et on a alors

$$V_1 \otimes V_2 = U_1 \otimes U_2 \oplus U_1 \otimes Ker(f_2) \oplus Ker(f_1) \otimes U_2 \oplus Ker(f_1) \otimes Ker(f_2)$$

On a

$$U_1 \otimes Ker(f_2) \oplus Ker(f_1) \otimes U_2 \oplus Ker(f_1) \otimes Ker(f_2) = Ker(f_1) \otimes V_2 + V_1 \otimes Ker(f_2)$$

donc il nous reste à monter que $(f_1 \otimes f_2)_{|U_1 \otimes U_2}$ est injective.
Si $\{x_i\}_{i \in I}$ est une base de U_1 et $\{y_j\}_{j \in J}$ une base de U_2, alors en utilisant (3.3.4), la famille $(x_i \otimes y_j)_{i \in I, j \in J}$ forme une base de $U_1 \otimes U_2$.
Tout élément $x \otimes y$ de $U_1 \otimes U_2$ s'écrit donc sous la forme $\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \lambda_{i,j} x_i \otimes y_j$.
Si $(f_1 \otimes f_2)(x \otimes y)$=0, on a alors

$$\begin{aligned} (f_1 \otimes f_2)(\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \lambda_{i,j} x_i \otimes y_j) &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \lambda_{i,j} f_1(x_i) \otimes f_2(y_j) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque f_1 est injective sur U_1 et que f_2 est injective sur U_2, on a que les familles $(f_1(x_i))_{i \in I}, (f_2(y_j))_{j \in J}$ sont libres et en utilisant (3.3.4),
$(f_1(x_i) \otimes f_2(y_j))_{i \in I, j \in J}$ l'est également, donc $(f_1 \otimes f_2)_{|U_1 \otimes U_2}$ est injective. $\square$

Ces propriétés du produit tensoriel sur un corps nous permettent d'écrire la propositon suivante :

Proposition 3.3.6. *Si (A,M) est une double algèbre, un sous-espace $I \subseteq A$ est un idéal de A si et seulement si c'est le noyau d'un homomorphisme de doubles algèbres.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que $I \subseteq A$ soit un idéal de A.
D'après la remarque précédente, $(A/I, \bar{M})$ est une double algèbre et on peut considérer l'application

$$\begin{aligned} \bar{\phi} : A &\to A/I \\ a &\mapsto \bar{a} \end{aligned}$$

On a, pour $a, b \in A$,

$$\begin{aligned}(\bar{\phi} \otimes \bar{\phi})(M(a,b)) &= \overline{M'(a,b)} \otimes \overline{M''(a,b)} \\ &= \bar{M}(\phi(\bar{a}), \phi(\bar{b}))\end{aligned}$$

donc $\bar{\phi}$ est un homomorphisme de doubles algèbres et I est son noyau.
Supposons à présent que I soit le noyau d'un homomorphisme de doubles algèbres $\Phi : (A, M_A) \to (B, M_B)$.
Puisque ϕ est un homomorphisme, on a

$$(\phi \otimes \phi)(M_A(A, I) + M_A(I, A)) = M_B((\phi \otimes \phi)(A \otimes I + I \otimes A))$$

Or, d'après la proposition (3.3.5), $A \otimes I + I \otimes A$ est le noyau de $\phi \otimes \phi$ donc

$$(\phi \otimes \phi)(M_A(A, I) + M_A(I, A)) = 0$$

et $M_A(A, I) + M_A(I, A) \subseteq A \otimes I + I \otimes A$. □

Définition 3.3.7. *Une double algèbre (A,M) est* ***simple*** *si* $M(A, A) \neq 0$ *et si A n'a pas d'idéaux propres.*

Proposition 3.3.8. *Si (L,M) est une double algèbre de dimension finie déterminée par un opérateur* $R : End(L) \to End(L)$*, alors L n'a pas de sous-espace propre non nul invariant relativement à R(End(L)) et* $R^*(End(L))$*.*

Démonstration. En utilisant la description (3.6) de M en fonction de R, on remarque que tout espace R(End(L))-invariant (resp. $R^*(End(L))$-invariant) est un idéal de V. □

Théorème 3.3.9. *Une double algèbre de Lie L de dimension finie strictement supérieure à 1 contient un idéal propre non nul.*

Démonstration. D'après le théorème (3.2.4), le double crochet de L est donné par un opérateur linéaire R sur A=End(L), vérifiant (3.7).
On déduit de

$$R(a)R(b) = R(R(a)b) + R(aR(b))$$

que R(A) est une sous-algèbre de A. En revanche, R(A) ne contient pas 1_A. En effet, si 1_A=R(a) pour $a \in A$, alors

$$1_A 1_A = R(a)R(a) = R(a) + R(a) = 1_A + 1_A$$

ce qui est impossible.
Supposons que L est simple. Alors L est un R(A)-module irréductible d'après la proposition précédente, ce qui équivaut à dire que R(A) est un A-module irréductible, donc contient l'identité. On aboutit alors à une contradiction, donc L n'est pas simple, et L contient un idéal propre non nul. □

Remarque 3.3.10. *La seule double algèbre de Lie de dimension finie sans idéaux propres non nuls est donc de dimension 1. Dans ce cas, on a* $M(L, L) = 0$ *et donc aucune double algèbre de Lie n'est simple.*

On va à présent étudier la simplicité des doubles algèbres associatives.
On considère $\alpha \in \mathbb{K}$ non nul et un espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$ muni du double crochet défini par $M(u, v) = \alpha u \otimes v$ pour $u, v \in V$.
Alors V est une double algèbre commutative et tout sous-espace de V en est un idéal. V est donc simple si et seulement si elle est de dimension 1.

Théorème 3.3.11. *Si* $\mathbb{K}$ *est un corps algébriquement clos, V est la seule double algèbre associative simple de dimension finie sur* $\mathbb{K}$*.*

Théorème 3.3.12. *Sur un corps arbitraire, toute double algèbre associative simple de dimension finie est commutative.*

On pourra trouver une preuve de ces théorèmes dans [4]. Il s'agit d'utiliser la description de la structure de double algèbre de V avec un opérateur linéaire R.
En notant $A = End(V)$, on commence par montrer que $R(A) + R^*(A) = A$ en utilisant (3.3.8) et que cela implique que $Ker(R) = 0$.
Puisque $dim(Ker(R)) = dim(Ker(R^*))$, on a alors $R^*(A) = A$. Pour tous $a, b \in A$, on a $R(ab) = R(a)b = aR(b)$ et on en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel

que $R = R^* = \alpha id_A$.
Pour le second théorème, il s'agit de montrer que si une double algèbre associative de dimension finie déterminée par un opérateur linéaire R est simple, alors $R = R^*$. On étudie alors l'idéal $\{R(x) - R^*(x) | x \in A\}$ pour montrer qu'il est nul. Il suffit ensuite d'utiliser (3.9).

Chapitre 4

Homologie et cohomologie de Hochschild

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désignera un anneau commutatif unitaire, d'unité notée 1, et A une $\mathbb{K}$-algèbre associative unitaire, d'unité notée 1_A. On notera $\otimes$ le produit tensoriel sur $\mathbb{K}$.

4.1 Le complexe de Hochschild

Définition 4.1.1. *Un* ***A-bimodule*** *M est un A-module à droite et à gauche tel que :*
-pour tous $a, b \in A$, $m \in M$, $(am)b = a(mb)$
-pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $a \in A$, $m \in M$, $(\lambda a)m = \lambda(am) = a(\lambda m)$

Définition 4.1.2. ***L'algèbre opposée*** *de A, notée* A^{op}*, est l'algèbre dont le module sous-jacent est A et dont la multiplication vérifie*

$$a^{op}b^{op}{=}(ba)^{op},\ \forall\ a^{op}, b^{op} \in A^{op}.$$

Remarque 4.1.3. *On peut munir* $A \otimes A^{op}$ *d'une structure de* $\mathbb{K}$*-algèbre associative unitaire en prenant pour multiplication*

$$(A \otimes A^{op}) \times (A \otimes A^{op}) \to A \otimes A^{op}$$
$$(a \otimes a^{op}, b \otimes b^{op}) \mapsto ab \otimes (ba)^{op}$$

Proposition 4.1.4. *La donnée d'un $A \otimes A^{op}$-module à gauche (resp.à droite) équivaut à la donnée d'un A-bimodule.*

Démonstration. On peut vérifier aisément que si $\Phi : (A \otimes A^{op}) \times M \to M$ fait de M un $A \otimes A^{op}$-module à gauche, on peut définir une structure de A-bimodule sur M par :

$$\begin{array}{cc} A \times M \to M & M \times A \to M \\ (a, m) \mapsto \Phi(a \otimes 1_A, m) & (m, a) \mapsto \Phi(1_A \otimes a, m) \end{array}$$

Inversement, si M est un A-bimodule, on peut le munir d'une stucture de $A \otimes A^{op}$-module à gauche à l'aide de

$$(A \otimes A^{op}) \times M \to M$$
$$(a \otimes b, m) \mapsto amb$$

□

Remarque 4.1.5. *A est donc muni d'une structure de $A \otimes A^{op}$-module.*

Définition 4.1.6. *Un* ***complexe de A-modules*** *est un module gradué $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} M_n$ muni d'applications $d_n : M_n \to M_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ telles que*
$d_{n+1} \circ d_n = 0$.
$d = \{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée ***différentielle****.*

$$\ldots \xrightarrow{d_{n+1}} M_n \xrightarrow{d_n} M_{n-1} \xrightarrow{d_{n-1}} M_{n-2} \xrightarrow{d_{n-2}} \ldots$$

Considérons à présent un A-bimodule M.

Définition 4.1.7. *Le* ***complexe de Hochschild*** *de A à valeurs dans M est défini par le module gradué $C_*(A, M) = \bigoplus_{n \geq 0} M \otimes_{A \otimes A^{op}} A^{\otimes n}$ équipé de la* *différentielle* $b_n : C_n(A,M) \to C_{n-1}(A,M)$ *donnée, pour* $n \geq 1$, *par*

$$\begin{aligned} b_n(m \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n) = & \; ma_1 \otimes ... \otimes a_n \\ & + \sum_{i=0}^{n-1} m \otimes a_1 \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_n \\ & + (-1)^n a_n m \otimes ... \otimes a_{n-1} \end{aligned}$$

$$... \xrightarrow{b_3} C_2(A,M) \xrightarrow{b_2} C_1(A,M) \xrightarrow{b_1} C_0(A,M) \longrightarrow 0$$

Définition 4.1.8. ***L'homologie de Hochschild*** *de* A *à valeurs dans* M *est le module gradué* $H_*(A,M) = \bigoplus_{n \geq 0} H_n(C_*(A,M),b)$ *où*

$$H_n(C_*(A,M),b) = Ker(b_n)/Img(b_{n+1}).$$

Définition 4.1.9. *On notera* $C_*(A)$ *le complexe de Hochschild de* A *et* $HH_*(A)$ *son homologie.*

Proposition 4.1.10. *Si* M, N *sont deux* A*-bimodules et* $f : M \to N$ *un morphisme de* A*-bimodules, alors* f *induit une application* $\mathbb{K}$*-linéaire*

$$C_n(f) : C_n(A,M) \to C_n(A,N)$$

De plus, cela induit une application de k*-modules gradués*

$$f_* : H_*(A,M) \to H_*(A,N)$$

Proposition 4.1.11. *(fonctorialité)*
Si A *et* B *sont deux algèbres associatives et* $f : A \to B$ *un morphisme d'algèbres, alors* f *induit un morphisme de* $\mathbb{K}$*-modules* $HH_*(A) \to HH_*(A)$. *De plus,* HH_* *est un foncteur de la catégorie des* $\mathbb{K}$*-algèbres associatives dans la catégorie des* $\mathbb{K}$*-modules gradués.*

Nous allons à présent calculer H_0(A,M) à titre d'exemple.
On a $C_0(A, M) = M$ et $C_1(A, M) = M \otimes A$.
De plus, $b_1(a \otimes m) = ma - am$ pour tous $m \in M$, $a \in A$.
On a alors $H_0(A, M) = M/\{ma - am|a \in A, m \in M\}$.
On peut également calculer que $HH_0(A) = A/[A, A]$, où [A,A] désigne le sous-$\mathbb{K}$-module des commutateurs de A.
Si A est commutatif, on a alors $HH_0(A) = A$.

4.2 La résolution Bar

Définition 4.2.1. *Si M est un A-module, une **résolution** de M est la donnée d'un complexe (C_*, d) concentré en degrés positifs tel que $H_n(C_*, d) = 0$ pour $n \geq 0$ et d'une surjection $\epsilon : C_0 \to M$, appelée **augmentation**, telle que $Ker(\epsilon) = Img(d_1)$.*

$$... \xrightarrow{d_3} C_2 \xrightarrow{d_2} C_1 \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

Définition 4.2.2. *On définit la **résolution** Bar (ou résolution de Hochschild) comme étant le complexe donné par le module gradué $C'_*(A) = \bigoplus_{n\geq 0} A^{\otimes(n+2)}$ équipé de la différentielle $b'_n : C'_n(A) \to C'_{n-1}(A)$ donnée, pour $n \geq 1$, par*
$b'_n(a_0 \otimes ... \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i a_0 \otimes a_1 \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_n$
et de l'augmentation $\begin{array}{c} \mu : C'_0(A) \to A \\ a \otimes b \mapsto ab \end{array}$

Proposition 4.2.3. *($C'_*(A)$,b') est une résolution du $A \otimes A^{op}$-module A.*

Démonstration. Il est clair que (C'_*(A),b') est un complexe au-dessus de A. Il suffit de trouver une homotopie contractante, c'est-à-dire une famille d'applications $s_n : C'_n(A) \to C'_{n+1}$ et $s_{-1} : A \to C'_0(A)$ vérifiant

$$b'_{n-1}s_n + s_{n-1}b'_n = id_{C'_n(A)}$$
$$\mu s_{-1} = id_A$$

afin de montrer que l'homologie de ce complexe est nulle. On va alors considérer

$$s_{-1} : a \mapsto 1 \otimes a$$
$$s_n : a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_{n+1} \mapsto 1 \otimes a_0 \otimes ... \otimes a_{n+1}$$

La vérification se fait aisément.

□

Définition 4.2.4. *Si F est un foncteur exact à droite entre deux catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, (P,d_P) une résolution de $M \in \mathcal{A}$ telle que $P_n \in \mathcal{A}$ soit projectif pour tout n, on définit le* ***foncteur dérivé à gauche*** *:*

$$L_nF(M) = H_n(F(P), F(d_P)), \; \forall \; n \in \mathbb{N}$$

Définition 4.2.5. *Si G est un foncteur exact à gauche entre deux catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, (I,d_I) une résolution de $M \in \mathcal{A}$ telle que $I_n \in \mathcal{A}$ soit injectif pour tout n, on définit le* ***foncteur dérivé à droite*** *:*

$$R^nG(M) = H^n(G(I), G(d_I)), \; \forall \; n \in \mathbb{N}$$

Définition 4.2.6. *Si B est un anneau, N un B-module à droite et N' un B-module à gauche, on considère les foncteurs exacts à droite*
$F = N \otimes_B (-) : {}_BMod \to {}_{\mathbb{Z}}Mod$, $F' = (-) \otimes_B N' : Mod_B \to Mod_{\mathbb{Z}}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$\begin{aligned} {Tor_n}^B(N, N') &= L_nF(N') \\ {Tor'_n}^B(N, N') &= L'_nF'(N) \end{aligned}$$

Proposition 4.2.7. *On a ${Tor_n}^B(N, N') \simeq {Tor'_n}^B(N, N')$*

Définition 4.2.8. *Si B est un anneau, N, N' deux B-modules à gauche, on considère les foncteurs exacts à gauche*
$G : Hom_B(N, -) = {}_BMod \to {}_{\mathbb{Z}}Mod$, $G' = Hom_B(-, N') : Mod_B^{op} \to {}_{\mathbb{Z}}Mod$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$Ext^n{}_B(N,N') = R^nG(N')$$
$$Ext'^n{}_B(N,N') = R'^nG'(N)$$

Proposition 4.2.9. *On a* $Ext^n{}_B(N,N') \simeq Ext'^n{}_B(N,N')$

Remarque 4.2.10. *Si* V *est un* $\mathbb{K}$*-module projectif, alors* $A \otimes V \otimes A$ *est un* $A \otimes A^{op}$*-module projectif.*
En effet, si le foncteur $Hom_{\mathbb{K}}(V,\text{-})$ *est exact, alors* $Hom_{A\otimes A^{op}}(A\otimes V\otimes A,\text{-})$ *l'est aussi car il existe un isomorphisme naturel en* V

$$Hom_{A\otimes A^{op}}(A \otimes V \otimes A, -) \simeq Hom_{\mathbb{K}}(V, -)$$

Théorème 4.2.11. *Si l'algèbre* A *est projective sur* $\mathbb{K}$*, alors pour tout* A*-bimodule* M *et pour tout* $n \geq 0$*, on a des isomorphismes :*

$$H_n(A,M) \simeq Tor_n^{A\otimes A^{op}}(M,A)$$

Démonstration. On va calculer le Tor en utilisant une résolution projective du second argument. En combinant la remarque précédente et la proposition (4.2.3), puisque A est $\mathbb{K}$-projective, (C'_*(A),b') est une résolution projective du A$\otimes A^{op}$-module A.
$Tor_n^{A\otimes A^{op}}$(M,A) se calcule donc comme le n-ième groupe d'homologie de $M \otimes_{A\otimes A^{op}} C'_n(A)$. On a $M \otimes_{A\otimes A^{op}} C'_n(A) \simeq C_n(A,M)$, en considérant les morphismes définis par

$$m_{A\otimes A^{op}}(a_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n) \mapsto a_{n+1}ma_0 \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n$$

et par

$$m \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_n \mapsto m \otimes 1 \otimes a_1 \otimes ...a_n \otimes 1.$$

Finalement, $H_n(A,M) \simeq Tor_n^{A\otimes A^{op}}(M,A)$. $\square$

On pourra trouver des exemples d'applications de ce théorème pour calculer l'homologie de Hochschild d'un module libre ou d'une algèbre tensorielle dans [11].

Théorème 4.2.12. *Si l'algèbre A est projective sur $\mathbb{K}$, alors pour tout A-bimodule M et pour tout $n \geq 0$, on a des isomorphismes :*

$$H^n(A, M) \simeq Ext^n_{A \otimes A^{op}}(M, A)$$

Une preuve de ce théorème est présentée dans [12].
On peut calculer par exemple $H^0(A, M)$. On considère le complexe suivant :

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{d_0} Hom_k(A, M) \xrightarrow{d_1} Hom_k(A \otimes A, M) \longrightarrow ...$$

où

$$\begin{aligned} d_0 : M &\to Hom_k(A, M) \\ m &\mapsto a \mapsto ma - am \\ d_1 : Hom_k(A, M) &\to Hom_k(A \otimes A, M) \\ f &\mapsto a \otimes b \mapsto af(b) - f(ab) + f(a)b \end{aligned}$$

On a alors $H^0(A, M) = \{m \in M | am = ma \; \forall a \in A\}$ et $HH^0(A) = \mathcal{Z}(A)$, où $\mathcal{Z}(A)$ est le centre de A.

Chapitre 5

$\mathbf{A}_\infty$-algèbres et structure de pre-Calabi-Yau

5.1 $\mathbf{A}_\infty$-algèbres

Définition 5.1.1. *Une **A_∞-algèbre** est un espace vectoriel gradué $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A^n$ muni d'une famille $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de morphismes homogènes $m_n : A^{\otimes n} \to A$ de degré 2-n satisfaisant, pour tout $N \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{(r,s,t)\in I_N} (-1)^{r+st} m_{r+1+t} \circ (id_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes id_A^{\otimes t}) = 0 \tag{SI(N)}$$

où $I_N = \{(r,s,t) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N} | r+s+t = N\}$.

On a donc

$$m_1 \circ m_1 = 0 \tag{SI(1)}$$

$$m_1 \circ m_2 - m_2 \circ (m_1 \otimes id) - m_2 \circ (id \otimes m_1) = 0 \tag{SI(2)}$$

$$
\begin{aligned}
&m_1 \circ m_3 + m_3 \circ (id \otimes id \otimes m_1) \\
&+ m_3 \circ (m_1 \otimes id \otimes id) + m_3 \circ (id \otimes m_1 \otimes id) \\
&+ m_2 \circ (m_2 \otimes id) - m_2 \circ (id \otimes m_2) = 0
\end{aligned} \tag{SI(3)}
$$

Remarque 5.1.2. *L'identité (SI(1)) traduit le fait que m_1 est une différentielle de A. D'après (SI(2)), m_1 est une dérivation graduée pour le produit m_2. Cependant, m_2 n'est pas toujours associatif mais associatif à homotopie près d'après (SI(3)), où m_3 joue le rôle de l'homotopie. On en déduit que m_2 est associatif si m_1 ou m_3 est nulle.*

Si on veut appliquer (SI(2)) a deux éléments $a, b \in A$, on utilise la règle du signe de Koszul, donnée pour $f, g \in A^*$ par

$$(f \otimes g)(a \otimes b) = (-1)^{|a||g|} f(a) \otimes g(b)$$

On a alors, en notant $m_2(a, b) = a.b$,

$$m_1(a.b) = m_1(a).b + (-1)^{|a|} a.m_1(b) = 0 \tag{SI(2)}$$

On notera $\tau_{A,A}$ l'application définie par

$$a \otimes b \mapsto (-1)^{|a||b|} b \otimes a$$

Définition 5.1.3. *Pour $d \in \mathbb{Z}$, une **A_∞-algèbre d-cyclique** est une A_∞-algèbre (A,m_*) munie d'une forme non dégénérée $\gamma : A \otimes A \to \mathbb{K}$ de degré d satisfaisant*

$$\gamma \circ \tau_{A,A} = \gamma \tag{5.1}$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tous éléments homogènes $a_0,...a_n$,

$$\gamma(m_n(a_1, ..., a_n), a_0) = (-1)^{n+|a_0|(\sum_{i=1}^{n} |a_i|)} \gamma(m_n(a_0, ..., a_{n-1}), a_n) \tag{5.2}$$

Remarque 5.1.4. *Si on définit $(SI(N))_\gamma : A^{\otimes(N+1)} \to \mathbb{K}$ de degré 3-N+d*

par
$$\sum_{(r,s,t)\in I_N} (-1)^{r+st}\gamma(m_{r+1+t}\circ(id_A^{\otimes r}\otimes m_s\otimes id_A^{\otimes t})\otimes id_A) \tag{5.3}$$
alors l'identité (SI(N)) est vérifiée si et seulement si $(SI(N))_\gamma = 0$.

Proposition 5.1.5. *Si* A *est un espace vectoriel gradué,* $\gamma : A\otimes A \to \mathbb{K}$ *une forme bilinéaire non dégénérée de degrée* d *satisfaisant* (5.1) *et* $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une famille d'applications* $m_n : A^{\otimes n} \to A$ *de degré 2-n satisfaisant* (5.2)*, alors pour tous éléments homogènes* $a_0,\ldots a_n$*, on a*

$$SI(N)_\gamma(a_1,...,a_n,a_0) = (-1)^{N+|a_0|(|a_1|+...+|a_n|)}SI(N)_\gamma(a_0,a_1,...,a_n)$$

On pourra trouver une preuve de cette proposition dans [3].

5.2 Structure de pre-Calabi-Yau

On notera $\partial_{d-1}A = A\oplus A^*[d-1]$, $\mathrm{t}_{d-1} : A^* \to A^*[d-1]$ pour $d\in\mathbb{Z}$, $\partial_1 A = \partial A$ et $\mathrm{t}_1 = t$.

Définition 5.2.1. *La* ***forme bilinéaire naturelle*** *de degré d-1 associée à un espace vectoriel* A*, vu comme un espace vectoriel gradué concentré en degré 0, est*

$$\zeta_A : \partial_{d-1}A\otimes\partial_{d-1}A \to \mathbb{K}$$
donnée, pour $a,b\in A$, $f,g\in A^*$, *par*
$$\zeta_A(t_{d-1}f,a) = (-1)^{|a||t_{d-1}f|}\zeta_A(a,t_{d-1}f) = f(a)$$
$$\zeta_A(a,b) = \zeta_A(t_{d-1}f,t_{d-1}g) = 0$$

Définition 5.2.2. *Pour* $d\in\mathbb{Z}$*, une* ***d-structure de pre-Calabi-Yau*** *sur un espace vectoriel* A *est la donnée d'une structure d'*A_∞*-algèbre (d-1)-cyclique sur* $\partial_{d-1}A$ *pour la forme bilinéaire naturelle* ζ_A *de degré d-1 telle que les multiplications* $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de* $\partial_{d-1}A$ *vérifient que* $m_n(A^{\otimes n})\subseteq A$ *pour tout* $n\in\mathbb{N}$.

Remarque 5.2.3. *Si A est une $\mathbb{K}$-algèbre associative, A^*[1] est un A-bimodule muni de*

$$\zeta_A(a.tf.b, c) = f(bca) \forall a, b, c \in A, f \in A^*$$

∂A est alors muni d'une 2-structure de pre-Calabi-Yau pour ζ_A si on considère

$$m_2((a, tf), (b, tg)) = (ab, tf.b + a.tg) \ \forall a, b \in A \text{ et } f, g \in A^*$$

et $m_n = 0$ pour tout $n \neq 2$.

Définition 5.2.4. *On notera, pour $\bar{i} = (i_1, ..., i_n) \in \{0, 1\}^n$, $B_{\bar{i}} = B_{i_1} \otimes ... \otimes B_{i_n}$ où $B_0 = A$ et $B_1 = A^*[d-1]$. De plus, $|\bar{i}| = \sum_{j=1}^{n} i_j$, donc $|\bar{i}|$ est précisément le nombre d'occurences de A^*[d-1] dans $B_{\bar{i}}$.*

Chapitre 6

Structure de double algèbre et structure de pre-Calabi-Yau sur les algèbres de Frobenius symétriques

6.1 Structure de double algèbre sur une algèbre de Frobenius symétrique

Remarque 6.1.1. *Dans le produit tensoriel $E \otimes F$, tout élément x s'écrit*

$$x = \sum_{i \in I} v_i \otimes w_i$$

avec $\{v_i\}_{i \in I}$, $\{w_i\}_{i \in I}$ des familles de vecteurs de E et F respectivement. Si on choisit $I' \subseteq I$ maximal tel que $\{v_i\}_{i \in I'}$ forme une famille libre de E, on peut écrire :

$$x = \sum_{i \in I'} v_i \otimes w_i + \sum_{i \in I - I'} v_i \otimes w_i$$

I' étant maximal, les éléments $\{v_i\}_{i\in I-I'}$ sont combinaisons linéaires des $\{v_i\}_{i\in I'}$ et on peut donc toujours écrire x comme

$$x = \sum_{i\in I} v_i \otimes w_i$$

en supposant que $\{v_i\}_{i\in I}$ est une famille libre.

On considère une algèbre unitaire (d'unité notée 1) (A, μ) muni d'un double crochet associatif $M : A\otimes A \to A\otimes A$ tel que pour tout $a \in A$, $M(a, -)$ soit A^e-linéaire. On notera $m = \mu \circ M$.
On suppose également que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$m(ab - ba, c) =_{[A,A]} 0 \tag{6.1}$$

$$m(a, bc - cb) =_{[A,A]} 0 \tag{6.2}$$

Remarque 6.1.2. *Ces deux conditions sont celles qui permettent à m d'induire une application $\bar{m} : A/[A, A] \otimes A/[A, A] \to A/[A, A]$.*
On pourra noter que la condition (6.2) est en fait une conséquence de la linéarité imposée sur M. En effet,

$$\begin{aligned} m(a, bc - cb) &= M'(a, bc - cb)M''(a, bc - cb) \\ &= M'(a, bc)M''(a, bc) - M'(a, cb)M''(a, cb) \end{aligned}$$

et par linéarité,

$$\begin{aligned} M'(a, bc)M''(a, bc) - M'(a, cb)M''(a, cb) &= bM'(a, c)M''(a, c) \\ &\quad - M'(a, c)M''(a, c)b \\ &=_{[A,A]} 0 \end{aligned}$$

Proposition 6.1.3. *Avec les hypothèses formulées ci-dessus, m induit un produit associatif $\bar{m}$ sur $HH_0(A)$.*

Démonstration. En utilisant la linéarité à droite, on a :

$$M(M(a,b),c)_R = M'(a,1) \otimes M'(M''(a,1)b,c) \otimes M''(M''(a,1)b,c) \quad (6.3)$$

$$M(a,M(b,c))_R = M'(a,1) \otimes M'(b,c) \otimes M''(a,1)M''(b,c) \quad (6.4)$$

En utilisant la remarque (6.1.1) et la proposition (3.3.3) appliquées à

$$M'(a,1) \otimes (M'(M''(a,1)b,c)M''(M''(a,1)b,c) - M'(b,c)M''(a,1)M''(b,c))$$

on obtient alors

$$M'(M''(a,1)b,c)M''(M''(a,1)b,c) = M'(b,c)M''(a,1)M''(b,c) \quad (6.5)$$

On veut à présent montrer que $\bar{m}$: A/[A,A]$\otimes$A/[A,A] $\rightarrow$ A/[A,A] est associatif.

$$\begin{aligned} m(m(a,b),c) &= M'(M'(a,b)M''(a,b),c)M''(M'(a,b)M''(a,b),c) \\ &= M'(M'(a,1)M''(a,1)b,c)M''(M'(a,1)M''(a,1)b,c) \\ &=_{[A,A]} M'(M''(a,1)bM'(a,1),c)M''(M''(a,1)bM'(a,1),c) \end{aligned}$$

en utilisant (6.1) pour la dernière égalité.
On a alors, en utilisant (6.5) appliquée à $b = bM'(a,1)$ et la linéarité à gauche,

$$\begin{aligned} m(m(a,b),c) &= M'(bM'(a,1),c)M''(a,1)M''(bM'(a,1),c) \\ &= \mu^3(M(M(a,b),c)_L) \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a

$$m(a,m(b,c)) = M'(a,M'(b,c))M''(a,M'(b,c))M''(b,c) = \mu^3(M(a,M(b,c))_L)$$

L'égalité donnée par l'associativité nous permet de conclure. $\square$

Corollaire 6.1.4. *On suppose que (A,θ) est une algèbre de Frobenius symétrique et on définit* $\sum_i \xi_i' \otimes \xi_i''$ *par*

$$\forall a \in A, a = \sum_i \xi_i' \theta(a \xi_i'')$$

Si on munit A d'une structure de double algèbre définie par

$$M(a,b) = \sum_i \xi_i' a \otimes \xi_i'' b$$

alors le produit m défini par

$$m(a,b) = \sum_i \xi_i' a \xi_i'' b$$

induit un produit associatif

$$\bar{m} : HH_0(A) \otimes HH_0(A) \to HH_0(A)$$

.

Démonstration. Par définition de $\sum_i \xi_i' \otimes \xi_i''$, on a

$$\sum_i a\xi_i' \otimes \xi_i'' = \sum_i \xi_i' \otimes \xi_i'' a \tag{6.6}$$

et

$$\sum_i \xi_i' a \otimes \xi_i'' = \sum_i \xi_i' \otimes a\xi_i'' \tag{6.7}$$

En effet, si l'on note $\gamma : 1 \mapsto \sum_i \xi_i' \otimes \xi_i''$, on remarque que γ est la coforme de la forme bilinéaire de Frobenius β associée à θ. On peut alors utiliser la symétrie de (A,θ) et la remarque (2.2.10).
D'après la proposition (6.1.3), il suffit de vérifier que (A,M) vérifie (6.1), ce qui est immédiat grâce à (6.7), et que pour tout $a \in A$, M(a,-) est A^e-linéaire.

En utilisant (6.6), on a que pour tous $a, b, c \in A$,

$$M(a, bc) = \sum_i \xi_i' a \otimes \xi_i{}'' bc = \sum_i bc\xi_i' a \otimes \xi_i{}'' = b \sum_i a\xi_i' \otimes \xi_i{}'' c = bM(a, c)$$

et

$$M(a, bc) = \sum_i \xi_i' a \otimes \xi_i{}'' bc = (\sum_i \xi_i' a \otimes \xi_i{}'' b)c = M(a, b)c$$

. $\square$

Remarque 6.1.5. *Dans* [8], *le résultat est énoncé dans le cas d'une algèbre de Frobenius symétrique et séparable, de sorte que* $HH_*(A)$ *soit concentré en degré 0 et que le produit* $\bar{m}$ *soit un produit associatif sur l'homologie de Hochschild de A.*

Exemple 6.1.6. *On considère l'algèbre de Frobenius symétrique définie dans l'exemple (*2.2.18*),* $M_n(\mathbb{K})$ *munie de la trace*

$$\begin{aligned} Tr : M_n(\mathbb{K}) \to & \quad \mathbb{K} \\ A = (a_{ij})_{i,j} \mapsto & \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{aligned}$$

On définit la matrice élémentaire $(E_{i,j})_{k,l} = \delta_{(i,j),(k,l)}$. *On définit ensuite*

$$\begin{aligned} \xi'_{i,j} &= E_{i,j} \\ \xi''_{i,j} &= E_{j,i} \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} A\xi''_{i,j} &= E_{j,i}A \\ &= A' \end{aligned}$$

où $A'_{k,l} = 0$ *si* $l \neq i$, $a_{k,j}$ *sinon.*

On a donc $Tr(A\xi''_{i,j}) = a_{i,j}$ *et*

$$\begin{aligned}\sum_{i,j} \xi'_{i,j} Tr(A\xi''_{i,j}) &= \sum_{i,j} \xi'_{i,j} a_{i,j} \\ &= A\end{aligned}$$

On peut donc définir la structure de double algèbre suivante sur $M_n(\mathbb{K})$ *:*

$$M(A,B) = \sum_{i,j} \xi'_{i,j} A \otimes \xi''_{i,j} B$$

On a

$$HH_0(M_n(\mathbb{K})) = M_n(\mathbb{K})/[M_n(\mathbb{K}), M_n(\mathbb{K})] \simeq \mathbb{K}$$

car on peut vérifier que l'application

$$\begin{aligned}\mathbb{K} &\to M_n(\mathbb{K})/[M_n(\mathbb{K}), M_n(\mathbb{K})] \\ \lambda &\mapsto \overline{\lambda.I_n}\end{aligned}$$

est un isomorphisme, et le produit sur $HH_0(M_n(\mathbb{K}))$ *est donné par*

$$\begin{aligned}\bar{m}(\lambda,\mu) &= \sum_{i,j} \xi'_{i,j} \lambda \otimes \xi''_{i,j} \mu \\ &= n.\lambda.\mu\end{aligned}$$

D'un autre côté, $HH^0(M_n(\mathbb{K})) = \mathcal{Z}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}$ *est muni du produit usuel et on peut vérifier que*

$$\begin{aligned}(HH^0(M_n(\mathbb{K})), .) &\to (HH_0(M_n(\mathbb{K})), \bar{m}) \\ \lambda &\mapsto \frac{\lambda}{n}\end{aligned}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

Exemple 6.1.7. *On considère l'algèbre de Frobenius définie dans l'exemple (*2.2.20*) par*

$$\theta : \mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle \to \mathbb{K}$$
$$a_0 + ... + a_{n-1}x^{n-1} \mapsto a_{n-1}$$

Cette algèbre de Frobenius est symétrique car $\mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle$ *est commutative et on a* $HH_0(\mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle)$=$\mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle$*.*
On définit

$$\xi_i' = x^i$$
$$\xi_i{}'' = x^{n-1-i}$$

Le produit $\bar{m}$ *de* $HH_0(\mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle)$ *est donné par*

$$\begin{aligned}\bar{m}(x^k, x^j) &= \sum_{i=0}^{n-1} x^{i+k} x^{n-1-i+j} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} x^{k+j+n-1} \\ &= n.x^{k+j+n-1} \\ &= \begin{cases} n.x^{n-1} \; si \; k = j = 0 \\ 0 \; sinon \end{cases}\end{aligned}$$

D'un autre côté, $HH^0(\mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle)$=$\mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle$ *muni du produit usuel est une algèbre unitaire, tandis que par définition de* $\bar{m}$*,* $(HH_0(\mathbb{K}[x]/\langle x^n \rangle), \bar{m})$ *ne l'est pas.*
Ces deux espaces sont donc isomorphes en tant qu'espaces vectoriels, mais pas en tant qu'algèbres.

6.2 Structure de pre-Calabi-Yau sur une algèbre de Frobenius symétrique

Remarque 6.2.1. *La donnée d'une algèbre de Frobenius symétrique* (A, θ) *est équivalente à la donnée d'une* A_∞*-algèbre 0-cyclique où* A *est concentré en degré 0.*
En effet, si (A, θ) *est une algèbre de Frobenius, c'est une* A_∞*-algèbre où* A *est concentré en degré 0 avec* m_2 *la multiplication de* A *et* m_n*=0 pour* $n \neq 2$.
Pour $N \neq 2$*, (SI(N)) est trivialement vérifiée et* m_2 *étant associatif, l'identité (SI(2)) est également satisfaite.*
De plus, la forme bilinéaire de Frobenius β *associée à* θ *est de degré 0 et satisfait*

$$\beta \circ \tau_{A,A} = \beta$$

car pour $a, b \in A$*, on a*

$$\beta\tau_{A,A}(a \otimes b) = \beta(b \otimes a) = \beta(a \otimes b)$$

par symétrie.
On doit ensuite vérifier que β *satisfait (*5.2*).*
On a

$$\beta(m_2(a, b), c) = \theta((a.b).c) = \theta(c.(a.b)) = \theta((c.a).b) = \beta(m_2(c, a), b)$$

et A *est donc une* A_∞*-algèbre 0-cyclique.*
Si on a une A_∞*-algèbre 0-cyclique où* A *est concentré en degré 0,* A *est une algèbre pour le produit* m_2 *qui est associatif d'après (*5.1.2*).*
A *est également munie d'une forme bilinéaire non dégénérée* $\beta : A \otimes A \to \mathbb{K}$ *de degré 0.*
Cette forme est symétrique car elle vérifie

$$\beta \circ \tau_{A,A} = \beta$$

par définition, et A est alors une algèbre de Frobenius.

Proposition 6.2.2. *Si A est une algèbre de Frobenius symétrique et $\gamma : \mathbb{K} \to A \otimes A$ la coforme associée, A est munie d'une 2-structure de pre-Calabi-Yau pour ζ_A avec m_1 défini par*

$$\zeta_A(m_1(tf), tg) = (g \otimes f)(\gamma(1)) \; \forall f, g \in A^*$$

et $m_{1|A}$=0, m_2 défini dans (5.2.3) et m_n=0 pour tout $n \geq 3$.

Démonstration. Il nous suffit de vérifier $(SI(N))$ pour N=1,2.
Pour N=1, $(SI(N))$ s'écrit $m_1 \circ m_1$=0, ce qui est vérifié.
Pour N=2, on doit vérifier que

$$m_1 \circ m_2 = m_2 \circ (id \otimes m_1) + m_2 \circ (m_1 \otimes id)$$

Si $a, b \in A$, on a

$$m_1 \circ m_2(a, b) = m_1(a.b) = 0$$
$$m_2 \circ (a \otimes m_1(b)) + m_2 \circ (m_1(a) \otimes b) = a.m_1(b) + m_1(a).b = 0$$

Pour $a \in A$, $f \in A^*$, on a

$$\forall b \in A, \; \zeta_A(m_1(a.tf), b) = 0$$
$$\zeta_A(m_1(a).tf + a.m_1(tf), b) = 0$$

$$\begin{aligned}
\forall g \in A^*,\ \zeta_A(m_1(m_2(a,tf)),tg) &= \zeta_A(m_1(t(a.f)),tg) \\
&= (g \otimes a.f)(\gamma(1)) \\
&= (g \otimes f)(\gamma(1).a) \\
\zeta_A(m_2(m_1(a),tf) + m_2(a,m_1(tf)),tg) &= \zeta_A(m_2(a,m_1(tf)),tg) \\
&= \zeta_A(m_2(tg,a),m_1(tf)) \\
&= \zeta_A(t(g.a),m_1(tf)) \\
&= (g \otimes f)(a.\gamma(1))
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}
\forall g \in A^*,\ \zeta_A(m_1(m_2(tf,a)),tg) &= \zeta_A(m_1(t(f.a)),tg) \\
&= (g \otimes f.a)(\gamma(1)) \\
&= (g \otimes f)(\gamma(1) * a) \\
\zeta_A(m_2(m_1(tf),a) + m_2(tf,m_1(a)),tg) &= \zeta_A(m_2(m_1(tf),a),tg) \\
&= \zeta_A(m_2(a,tg),m_1(tf)) \\
&= \zeta_A(t(a.g),m_1(tf)) \\
&= (g \otimes f)(a * \gamma(1))
\end{aligned}$$

On a alors les égalités souhaitées d'après la remarque (2.2.10).

Pour $f, g \in A^*$, on a

$$m_1 \circ m_2(tf, tg) = 0$$
$$(m_2 \circ m_1 \otimes id + m_2 \circ id \otimes m_1)(tf \otimes tg)$$
$$= m_2(m_1(tf), tg) - m_2(tf, m_1(tg))$$

et $\forall a \in A$,

$$\zeta_A(m_2(m_1(tf), tg), a) - \zeta_A(m_2(tf, m_1(tg)), a)$$
$$= \zeta_A(m_2(tg, a), m_1(tf)) - \zeta_A(m_2(a, tf), m_1(tg))$$
$$= (g \otimes f)(a.\gamma(1)) - (g \otimes f)(\gamma(1).a)$$
$$= 0$$

L'identité (SI(3)) est équivalente à l'associativité de m_2 puisque m_3 est nulle, donc (SI(3)) est vérifiée. Les identités suivantes sont trivialement vérifiées puisque m_n=0 si $n \geq 3$. □

On a alors montré qu'une A_∞-algèbre 0-cyclique, ou de manière équivalente, une algèbre de Frobenius, est munie d'une structure de pre-Calabi-Yau.
Dans un cas plus général, on a la proposition suivante :

Proposition 6.2.3. *On considère une A_∞-algèbre (d-1)-cyclique (A,m_*) munie d'une forme biliéaire β et d'une coforme γ. Alors A est munie d'une d-structure de pre-Calabi-Yau définie par :*

$$M_n : (\partial_{d-1}A)^{\otimes n} \to \partial_{d-1}A$$

vérifiant

$$
\begin{aligned}
&M_{n|A} = m_n \ \forall n \geq 1 \\
&M_{n|A^{\otimes i} \otimes A^*[d-1] \otimes A^{\otimes j}} \subseteq A^*[d-1] \ \forall n \geq 2, \ \forall i, j \ \textit{tels que} \ i + j + 1 = n \\
&M_{n|A^{\otimes i} \otimes (A^*[d-1])^{\otimes k} \otimes A^{\otimes j}} = 0 \ \forall n \geq 2, \ \forall i, j, k \ \textit{tels que} \ i + j + k = n, \ k \geq 2 \\
&M_1 : A^*[d-1] \to A \oplus A^*[d-1] \\
&\qquad t_{d-1} f \mapsto (\Phi(t_{d-1} f), \Psi(t_{d-1} f))
\end{aligned}
$$

où Φ *et* Ψ *sont définies comme suit :*

$$
\begin{aligned}
&\zeta_A(\Phi(t_{d-1} f), t_{d-1} g) = (g \otimes f)(\gamma(1)) \\
&\zeta_A(\Psi(t_{d-1} f), a) = (-1)^{1+|a||t_{d-1} f|} \zeta_A(m_1(a), t_{d-1} f) = (-1)^{1+|t_{d-1} f|} f(m_1(a)) \\
&\forall f, g \in A^*[d-1], \ a \in A.
\end{aligned}
$$

Démonstration. On commence par montrer que (SI(1)) est vérifiée, c'est-à-dire que $M_1 \circ M_1$=0.
Pour $a \in A$, on a M_1(a)=m_1(a), donc $M_1 \circ M_1$(a)=0.

Soit $f, g \in A^*[d-1]$.

$$\begin{aligned}
\zeta_A(M_1(M_1(t_{d-1}f)), t_{d-1}g) &= \zeta_A(\Phi(\Psi(t_{d-1}f)), t_{d-1}g) + \zeta(\Phi(\Phi(t_{d-1}f)), t_{d-1}g) \\
&= \zeta(\Phi(\Psi(t_{d-1}f)), t_{d-1}g) \\
&+ (-1)^{1+|t_{d-1}g|(|t_{d-1}f|+1)}\zeta(\Psi(t_{d-1}g), \Phi(t_{d-1}f)) \\
&= \zeta(\Phi(\Psi(t_{d-1}f)), t_{d-1}g) \\
&+ (-1)^{|t_{d-1}f|}\zeta(\Phi(t_{d-1}f), \Psi(t_{d-1}g)) \\
&= (-1)^{1+|t_{d-1}f|}\zeta(\Phi(t_{d-1}(f \circ m_1)), t_{d-1}g) \\
&+ (-1)^{1+|t_{d-1}f|+|t_{d-1}g|}\zeta(\Phi(t_{d-1}f), t_{d-1}(g \circ m_1)) \\
&= (-1)^{1+|t_{d-1}f|}(g \otimes (f \circ m_1))(\gamma(1)) \\
&+ (-1)^{1+|t_{d-1}f|+|t_{d-1}g|}((g \circ m_1) \otimes f)(\gamma(1)) \\
&= (-1)^{1+|t_{d-1}f|+(|f|+1)|\gamma'(1)|}g(\gamma'(1)) \otimes (f \circ m_1)(\gamma''(1)) \\
&+ (-1)^{1+|t_{d-1}f|+|t_{d-1}g|+|f||\gamma'(1)|}(g \circ m_1)(\gamma'(1)) \otimes f(\gamma''(1)) \\
&= (-1)^{1+|t_{d-1}f|+|\gamma'(1)|}(g \otimes f)(\gamma'(1) \otimes m_1(\gamma''(1))) \\
&+ (-1)^{1+|t_{d-1}f|+|t_{d-1}g|+|f|}(g \otimes f)(m_1(\gamma'(1))) \otimes \gamma''(1) \\
&= (-1)^{|\gamma'(1)|}(g \otimes f)(\gamma'(1)) \otimes m_1(\gamma''(1)) \\
&+ (-1)^{d-1+|g|+|f|}(g \otimes f)(m_1(\gamma'(1))) \otimes \gamma''(1)
\end{aligned}$$

Or, ζ_A est de degré d-1 et à valeurs dans $\mathbb{K}$, concentré en degré 0, donc

$$\begin{aligned}
&\zeta_A(M_1(M_1(t_{d-1}f)), t_{d-1}g) \neq 0 \textit{ si et seulement si} \\
&(d-1+|f|+2) + (d-1+|g|) + d-1 = 0
\end{aligned}$$

On a alors

$$(-1)^{d-1+|g|+|f|} = (-1)^{3d-1+|g|+|f|} = (-1)^0 = 1$$

Il reste donc à montrer que

$$(-1)^{|\gamma'(1)|}(g\otimes f)(\gamma'(1)\otimes m_1(\gamma''(1)))+(g\otimes f)(m_1(\gamma'(1))\otimes\gamma''(1))=0$$

On a $\beta\circ(\mathrm{id}_A\otimes m_1+m_1\otimes id_A)$=0, donc $(\mathrm{id}_A\otimes m_1+m_1\otimes id_A)\circ\gamma$=0, ce qui donne

$$(-1)^{|\gamma'(1)|}\gamma'(1)\otimes m_1(\gamma''(1))+m_1(\gamma'(1))\otimes(\gamma''(1))=0$$

d'où le résultat.
On va à présent vérifier (SI(N)) pour N$\geq$ 2. D'après la remarque (5.1.4), cela équivaut à montrer que l'on a :

$$\sum_{(r,s,t)\in I_N}(-1)^{r+st}\zeta_A(m_{r+1+t}\circ(id_A^{\otimes r}\otimes m_s\otimes id_A^{\otimes t})\otimes id_A)=0$$

Si $|\bar{i}|$=0, (SI(N)) est vérifiée puisque ζ_A(A,A)=0.
Si $|\bar{i}|$=1, en utilisant la proposition (5.1.5), il suffit de vérifier que l'on a :

$$\sum_{(r,s,t)\in I_N}(-1)^{r+st}\zeta_A(M_{r+1+t}(a_1,...,a_r,M_s(a_{r+1},...,a_{s+r}),a_{s+r+1},...,a_{s+r+t}),t_{d-1}f)=0$$

ce qui est vrai car (A,m$_*$) est une A$_\infty$-algèbre et que $M_{n|A}=m_n$.
Si $|\bar{i}|$=2, il nous suffit de vérifier que pour $f,g\in A^*$, $a_1,...,a_r,b_1,...,b_t\in A$,

$$\begin{aligned}&\zeta_A(M_1(M_N(a_1,...,a_r,t_{d-1}f,b_1,...,b_t)),t_{d-1}g)\\&+(-1)^{r+t+|a_1|+...+|a_r|}\zeta_A(M_N(a_1,...,a_r,M_1(t_{d-1}f),b_1,...,b_t),t_{d-1}g)=0\end{aligned}$$

avec r+t+1=N.
En effet, si M_1 n'apparaît pas dans l'expression, on utilise le fait que ζ_A(A*,A*)=0 et on procède de même si M_1 apparaît mais ne prend pas t_{d-1}f en argument.
On a, par définition de M_1,

$$\begin{aligned}\zeta_A(M_1(M_N(a_1,...,a_r,t_{d-1}f,b_1,...,b_t)),t_{d-1}g)&=(g\otimes k)(\gamma(1))\\&=(-1)^{|k||\gamma'(1)|}g(\gamma'(1))\otimes k(\gamma''(1))\end{aligned}$$

où

$$t_{d-1}k = M_N(a_1, ..., a_r, t_{d-1}f, b_1, ..., b_t)$$

Or, par cyclycité,

$$\begin{aligned}
k(\gamma''(1)) &= \zeta_A(t_{d-1}k, \gamma''(1)) \\
&= \zeta_A(M_N(a_1, ..., a_r, t_{d-1}f, b_1, ..., b_t), \gamma''(1)) \\
&= (-1)^{N(t+1)+(|\gamma''(1)|+|b_1|+...+|b_t|)(|a_1|+...|a_r|+|t_{d-1}f|)} \\
&\zeta_A(m_N(b_1, ..., b_t, \gamma''(1), a_1, ..., a_r), t_{d-1}f) \\
&= (-1)^{N(t+1)+(|\gamma''(1)|+|b_1|+...+|b_t|)(|a_1|+...|a_r|)+|t_{d-1}f|(N+|a_1|+...+|a_r|)} \\
&f(m_N(b_1, ..., b_t, \gamma''(1), a_1, ..., a_r))
\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}
&\zeta_A(M_1(M_N(a_1, ..., a_r, t_{d-1}f, b_1, ..., b_t)), t_{d-1}g) \\
&= (-1)^{|k||\gamma'(1)|+N(t+1)+(|\gamma''(1)|+|b_1|+...+|b_t|)(|a_1|+...|a_r|)+|t_{d-1}f|(N+|a_1|+...+|a_r|)} \\
&g(\gamma'(1)) \otimes f(m_N(b_1, ..., b_t, \gamma''(1), a_1, ..., a_r)) \\
&= (-1)^{\epsilon}(g \otimes f)(\gamma'(1) \otimes m_N(b_1, ..., b_t, \gamma''(1), a_1, ..., a_r))
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\epsilon =&(N + |a_1| + ... + |a_r| + |b_1| + ... + |b_t|)|\gamma'(1)| + N(t+1) \\
&+ (|\gamma''(1)| + |b_1| + ... + |b_t|)(|a_1| + ...|a_r|) + |t_{d-1}f|(N + |a_1| + ... + |a_r|)
\end{aligned}$$

D'un autre côté, on a

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{r+t+|a_1|+...+|a_r|}\zeta_A(M_N(a_1,...,a_r,M_1(t_{d-1}f),b_1,...,b_t),t_{d-1}g)\\
&=(-1)^{r+t+|a_1|+...+|a_r|+N(t+1)+(|t_{d-1}g|+|b_1|...+|b_t|)(|a_1|+...+|a_r|+|t_{d-1}f|+1)}\\
&\zeta_A(M_N(b_1,...,b_t,t_{d-1}g,a_1,...,a_r),M_1(t_{d-1}f))\\
&=(-1)^{r+t+N(t+|t_{d-1}f)+(|t_{d-1}g|+|b_1|...+|b_t|+|t_{d-1}f|)(|a_1|+...+|a_r|)}\\
&\zeta_A(M_1(t_{d-1}f),M_N(b_1,...,b_t,t_{d-1}g,a_1,...,a_r))\\
&=(-1)^{r+t+N(t+|t_{d-1}f|)+(|t_{d-1}g|+|b_1|...+|b_t|+|t_{d-1}f|)(|a_1|+...+|a_r|)}(h\otimes f)(\gamma(1))\\
&=(-1)^{r+t+N(t+|t_{d-1}f|)+(|t_{d-1}g|+|b_1|...+|b_t|+|t_{d-1}f|)(|a_1|+...+|a_r|)+|f||\gamma'(1)|}\\
&h(\gamma'(1))\otimes f(\gamma''(1))
\end{aligned}
$$

où

$$
t_{d-1}h = M_N(b_1,...,b_t,t_{d-1}g,a_1,...,a_r)
$$

Or, par cyclycité,

$$
\begin{aligned}
h(\gamma'(1)) &= \zeta_A(t_{d-1}h,\gamma'(1))\\
&=\zeta_A(M_N(b_1,...,b_t,t_{d-1}g,a_1,...,a_r),\gamma'(1))\\
&=(-1)^{N(r+1)+(|\gamma'(1)|+|a_1|+...+|a_r|)(|b_1|+...|b_t|+|t_{d-1}g|)}\\
&\zeta_A(m_N(a_1,...,a_r,\gamma'(1),b_1,...,b_t),t_{d-1}g)\\
&=(-1)^{N(t+1)+(|\gamma'(1)|+|a_1|+...+|a_r|)(|b_1|+...|b_t|)+|t_{d-1}g|(N+|b_1|+...+|b_t|)}\\
&g(m_N(a_1,...,a_r,\gamma'(1),b_1,...,b_t))
\end{aligned}
$$

En notant

$$
\begin{aligned}
\nu =& N(t+1)+(|\gamma'(1)|+|a_1|+...+|a_r|)(|b_1|+...|b_t|)\\
&+|t_{d-1}g|(N+|b_1|+...+|b_t|)
\end{aligned}
$$

on a donc

$$(-1)^{r+t+|a_1|+...+|a_r|}\zeta_A(M_N(a_1,...,a_r,M_1(t_{d-1}f),b_1,...,b_t),t_{d-1}g)$$
$$= (-1)^{r+t+N(t+|t_{d-1}f|)+(|t_{d-1}g|+|b_1|...+|b_t|+|t_{d-1}f|)(|a_1|+...+|a_r|)+|f||\gamma'(1)|+\nu}$$
$$g(m_N(a_1,...,a_r,\gamma'(1),b_1,...,b_t))\otimes f(\gamma''(1))$$
$$= (-1)^{\epsilon'}(g\otimes f)(m_N(a_1,...,a_r,\gamma'(1),b_1,...,b_t))\otimes\gamma''(1)$$

où

$$\begin{aligned}\epsilon' =& r+t+N(1+|t_{d-1}f|+|t_{d-1}g|)\\ &+(|t_{d-1}g|+|b_1|...+|b_t|+|t_{d-1}f|)(|a_1|+...+|a_r|)\\ &+|f|(N+|a_1|+...+|a_r|+|b_1|+...+|b_t|)\\ &+(|\gamma'(1)|+|a_1|+...+|a_r|)(|b_1|+...|b_t|)+|t_{d-1}g|(|b_1|+...+|b_t|)\end{aligned}$$

Lemme 6.2.4. *On a*

$$m_N(a_1\otimes...\otimes a_r\otimes\gamma'(1)\otimes b_1\otimes...\otimes b_t)\otimes\gamma''(1)$$
$$= (-1)^{N(r+1)+(|\gamma'(1)|+|\gamma''(1)|)(|a_1|+...+|a_r|)+(|a_1|+...+|a_r|)(|a_{r+1}|+...+|a_{N-1}|)+N|\gamma'(1)|}$$
$$\gamma'(1)\otimes m_N(b_1\otimes...\otimes b_t\otimes\gamma''(1)\otimes a_1\otimes...\otimes a_r)$$

Démonstration. On note
$\tau_{(N-1),1}(a_1,...,a_N)$=(-1)$^{|a_N|(|a_{r+1}|+...+|a_{N-1}|)}(a_1,...,a_r,a_N,a_{r+1},...,a_{N-1})$
$\tau_{(r+1),(N-r-1)}(a_1,...,a_N)$=(-1)$^{(|a_1|+|a_2|+...+|a_r|+|a_{r+1}|)(|a_{r+2}|+...+|a_N|)}(a_{r+2},...,a_1,...a_r)$
On définit M'$_N$: $(a_1,...,a_N)\mapsto m_N\circ\,\tau_{(N-1),N}(a_1,...,a_N)$
et M_N'' : $(a_1,...,a_N)\mapsto m_N\circ\tau_{(r+1),(N-r-1)}(a_1,...,a_N)$

On a

$$
\begin{aligned}
&\beta \circ (id \otimes M'_N)(a_0 \otimes ... \otimes a_N) \\
&= (-1)^{|a_N|(|a_{r+1}|+...+|a_{N-1}|)} \beta \circ (id \otimes m_N)(a_1, ..., a_r, a_N, a_{r+1}, ..., a_{N-1}) \\
&= (-1)^{|a_N|(|a_{r+1}|+...+|a_{N-1}|)+N|a_0|} \beta(a_0, m_N(a_1, ..., a_r, a_N, a_{r+1}, ..., a_{N-1})) \\
&= (-1)^{|a_N|(|a_{r+1}|+...+|a_{N-1}|)+|a_0|(|a_1|+...+|a_N|)} \beta(m_N(a_1, ..., a_r, a_N, a_{r+1}, ..., a_{N-1}), a_0) \\
&= (-1)^{N(r+1)+|a_N|(|a_{r+1}|+...+|a_{N-1}|)+|a_0|(|a_1|+...+|a_N|)+(|a_{r+1}|+...+|a_{N-1}|+|a_0|)(|a_1|+...+|a_r|+|a_N|)} \\
&\beta(m_N(a_{r+1}, ..., a_{N-1}, a_0, a_1, ..., a_r), a_N) \\
&= (-1)^{N(r+1)+(|a_0|+|a_1|+...+|a_r|)(|a_{r+1}|+...+|a_{N-1}|)} \beta(m_N(a_{r+1}, ..., a_{N-1}, a_0, a_1, ..., a_r), a_N) \\
&= (-1)^{N(r+1)} \beta \circ (m_N \otimes id) \circ (\tau_{(r+1),(N-r-1)} \otimes id)(a_0 \otimes ... \otimes a_N) \\
&= (-1)^{N(r+1)} \beta \circ ({M_N}'' \otimes id)(a_0 \otimes ... \otimes a_N)
\end{aligned}
$$

donc

$$\beta \circ (id \otimes M'_N) = (-1)^{N(r+1)} \beta \circ ({M_N}'' \otimes id)$$

ce qui donne

$$
\begin{aligned}
&(\beta \otimes id) \circ (id^{\otimes 2} \otimes {M_N}'') \circ (id \otimes \gamma \otimes id^{\otimes (N-1)}) \\
&= (-1)^{N|\beta|} (id^{\otimes 2} \otimes {M_N}'') \circ (\beta \otimes id^{\otimes N}) \circ (id \otimes \gamma \otimes id^{\otimes (N-1)}) \\
&= (-1)^{N|\beta|} {M_N}''
\end{aligned}
$$

On a de plus

$$
\begin{aligned}
&(\beta \otimes id) \circ (id \otimes M'_N \otimes id) \circ (id^{\otimes N} \otimes \gamma) \\
&= (-1)^{N(r+1)} (\beta \otimes id) \circ ({M_N}'' \otimes id^{\otimes 2}) \circ (id^{\otimes N} \otimes \gamma) \\
&= (-1)^{N(r+1)+N|\gamma|} (\beta \otimes id) \circ (id \otimes \gamma) \circ (M'_N) \\
&= (-1)^{N(r+1)+N|\gamma|} {M_N}''
\end{aligned}
$$

Finalement, puisque β est non dégénérée, on a

$$(M'_N \otimes id) \circ (id^{\otimes(N-1)} \otimes \gamma) = (-1)^{N(r+1)}(id \otimes M_N{}'') \circ (\gamma \otimes id^{\otimes(N-1)})$$

En appliquant à $a_1 \otimes ... \otimes a_r \otimes b_1 \otimes ... \otimes b_t \otimes 1 = a_1 \otimes ... \otimes a_r \otimes 1 \otimes b_1 \otimes ... \otimes b_t$, on a

$$\begin{aligned}
&(-1)^{|\gamma|(|a_1|+...+|a_r|+|b_1|+...+|b_t|)+|\gamma'(1)|(|b_1|+...+|b_t|)} \\
&m_N(a_1 \otimes ... \otimes a_r \otimes \gamma'(1) \otimes b_1 \otimes ... \otimes b_t) \otimes \gamma''(1) \\
&= (-1)^{N(r+1)+(|\gamma''(1)|+|a_1|+...+|a_r|)(|b_1|+...+|b_t|)+N|\gamma'(1)|} \\
&\gamma'(1) \otimes m_N(b_1 \otimes ... \otimes b_t \otimes \gamma''(1) \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_r)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&m_N(a_1 \otimes ... \otimes a_r \otimes \gamma'(1) \otimes b_1 \otimes ... \otimes b_t) \otimes \gamma''(1) \\
&= (-1)^{N(r+1)+(|\gamma'(1)|+|\gamma''(1)|)(|a_1|+...+|a_r|)+(|a_1|+...+|a_r|)(|b_1|+...+|b_t|)+N|\gamma'(1)|} \\
&\gamma'(1) \otimes m_N(b_1 \otimes ... \otimes b_t \otimes \gamma''(1) \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_r)
\end{aligned}$$

□

On a alors

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\epsilon'}(g \otimes f)(m_N(a_1, ..., a_r, \gamma'(1), b_1, ..., b_t)) \otimes \gamma''(1) \\
&= (-1)^{\epsilon'+N(r+1)+(|\gamma'(1)|+|\gamma''(1)|)(|a_1|+...+|a_r|)+(|a_1|+...+|a_r|)(|b_1|+...+|b_t|)+N|\gamma'(1)|} \\
&(g \otimes f)(\gamma'(1) \otimes m_N(b_1 \otimes ... \otimes b_t \otimes \gamma''(1) \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_r)) \\
&= (-1)^{\epsilon''}(g \otimes f)(\gamma'(1) \otimes m_N(b_1 \otimes ... \otimes b_t \otimes \gamma''(1) \otimes a_1 \otimes ... \otimes a_r))
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\epsilon'' =& r + t + N(r + |t_{d-1}f + |t_{d-1}g|) + |\gamma'(1)|(N + (|b_1| + ...|b_t|)) \\ &+ (|t_{d-1}g| + |b_1|... + |b_t| + |t_{d-1}f|)(|a_1| + ... + |a_r|) \\ &+ |f|(N + |a_1| + ... + |a_r| + |b_1| + ... + |b_t|) \\ &+ |t_{d-1}g|(|b_1| + ... + |b_t|) + (|\gamma'(1)| + |\gamma''(1)|)(|a_1| + ... + |a_r|)\end{aligned}$$

L'identité que nous voulons démontrer s'écrit donc

$$\begin{aligned}&(-1)^{\epsilon}(g \otimes f)(\gamma'(1) \otimes m_N(b_1, ..., b_t, \gamma''(1), a_1, ..., a_r)) \\ &+ (-1)^{\epsilon''}(g \otimes f)(\gamma'(1) \otimes m_N(b_1, ..., b_t, \gamma''(1), a_1, ..., a_r)) = 0\end{aligned}$$

Il nous faut alors vérifier que $\epsilon + \epsilon'' = 1[2]$.

On a, modulo 2,

$$\begin{aligned}\epsilon+\epsilon'' =&(N+|a_1|+...+|a_r|+|b_1|+...+|b_t|)|\gamma'(1)|+N(t+1)\\
&+(|\gamma''(1)|+|b_1|+...+|b_t|)(|a_1|+...|a_r|)+|t_{d-1}f|(N+|a_1|+...+|a_r|)\\
&+r+t+N(r+|t_{d-1}f+|t_{d-1}g|)+|\gamma'(1)|(N+(|b_1|+...|b_t|))\\
&+(|t_{d-1}g|+|b_1|...+|b_t|+|t_{d-1}f|)(|a_1|+...+|a_r|)\\
&+|f|(N+|a_1|+...+|a_r|+|b_1|+...+|b_t|)\\
&+|t_{d-1}g|(|b_1|+...+|b_t|)+(|\gamma'(1)|+|\gamma''(1)|)(|a_1|+...+|a_r|)\\
&=r+t+N(t+1+|t_{d-1}f|+|f|+r+|t_{d-1}f|+|t_{d-1}g|)\\
&+(|a_1|+...+|a_r|)(|b_1|+...+|b_t|)+|t_{d-1}f|(|a_1|+...+|a_r|)\\
&+(|t_{d-1}g|+|b_1|...+|b_t|+|t_{d-1}f|)(|a_1|+...+|a_r|)\\
&+|f|(|a_1|+...+|a_r|+|b_1|+...+|b_t|)+|t_{d-1}g|(|b_1|+...+|b_t|)\\
&=r+t+N(t+1+|f|+r+|g|+d-1)+|t_{d-1}f|(|a_1|+...+|a_r|)\\
&+(|t_{d-1}g|+|t_{d-1}f|)(|a_1|+...+|a_r|)\\
&+|f|(|a_1|+...+|a_r|+|b_1|+...+|b_t|)+|t_{d-1}g|(|b_1|+...+|b_t|)\\
&=N-1+N(t+1+r)+N(|f|+|g|+d-1)\\
&+(|f|+|g|+d-1)(|a_1|+...+|a_r|+|b_1|+...+|b_t|)\\
&=-1+N(N-1)\\
&+(|f|+|g|+d-1)(N+|a_1|+...+|a_r|+|b_1|+...+|b_t|)\end{aligned}$$

Or N(N-1) est pair et on a

$$|g|+1+|f|+N+|a_1|+...+|a_r|+|b_1|+...+|b_t|=d-1$$

donc

$$(|f|+|g|+d-1)(N+|a_1|+...+|a_r|+|b_1|+...+|b_t|)$$

est également pair et on conclut que $\epsilon+\epsilon''=1[2]$.
SI(N) est donc vérifiée dans le cas où $|\bar{i}|$=2.

Si $|\bar{i}| \geq 3$, il suffit d'appliquer l'identité, pour $i+1 \leq j$, à

$$a_1, ...a_i, t_{d-1}f, a_{i+1}, ..., a_j, t_{d-1}g, a_{j+1}, ..., a_{N-2}, t_{d-1}h$$

.

Lorsque M_1 n'apparaît pas dans l'identité, il suffit alors d'utiliser que

$$M_{n|A^{\otimes i}\otimes(A^*[d-1])^{\otimes k}\otimes A^{\otimes j}} = 0 \; \forall n \geq 2, \; \forall i, j, k \; tels \; que \; i+j+k = n, \; k \geq 2$$

Si M_1 apparaît et ne prend ni $t_{d-1}f$, ni $t_{d-1}g$ en argument, on fait de même. Si M_1 apparaît et prend $t_{d-1}f$ ou $t_{d-1}g$ en argument, on utilise le fait que $\zeta_A(A^*,A^*)=0$. $\square$

Bibliographie

[1] Lowell Abrams, *Two-dimensional topological quantum field theories and Frobenius algebras*, J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), no. 5, 569–587, DOI 10.1142/S0218216596000333. MR1414088 ↑20

[2] William Crawley-Boevey, Pavel Etingof, and Victor Ginzburg, *Noncommutative geometry and quiver algebras*, Adv. Math. **209** (2007), no. 1, 274–336, DOI 10.1016/j.aim.2006.05.004. MR2294224 ↑2

[3] David Fernández and Estanislao Herscovich, *Double quasi-Poisson algebras are pre-Calabi-Yau*, 35 pp., available at `https://arxiv.org/abs/2002.10495`. Accepté pour publication à Internat. Math. Res. Notices. ↑48

[4] M. E. Goncharov and P. S. Kolesnikov, *Simple finite-dimensional double algebras*, J. Algebra **500** (2018), 425–438, DOI 10.1016/j.jalgebra.2017.04.020. MR3765463 ↑32, 37

[5] Joachim Kock, *Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories*, London Mathematical Society Student Texts, vol. 59, Cambridge University Press, Cambridge, 2004. MR2037238 ↑20

[6] Paul Seidel, *Fukaya A_∞-structures associated to Lefschetz fibrations. I*, J. Symplectic Geom. **10** (2012), no. 3, 325–388. MR2983434 ↑3

[7] ———, *Fukaya A_∞-structures associated to Lefschetz fibrations. II*, Algebra, geometry, and physics in the 21st century, Progr. Math., vol. 324, Birkhäuser/Springer, Cham, 2017, pp. 295–364. MR3727564 ↑3

[8] Dmytro Shklyarov, *Hirzebruch-Riemann-Roch theorem for differential graded algebras*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2009. Thesis (Ph.D.)–Kansas State University. MR2713434 ↑54

[9] Thomas Tradler and Mahmoud Zeinalian, *Algebraic string operations*, K-Theory **38** (2007), no. 1, 59–82, DOI 10.1007/s10977-007-9005-2. MR2353864 ↑3

[10] Michel Van den Bergh, *Double Poisson algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), no. 11, 5711–5769, DOI 10.1090/S0002-9947-08-04518-2. MR2425689 ↑2

[11] Micheline Vigué, *Homologie de Hochschild, homologie cyclique*, Curso y seminarios de mathematica, vol. 40, Universidad de Buenos Aires, 2011. ↑44

[12] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. MR1269324 ↑45