A_∞-structure sur la cogèbre $Tor_\bullet^A(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ d'une algèbre monômiale

Enzo Sérandon

Mémoire de M2 réalisé sous la direction de M. Estanislao Herscovich

Contents

Introduction

La théorie des A_∞-algèbres, développée initialement par J. Stasheff dans son article *Homotopy associativity of H-spaces* au début des années 60, trouve ses origines dans la topologie algébrique, domaine auquel elle sera plus ou moins cantonnée jusque dans les années 90. Un exemple particulièrement simple où cette notion s'est révélée pertinente est l'étude homotopique des espaces de lacets. Néanmoins, certains travaux de Stasheff et de ses successeurs laissent déjà entrevoir une ouverture vers d'autres domaines des mathématiques, c'est le cas par exemple de la thèse d'A. Prouté, **[P]**, qui met en évidence une relation étroite entre A_∞-(co)algèbres et les constructions $\mathcal{B}ar$ et $\mathcal{C}obar$, constructions d'inspiration topologiques mais centrales en algèbre homologique. Le tournant pour cette notion se situe au début des années 90, quand la pertinence de cette notion se fait de plus en plus manifeste dans diverses branches de l'algèbre, de la géométrie ou encore de la physique mathématique. Parmis ses avocats les plus notoires citons M. Kontsevich dont la conjecture de la symétrie miroir homologique fait intervenir en bonne place les A_∞-structures. Depuis lors, cette notion à connu divers développements, notamment, et c'est ceux-ci qui nous intéressent dans ce mémoire, en algèbre homologique, sous l'impulsion, en particulier, de B. Keller.

Pour résumer brièvement le contenu de ce mémoire, présentons rapidement de quoi il s'agit : une A_∞-algèbre est un objet un peu plus général qu'une algèbre différentielle graduée en cela qu'on affaiblit l'axiome d'associativité du produit en ne demandant, non plus qu'on ait $\mu_A \circ (\mu_A \otimes 1_A) = \mu_A \circ (1_A \otimes \mu_A)$, mais seulement que ces deux termes soient homotopes en un sens fort décrit dans la partie **3**. On trouve d'ailleurs quelques fois dans la littérature la terminologie *sha*-algèbres pour désigner les A_∞-algèbres (pour *strongly homotopically associative*, fortement homotopiquement associative). Pour se faire une idée intuitive et illustrée de la notion d'A_∞-algèbre, je conseille la lecture des premières pages de l'introduction de **[P]**. Un théorème de Kadeishvili (théorème **3.5**) nous assure qu'on peut munir l'homologie $H(A)$ d'une $\mathbf{K}$-algèbre différentielle graduée A d'une structure d'A_∞-algèbre. Parallèlement, on peut naïvement mais légitimement se demander si, étant donné l'homologie d'un certain complexe M de modules sur une $\mathbf{K}$-algèbre graduée, on peut reconstruire M à quasi-isomorphisme près. Comme dans le cas général la réponse à cette question est négative, on se demande alors quelle structure mettre sur $H(M)$ pour y répondre. Une réponse nous est donnée par un théorème annoncé par Keller (théorème **3.6**), et c'est précisément une structure d'A_∞-algèbre particulière, unique à A_∞-isomorphisme près.

L'objectif de ce mémoire est de calculer pour quelques exemples $A_1, A_2, \ldots$ pris dans une classe de **K**-algèbres différentielles graduées particulières (les **K**-algèbres monômiales), les A_∞-structures dont on doit munir leurs algèbres de Yoneda (ou plus précisément leurs duals) pour reconstituer, à quasi-isomorphismes près, une résolution projective minimale de **K** comme A_i-module. Ces structures sont précisément celles données par le théorème **3.6** mais cette condition est en revanche plus aisée à vérifier. Les résultats de ces calculs sont exposés dans la partie **4**. La première partie est consacrée à la présentation des (co)algèbres différentielles graduées et aux constructions classiques qui leurs sont associées, tandis que la partie **3** est consacrée à leurs généralisations, les A_∞-(co)algèbres, et aux résultats principaux les concernant. La seconde partie quant à elle a pour objectif la mise en place d'une méthode pour calculer explicitement l'algèbre de Yoneda d'une algèbre monômiale. Cette entreprise culmine avec un théorème de Bardzell (théorème **2.2**).

Enfin, je tiens à remercier mon directeur de stage, E. Herscovich, avec qui j'ai eu plaisir à travailler sur ce sujet.

1 Algèbres et cogèbres différentielles graduées

Cette première partie présente les objets de base de ce mémoire. On s'appuiera essentiellement sur les deux premiers chapitres de **[P]**, dans lesquels pourront être trouvées toutes les démonstrations des résultats donnés ici sans leurs preuves. Néanmoins nous n'adoptons pas les mêmes conventions de signes pour être cohérent avec les articles étudiés les plus récents.

1.1 Modules gradués sur un anneau

Soit Λ un anneau commutatif unitaire.

Définition 1.1. *On appelle Λ-module $\mathbb{Z}$-gradué (ou simplement Λ-module gradué) un Λ-module $M_\bullet$ muni d'une famille de sous-modules $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de $M_\bullet$, tels que:*

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} M_n = M_\bullet$$

Un élément $x \in M_n$ est dit homogène de degré n, ce qu'on note $|x| = n$.
On confondra dans la suite $M_\bullet$ et M, son A-module sous-jacent.

Définition 1.2. *Un Λ-module gradué est dit gradué positivement (respectivement négativement) si $M_p = 0$ pour tout $p < 0$ (respectivement $p > 0$). Il est dit borné si la famille des p tels que $M_p \neq 0$ est bornée.*

Définition 1.3. *Soient M et N deux Λ-modules gradués. Un morphisme homogène de degré p est une application Λ-linéaire :*

$$f : M \longrightarrow N \text{ telle que } f(M_n) \subset N_{n+p}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

On écrira alors $|f| = p$.

Pour un Λ-module gradué M, on notera 1 ou 1_M l'identité de M. Remarquons que $|1_M| = 0$.

On note $mod_{gr}(\Lambda)$ la catégorie des Λ-modules gradués dont les flèches sont les morphismes homogènes de degré 0. C'est une catégorie abélienne qui admet des limites et des colimites arbitraires. On a des foncteurs

$$(\cdot)[p] : mod_{gr}(\Lambda) \longrightarrow mod_{gr}(\Lambda)$$

définis par $(M[p])_n = M_{n+p}$, pour tout p dans $\mathbb{Z}$. On dit que $M[1]$ est *la suspension* de M et $(\cdot)[1]$ sera parfois noté S dans la suite. On notera s l'isomorphisme canonique $M \simeq M[1]$.

On munit Λ d'une structure de Λ-module gradué $\Lambda_\bullet$ en posant $\Lambda_0 = \Lambda$ et $\Lambda_n = 0$ pour $n \neq 0$.

1.2 Produit tensoriel et $\mathcal{H}om$ interne de modules gradués

Définition 1.4. *Soient M et N deux Λ-modules gradués. On munit $M \otimes_\Lambda N$ d'une structure de Λ-module gradué en posant :*

$$(M \otimes_\Lambda N)_n = \bigoplus_{p+q=n} (M_p \otimes_\Lambda N_q).$$

On adoptera dans la suite les *conventions de signes de Koszul*:
Pour deux morphismes homogènes $f : M \longrightarrow M'$ et $g : N \longrightarrow N'$, on définit :

$$f \otimes g : M \otimes_\Lambda N \longrightarrow M' \otimes_\Lambda N'$$

en posant:

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|} f(x) \otimes g(y)$$

On note $T : M \otimes_\Lambda N \longrightarrow N \otimes_\Lambda M$ l'application définie par :

$$T(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x$$

Définition 1.5. *Soient M et N deux Λ-modules gradués. On désigne par $\mathcal{H}om(M, N)$ le Λ-module gradué défini par :*

$$\mathcal{H}om(M, N)_n = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} Hom_\Lambda(M_p, N_{n+p})$$

Autrement dit, les éléments de degré n de $\mathcal{H}om(M, N)$ sont les morphismes homogènes de degré n de M dans N. Remarquons que $\mathcal{H}om(M, N)$ ne contient en général pas toutes les applications Λ-linéaires de M dans N (*i.e.* $Hom_\Lambda(M, N)$), celles-ci n'étant pas nécessairement des sommes finies de morphismes homogènes.

Les *conventions de signes de Koszul* pour $\mathcal{H}om(\cdot, \cdot)$ sont les suivantes : pour deux morphismes homogènes $f : M \longrightarrow M'$ et $g : N \longrightarrow N'$, on définit :

$$f^* : \mathcal{H}om(M', N) \longrightarrow \mathcal{H}om(M, N)$$
$$g_* : \mathcal{H}om(M', N) \longrightarrow \mathcal{H}om(M', N')$$

en posant:

$$f^*(\alpha) = (-1)^{|\alpha||f|} \alpha \circ f$$
$$g_*(\alpha) = g \circ \alpha$$

Notons que lorsque la composée $g \circ f$ est définie, on a :

$$(g \circ f)^* = (-1)^{|f||g|} f^* \circ g^*$$
$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$$

On définit le dual d'un Λ-module gradué M comme le Λ-module gradué $\mathcal{H}om(M, \Lambda)$, et on le notera $M^\#$. Si M est gradué positivement, $M^\#$ est gradué négativement, et vice versa.

1.3 Differentielles et augmentations sur les modules gradués

Définition 1.6. *Soit M un Λ-module gradué. Une différentielle sur M est un morphisme homogène*

$$\partial_M : M \longrightarrow M \text{ tel que } |\partial_M| = 1 \text{ et } \partial_M \circ \partial_M = 0$$

Un Λ-module gradué muni d'une différentielle est appelé un Λ-*module différentiel gradué* ou *DG-module.* Remarquons qu'un DG-module $(M_\bullet, \partial_M)$ peut être vu comme un un complexe de Λ-modules

$$\cdots \xrightarrow{\partial_M^{-3}} M_{-2} \xrightarrow{\partial_M^{-2}} M_{-1} \xrightarrow{\partial_M^{-1}} M_0 \xrightarrow{\partial_M^{0}} M_1 \xrightarrow{\partial_M^{1}} M_2 \xrightarrow{\partial_M^{2}} \cdots$$

et vice versa.

Définition 1.7. *Un morphisme de DG-modules $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme homogène vérifiant :*

$$\partial_N \circ f = (-1)^{|f|} f \circ \partial_M.$$

Définition 1.8. *Soit M un DG-module sur l'anneau Λ. Une augmentation (respectivement coaugmentation) de M est un morphisme de DG-modules*

$$\epsilon_M : M \longrightarrow \Lambda \text{ avec } |\epsilon_M| = 0.$$

$$(\text{respectivement } \eta_M : \Lambda \longrightarrow M \text{ avec } |\eta_M| = 0).$$

Si M est muni d'une augmentation ou d'une coaugmentation, on notera $M_+ = ker(\epsilon_M)$ son *idéal d'augmentation* et $M^+ = coker(\eta_M)$ son *idéal de coaugmentation.*

Définition 1.9. *Un Λ-module différentiel gradué augmenté, ou DGA-module, est un DG-module M, muni d'une augmentation ϵ_M et d'une coaugmentation η_M vérifiant :*

$$\epsilon_M \circ \eta_M = 1_\Lambda$$

Définition 1.10. *Un morphisme de DGA-module $f : M \longrightarrow N$ est un morphisme de DG-module vérifiant :*

$$\epsilon_N \circ f = \epsilon_M \text{ et } f \circ \eta_M = \eta_N$$

Si $(M, \partial_M, \epsilon_M, \eta_M)$ et $(N, \partial_N, \epsilon_N, \eta_N)$ sont des DGA-modules, on peut munir $M \otimes_\Lambda N$ et $\mathcal{H}om(M, N)$ de structures naturelles de DGA-modules en posant :

$$\partial_{M\otimes N} = \partial_M \otimes 1 + 1 \otimes \partial_N, \epsilon_{M\otimes N} = \epsilon_M \otimes \epsilon_N, \eta_{M\otimes N} = \eta_M \otimes \eta_N$$

et

$$\partial_{\mathcal{H}} = \partial_{M*} - \partial_N^*, \epsilon_{\mathcal{H}} = \epsilon_{N*} \circ \eta_M^*, \eta_{\mathcal{H}} = \eta_{N*} \circ \epsilon_M^*$$

Définition 1.11. *On dira qu'un DGA-module gradué positivement M est :*

1. *connexe si $\epsilon_{|M_0} : M_0 \xrightarrow{\sim} \Lambda$,*
2. *simplement connexe si $\epsilon_{|M_0} : M_0 \xrightarrow{\sim} \Lambda$ et $M_1 = 0$.*

1.4 Homologie d'un module différentiel gradué

Définition 1.12. *Soit $M_\bullet$ un DG-module. On définit son homologie, $H_\bullet(M)$, comme le module gradué :*

$$H_\bullet(M) = Ker(\partial_M(M_\bullet))/Im(\partial_M(M_{\bullet-1})).$$

Proposition 1.1. *Si*

$$0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$$

est une suite exacte courte de DG-modules avec f et g homogènes, alors on a une suite exacte longue en homologie de modules gradués :

$$\begin{tikzcd} H_\bullet(M_1) \arrow[rr, "f_*"] & & H_\bullet(M_2) \arrow[dl, "g_*"] \\ & H_\bullet(M_3) \arrow[ul, "\delta_*"] & \end{tikzcd}$$

Définition 1.13. *Soient M, N deux DG-modules et $f, g : M \longrightarrow N$ deux morphismes de DG-modules de même degré. Une homotopie de f à g est une application*

$$h : M \longrightarrow N$$

telle que

$$|h| = |f| + 1 \text{ et } g - f = \partial_N \circ h - (-1)^{|h|} h \circ \partial_M.$$

S'il existe une homotopie de f à g, on dit que f et g sont homotopes, ce qu'on note $f \sim_h g$.

On dit que $f : M \longrightarrow N$ est une *équivalence d'homotopie* s'il existe $g : N \longrightarrow M$ telle que $g \circ f \sim_h 1_M$ et $f \circ g \sim_h 1_N$.

Si $f : M \longrightarrow N$ induit un isomorphisme $H_\bullet(M) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(N)$, on dit que c'est un *quasi-isomorphisme*.

Définition 1.14. *On dira qu'un DGA-module gradué M est :*

1. *acyclique si $H_\bullet(M) = 0$,*
2. *contractile si $\epsilon_M : M \longrightarrow \Lambda$ est une équivalence d'homotopie.*

1.5 Algèbres et cogèbres différentielles graduées

Définition 1.15. *Une algèbre différentielle graduée associative, ou DGA-algèbre associative, est un DGA-module $(A, \partial_A, \epsilon_A, \eta_A)$, muni d'un morphisme de DGA-modules $\mu_A : A \otimes_\Lambda A \longrightarrow A$ tel que les diagrammes*

1. *(Associativité)*
$$\begin{tikzcd} A \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda A \arrow[r, "1_A \otimes \mu_A"] \arrow[d, "\mu_A \otimes 1_A"'] & A \otimes_\Lambda A \arrow[d, "\mu_A"] \\ A \otimes_\Lambda A \arrow[r, "\mu_A"'] & A \end{tikzcd}$$

2. *(Unitarité)*
$$\begin{tikzcd} \Lambda \otimes_\Lambda A \arrow[r, "\eta_A \otimes 1_A"] \arrow[dr, "\simeq"'] & A \otimes_\Lambda A \arrow[d, "\mu_A"] & A \otimes_\Lambda \Lambda \arrow[l, "1_A \otimes \eta_A"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

commutent.

A est dite commutative *si de plus :*

$$\begin{tikzcd} A \otimes_\Lambda A \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\mu_A"'] & & A \otimes_\Lambda A \arrow[dl, "\mu_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

commute.

On dit alors que μ_A est le produit sur A et η_A l'unité de A. L'opérateur μ_A sera parfois simplement noté . dans la suite.

Un morphisme de DGA-algèbres $f : A \longrightarrow A'$ est un morphisme de DGA-modules qui fait commuter :

$$\begin{tikzcd} A \otimes_\Lambda A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & A' \otimes_\Lambda A' \arrow[d, "\mu_{A'}"] \\ A \arrow[r, "f"'] & A' \end{tikzcd}$$

Pour deux DGA-Λ-algèbres A et A', on définit une structure de DGA-Λ-algèbre sur $A \otimes_\Lambda A'$ en définissant le produit sur $A \otimes_\Lambda A'$ comme le morphisme faisant commuter :

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes_\Lambda A') \otimes_\Lambda (A \otimes_\Lambda A') \arrow[rr, "\mu_{A\otimes_\Lambda A'}"] \arrow[dr, "1_A \otimes T \otimes 1_{A'}"'] & & A \otimes_\Lambda A' \\
& A \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda A' \otimes_\Lambda A' \arrow[ur, "\mu_A \otimes \mu_{A'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Définition 1.16. *Une dérivation d sur une DGA-Λ-algèbre A est une application Λ-linéaire homogène de degré 1 qui satisfait la règle de Leibniz graduée:*

$$d(a.b) = d(a).b + (-1)^{|a|}a.d(b) \qquad \forall a, b \in A.$$

Un DGA-A-module à gauche sur une DGA-Λ-algèbre A est un DGA-Λ-module M muni d'une A-action à gauche :

$$e_M : A \otimes_\Lambda M \longrightarrow M$$

compatible avec le produit μ_A et l'unité η_A de A, dans le sens où :

1. Le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}
& A \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda M \arrow[dl, "\mu_A \otimes 1_M"'] \arrow[dr, "1_A \otimes e_M"] & \\
A \otimes_\Lambda M \arrow[dr, "e_M"'] & & A \otimes_\Lambda M \arrow[dl, "e_M"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

2. La composée $M \xrightarrow{\sim} \Lambda \otimes_\Lambda M \xrightarrow{\eta_A \otimes 1_M} A \otimes_\Lambda M \xrightarrow{e_M} M$ est l'identité de M.

On définit de manière analogue les DGA-A-modules à droite.

On définit maintenant les notions duales de cogèbre différentielle graduée coassociative et de DGA-comodule sur une DGA-cogèbre, en inversant le sens des flèches dans les diagrammes précédents.

Définition 1.17. *Une cogèbre différentielle graduée coassociative, ou DGA-cogèbre coassociative, est un DGA-module $(C, \partial_C, \epsilon_C, \eta_C)$, muni d'un morphisme de DGA-modules $\Delta_C : C \longrightarrow C \otimes_\Lambda C$ tel que les diagrammes*

1. *(Coassociativité)*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & C \otimes_\Lambda C \arrow[d, "\Delta_C \otimes 1_C"] \\
C \otimes_\Lambda C \arrow[r, "1_C \otimes \Delta_C"'] & C \otimes_\Lambda C \otimes_\Lambda C
\end{tikzcd}$$

2. (Counitarité)

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \otimes_\Lambda C & C \otimes_\Lambda C \arrow[l, "\epsilon_C \otimes 1_C"'] \arrow[r, "1_C \otimes \epsilon_C"] & C \otimes_\Lambda \Lambda \\
& C \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[u, "\Delta_C"] \arrow[ur, "\simeq"'] &
\end{tikzcd}$$

commutent.

C est dite commutative *si de plus :*

$$\begin{tikzcd}
C \otimes_\Lambda C \arrow[rr, "T"] & & C \otimes_\Lambda C \\
& C \arrow[ul, "\Delta_C"] \arrow[ur, "\Delta_C"'] &
\end{tikzcd}$$

commute.

On dit alors que Δ_C est le coproduit sur C et ϵ_C la counité de C. Pour $c \in C$, on notera $\Delta_C(c) = c_{(1)} \otimes c_{(2)}$ l'action de Δ_C sur c.

Un morphisme de DGA-cogèbres $f : C \longrightarrow C'$ est un morphisme de DGA-modules qui fait commuter :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & C' \arrow[d, "\Delta_{C'}"] \\
C \otimes_\Lambda C \arrow[r, "f \otimes f"'] & C' \otimes_\Lambda C'
\end{tikzcd}$$

Pour deux DGA-Λ-cogèbres C et C', on définit une structure de DGA-Λ-cogèbre sur $C \otimes_\Lambda C'$ en définissant le coproduit sur $C \otimes_\Lambda C'$ comme le morphisme faisant commuter :

$$\begin{tikzcd}
C \otimes_\Lambda C' \arrow[rr, "\Delta_{C \otimes_\Lambda C'}"] \arrow[dr, "\Delta_C \otimes \Delta_{C'}"'] & & (C \otimes_\Lambda C') \otimes_\Lambda (C \otimes_\Lambda C') \\
& C \otimes_\Lambda C \otimes_\Lambda C' \otimes_\Lambda C' \arrow[ur, "1_C \otimes T \otimes 1_{C'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Définition 1.18. *Une codérivation b sur une DGA-Λ-cogèbre C est une application Λ-linéaire homogène de degré 1 qui satisfait la co-règle de Leibniz graduée:*

$$\Delta_C \circ b(c) = b(c_{(1)}) \otimes c_{(2)} + (-1)^{|c_{(1)}|} c_{(1)} \otimes b(c_{(2)}) \qquad \forall c \in C.$$

Un DGA-C-comodule à gauche sur une DGA-Λ-cogèbre C est un DGA-Λ-module M muni d'une C-coaction à gauche:

$$\ni_M : M \longrightarrow C \otimes_\Lambda M$$

compatible avec le coproduit Δ_C et la counité ϵ_C de C, dans le sens où :

1. Le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\ni_M"'] \arrow[dr, "\ni_M"] & \\ C \otimes_\Lambda M \arrow[dr, "\Delta_C \otimes 1_M"'] & & C \otimes_\Lambda M \arrow[dl, "1_C \otimes \ni_M"] \\ & C \otimes_\Lambda C \otimes_\Lambda M & \end{tikzcd}$$

2. La composée $M \xrightarrow{\ni_M} C \otimes_\Lambda M \xrightarrow{\epsilon_C \otimes 1_M} \Lambda \otimes_\Lambda M \xrightarrow{\sim} M$ est l'identité de M.

On définit de manière analogue les DGA-C-comodules à droite.

1.6 Algèbre tensorielle d'un module

Soit V un Λ-module. On définit le *module tensorielle de* V par :

$$T(V) = \bigoplus_{i \geq 0} V^{\otimes i}$$

où $V^{\otimes 0} = \Lambda$ et $V^{\otimes i} = V \otimes_\Lambda V \otimes_\Lambda \cdots \otimes_\Lambda V$ est le produit tensoriel de i copies de V pour $i > 0$. $T(V)$ a une structure naturelle de Λ-module gradué où la graduation est donnée par les $V^{\otimes i}$. Les morphismes naturels :

$$\epsilon : T(V) \longrightarrow \Lambda$$

$$\eta : \Lambda \longrightarrow T(V)$$

constituent une augmentation et une coaugmentation sur $T(V)$.

Les isomorphismes canoniques sur les facteurs directs:

$$V^{\otimes i} \otimes_\Lambda V^{\otimes j} \xrightarrow{\sim} V^{\otimes (i+j)}$$

induisent un produit d'algèbre μ sur $T(V)$, faisant de $(T(V), \mu, \eta)$ une algèbre graduée augmentée.

On peut également munir $T(V)$ d'une structure de cogèbre graduée augmentée en définissant un coproduit $\Delta : T(V) \longrightarrow T(V) \otimes_\Lambda T(V)$ par:

$$\Delta(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \sum_{i=0}^{n} (v_1 \otimes \cdots \otimes v_i) \otimes (v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n).$$

La *cogèbre tensorielle de* V, $(T(V), \Delta, \epsilon)$, sera notée $T^c(V)$.

Notons que μ et Δ ne font a priori pas de $T(V)$ une algèbre de Hopf.

L'algèbre tensorielle $T(V)$ est caractérisée à unique isomorphisme près par la propriété universelle suivante :

Pour toute Λ-algèbre unitaire associative A, pour toute application Λ-linéaire $f : V \longrightarrow A$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\tilde{f} : T(V) \longrightarrow A$ qui prolonge f à $T(V)$, *i.e.* le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & T(V) \arrow[d, dotted, "\exists ! \tilde{f}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Et on a le résultat dual :

Pour toute Λ-cogèbre unitaire coassociative C, pour toute application Λ-linéaire $f : C \longrightarrow V$, il existe un unique morphisme de cogèbres $\tilde{f} : C \longrightarrow T^c(V)$ qui relève f sur $T^c(V)$, *i.e.* le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd} V & T^c(V) \arrow[l, "\pi"'] \\ & C \arrow[ul, "f"] \arrow[u, dotted, "\exists ! \tilde{f}"'] \end{tikzcd}$$

Lemme 1.1. *Soit V un Λ-module gradué, $T(V)$ son algèbre tensorielle et*

$$\delta : V \longrightarrow T(V)$$

un morphisme Λ-linéaire de degré 1. Alors il existe une unique dérivation

$$d : T(V) \longrightarrow T(V)$$

compatible avec le produit d'algèbre sur $T(V)$ et qui prolonge δ.

Soit V un Λ-module gradué, $T^c(V)$ sa cogèbre tensorielle et

$$6 : T^c(V) \longrightarrow V$$

un morphisme Λ-linéaire de degré 1. Alors il existe une unique codérivation

$$b : T^c(V) \longrightarrow T^c(V)$$

compatible avec le coproduit sur $T^c(V)$ et qui relève 6.

1.7 Produit tensoriel tordu

Soient A une DGA-Λ-algèbre et C une DGA-Λ-cogèbre.

Le *cup produit* $\cdot \smile \cdot : \mathcal{H}om(C, A) \otimes_\Lambda \mathcal{H}om(C, A) \longrightarrow \mathcal{H}om(C, A)$, défini par la composée

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[rrr, bend right, "\alpha\smile\beta"'] & C \otimes_\Lambda C \arrow[r, "\alpha\otimes\beta"] & A \otimes_\Lambda A \arrow[r, "\mu_A"] & A \end{tikzcd}$$

est un produit d'algèbre sur le DGA-module $\mathcal{H}om(C, A)$.

Définition 1.19. *On appel cochaîne tordante (ou cochaîne de Brown) un élément $\tau \in \mathcal{H}om(C, A)$ de degré 1 qui satisfait l'équation de Maurer-Cartan :*

$$\partial_A \circ \tau + \tau \circ \partial_C + \tau \smile \tau = 0.$$

Soit M un DGA-C-comodule à droite, N un DGA-A-module à gauche, de (co)actions respectives $\ni_M$ et e_N, et $\tau : C \longrightarrow A$ une cochaîne tordante.

On définit ∂_τ, la *différentielle tordue* le long de τ comme la somme de la différentielle sur $M \otimes_\Lambda N$ (comme DGA-Λ-module) et de la composée :

$$M \otimes_\Lambda N \xrightarrow{\ni_M \otimes 1_N} M \otimes_\Lambda C \otimes_\Lambda N \xrightarrow{1_M \otimes \tau \otimes 1_N} M \otimes_\Lambda A \otimes_\Lambda N \xrightarrow{1_M \otimes e_N} M \otimes_\Lambda N.$$

Lemme 1.2. *∂_τ est une différentielle sur le Λ-module gradué $M \otimes_\Lambda N$.*

On dit que le DGA-module $(M \otimes_\Lambda N, \partial_\tau, \epsilon_N \otimes \epsilon_M, \eta_N \otimes \eta_M)$ est le *produit tensoriel tordu* de M et N le long de τ, et on le note $M \otimes_\tau N$.

Lemme 1.3. *Soient*

$\tau : C \longrightarrow A$ *une cochaîne tordante*
$\phi : A \longrightarrow A'$ *un morphisme de DGA-algèbres*
$\psi : C' \longrightarrow C$ *un morphisme de DGA-cogèbres*

Alors

$$\begin{array}{c} \phi \circ \tau : C \longrightarrow A' \\ \tau \circ \psi : C' \longrightarrow A \end{array}$$

sont des cochaînes tordantes.

De plus, les flèches

$$\begin{array}{c} 1_C \otimes \phi : C \otimes_\tau A \longrightarrow C \otimes_{\phi\circ\tau} A' \\ \psi \otimes 1_A : C' \otimes_{\tau\circ\psi} A \longrightarrow C \otimes_\tau A \end{array}$$

sont des morphismes de DGA-modules.

1.8 Constructions $\mathcal{B}ar$ et $\mathcal{C}obar$

Soit A une DGA-algèbre.
On considère la catégorie $\mathcal{C}_A$ dont les objets sont les couples (C, τ), où C est une DGA-cogèbre et $\tau : C \longrightarrow A$ une cochaîne tordante, et les flèches $(C, \tau) \xrightarrow{\psi} (C', \tau')$ sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\psi"'] & & A \\ & C' \arrow[ur, "\tau'"'] & \end{tikzcd}$$

La catégorie $\mathcal{C}_A$ a un objet final

$$\mathcal{B}(A) \xrightarrow{\overline{\tau}} A$$

qu'on appelle la *construction bar* de A.

Il suit immédiatement que $\mathcal{B}(A)$ est unique à isomorphisme près, et que $(\mathcal{B}(A), \overline{\tau})$ est caractérisé par la propriété universelle suivante :

$$\begin{tikzcd} {}^{\forall}C \arrow[rr, "\tau_C"] \arrow[dr, "\exists!\psi_C"'] & & A \\ & \mathcal{B}(A) \arrow[ur, "\overline{\tau}"'] & \end{tikzcd}$$

Encore une fois on a la notion duale:

Soit C une DGA-cogèbre.
On considère la catégorie $\mathcal{C}_C$ dont les objets sont les couples (A, τ), où A est une DGA-algèbre et $\tau : C \longrightarrow A$ une cochaîne tordante, et les flèches $(A, \tau) \xrightarrow{\phi} (A', \tau')$ sont les diagrammes commutatifs :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\tau"] \arrow[dr, "\tau'"'] & & A \\ & A' \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

La catégorie $\mathcal{C}_C$ a un objet initial

$$C \xrightarrow{\underline{\tau}} \Omega(C)$$

qu'on appelle la *construction cobar* de C.

Il suit immédiatement que $\Omega(C)$ est unique à isomorphisme près, et que $(\Omega(C), \underline{\tau})$ est caractérisé par la propriété universelle suivante:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "\underline{\tau}"] \arrow[dr, "\tau_A"'] & & \Omega(C) \\ & {}^{\forall}A \arrow[ur, "\exists!\phi_A"'] & \end{tikzcd}$$

Les catégories $\mathcal{C}_A/\mathcal{C}_C$ n'ont *a priori* pas nécessairement d'objet final/initial. Le théorème suivant nous assure de leurs existences et nous en donne des constructions explicites.

Théorème 1.1. *Soient A une DGA-algèbre et C une DGA-cogèbre.*
Alors :

$$\mathcal{B}(A) = T^c(SA_+),$$
$$\Omega(C) = T(S^{-1}C_+),$$

et les cochaînes tordantes universelles sont données par les composées

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(A) \arrow[rrr, "\overline{\tau}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & & A \\ & SA_+ \arrow[r, "s^{-1}"'] & A_+ \arrow[ur, hook, "\iota"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rrr, "\underline{\tau}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & & \Omega(C) \\ & C_+ \arrow[r, "s^{-1}"'] & S^{-1}C_+ \arrow[ur, hook, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

où toutes les flèches sont les flèches canoniques.

Voici maintenant quelques résultats qui nous seront utiles dans la partie **3**.

Lemme 1.4. *Les cochaînes tordantes $\tau : C \longrightarrow A$ sont en bijection avec les morphismes de DG-algèbres $f_\tau : \Omega(C) \longrightarrow A$ via les relèvements :*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\underline{\tau}"] \arrow[rr, bend right, "\tau"'] & \Omega(C) \arrow[r, "f_\tau"] & A \end{tikzcd}$$

Théorème 1.2. *Les produits tensoriels tordus $\mathcal{B}(A) \otimes_{\overline{\tau}} A$ et $C \otimes_{\underline{\tau}} \Omega(C)$ sont acycliques.*

Théorème 1.3. *Soit A une DGA-algèbre connexe. Le morphisme canonique $\Phi : \Omega\mathcal{B}(A) \longrightarrow A$ est un quasi-isomorphisme.*

Et le résultat dual:

Théorème 1.4. *Soit C une DGA-cogèbre connexe. Le morphisme canonique $\Psi : C \longrightarrow \mathcal{B}\Omega(C)$ est un quasi-isomorphisme.*

Mentionnons à titre informatif que ces derniers théorèmes nous disent que les constructions $\mathcal{B}ar$ et $\mathcal{C}obar$ sont des analogues algébriques respectivement du classifiant et de l'espace de lacets en topologie algébrique. Les interactions et analogies entre ces différentes notions ainsi que le berceau topologique des concepts mis en place dans ces dernières sections constituent d'ailleurs la majeure partie du second chapitre de **[P]**, qui pourrait intéresser le lecteur rebuté par l'apparente aridité de ceux-ci.

2 Algèbre homologique sur les modules gradués

Cette seconde partie a des objectifs multiples : présenter l'algèbre homologique dans la catégorie des modules gradués sur une DGA-algèbre, introduire les complexes $\mathcal{B}ar/\mathcal{C}obar$, la notion de résolution projective minimale, d'exposer une méthode de calculs explicite de celle-ci dans certains cas et bien sur, de mettre en évidence l'articulation entre ces différentes notions. La première section de cette partie s'appuiera sur **[Wei]**, la seconde sur **[PolPos]** chapitre 1.1, la troisième sur **[Ber]** et enfin la quatrième sur **[Ber]**, **[Bardz]**, et **[Skol]**. La cinquième et dernière section quant à elle est consacrée à l'exposition de calculs pour quelques exemples concrets en vue de la partie **4**.

2.1 Foncteurs Tor et Ext

Soient Λ un anneau et M un Λ-module.

Une *résolution projective* de M, est une suite

$$\cdots \xrightarrow{d_3} P^2 \xrightarrow{d_2} P^1 \xrightarrow{d_1} P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0$$

de Λ-modules, exacte partout, et telle que chaque P^i est projectif. On notera en général $P^\bullet \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$ une résolution projective de M. Il est bien connu que tout Λ-module admet une résolution projective.

Soit maintenant N un Λ-module. On rappelle que les foncteurs $Hom_\Lambda(\_, N)$ et $\_ \otimes_\Lambda N$ sont exacts, respectivement à gauche et à droite. On peut alors définir

$$Ext^i_\Lambda(\_, N) = R^i Hom_\Lambda(\_, N)$$

les foncteurs dérivés à droite de $Hom_\Lambda(\_, N)$, et

$$Tor_i^\Lambda(\_, N) = L^i(\_ \otimes_\Lambda N)$$

les foncteurs dérivés à gauche de $\_ \otimes_\Lambda N$.

Par définition,

$$Ext^i_\Lambda(M, N) = H^i(Hom_\Lambda(P^\bullet, N), d_H)$$

$$Tor_i^\Lambda(M, N) = H_i(P^\bullet \otimes_\Lambda N, d_\otimes)$$

où $P^\bullet \xrightarrow{\epsilon} M \to 0$ est une résolution projective de M. Ces définitions sont bien fondées et ne dépendent pas de la résolution projective de M choisie (voir par exemple **[Wei]**).

2.2 Résolutions $\mathcal{B}ar$ et $\mathcal{C}obar$

A partir de maintenant on suppose, sauf mention contraire, que $\Lambda = \mathbf{K}$, un corps commutatif et $A = \mathbf{K} \oplus A_+$ désignera une DGA-$\mathbf{K}$-algèbre unitaire graduée positivement. En particulier, l'augmentation $A \stackrel{\epsilon}{\longrightarrow} \mathbf{K}$ munie naturellement $\mathbf{K}$ d'une structure de A-module à gauche et à droite graduée positivement.

Les résolutions $\mathcal{B}ar/\mathcal{C}obar$ présentées ici sont en fait des objets semblables aux constructions $\mathcal{B}ar/\mathcal{C}obar$ de la partie **1.8** mais examinées du point de vue de l'algèbre homologique.

Soit M un A-module à gauche. La *résolution $\mathcal{B}ar$ réduite* de M, notée $\mathcal{B}ar^+_\bullet(A, M)$ est la résolution libre

$$\cdots \longrightarrow A \otimes A_+ \otimes A_+ \otimes M \longrightarrow A \otimes A_+ \otimes M \longrightarrow A \otimes M \longrightarrow 0$$

où $\mathcal{B}ar^+_i(A, M) = A \otimes A_+^{\otimes i} \otimes M$ et où les différentielles sont données par :

$$\partial_i(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i \otimes m) = \sum_{s=0}^{i} (-1)^s a_0 \otimes \cdots \otimes a_{s-1} a_s \otimes \cdots a_i \otimes m + (-1)^{i+1} a_0 \otimes \cdots \otimes a_i m$$

L'homologie de la résolution $\mathcal{B}ar^+_\bullet(A, M)$ est appelée l'*homologie de Hochschild* de M, notée $HH_\bullet(A, M)$.

La résolution $\mathcal{B}ar^+_\bullet(A, M)$ est en particulier une résolution projective du A-module M et on a donc

$$Ext^i_A(M, N) = H^i(Hom_A(\mathcal{B}ar^+_\bullet(A, M), N))$$

$$Tor^A_i(M, N) = H_i(\mathcal{B}ar^+_\bullet(A, M) \otimes_A N)$$

pour tout A-module N.

On se place maintenant dans la catégorie des modules gradués sur A, $\mathcal{M}od_{gr}(A)$, dont les objets sont les DG-A-modules et les morphismes

$$\mathcal{H}om_A(M, N) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} Hom_A(M_p, N_{n+p}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{H}om_A(M, N)_n$$

pour tous DG-A-modules M et N.

Remarquons d'abord qu'un A-module gradué P est projectif dans $\mathcal{M}od_{gr}(A)$ si, et seulement si, il l'est dans $mod(A)$.

Le foncteur $\mathcal{H}om_A(\_,N)$ est encore exact à gauche comme composition de foncteurs exacts et exacts à gauche. On définit ses foncteurs dérivés à gauche :

$$\mathcal{E}xt^i_A(\_,N) = R^i\mathcal{H}om_A(\_,N) \quad i.e. \quad \mathcal{E}xt^i_A(M,N) = H^i(\mathcal{H}om_A(\bar{P}^\bullet,N))$$

où $\bar{P}^\bullet$ est une résolution projective de M dans $\mathcal{M}od_{gr}(A)$. De même on définit

$$\mathcal{T}or^A_i(M,N) = H_i(\bar{P}^\bullet \otimes_A N)$$

mais comme $\bar{P}^\bullet \otimes_A N$ vu comme un A-module gradué est isomorphe à $\bar{P}^\bullet \otimes_A N$ comme A-module, on a directement :

$$\mathcal{T}or^A_i(M,N) = Tor^A_i(M,N).$$

Comme A et M sont gradués, on a encore une graduation sur $A \otimes A_+^{\otimes i} \otimes M$ et $\mathcal{B}ar^+_\bullet(A,M)$ est encore une résolution projective de M dans $\mathcal{M}od_{gr}(A)$.

Définition 2.1. *Soient M et N deux A-modules gradués. On définit le complexe $\mathcal{C}obar$ de M et N au dessus de A par:*

$$\mathcal{C}ob^\bullet(A,M,N) = \mathcal{H}om_A(\mathcal{B}ar^+_\bullet(A,M),N)$$

Définition 2.2. *Soient L un A-module à gauche gradué et R un A-module à droite gradué. On définit le complexe $\mathcal{B}ar$ de L et R au dessus de A par:*

$$\mathcal{B}ar_\bullet(R,A,L) = R \otimes_A \mathcal{B}ar^+_\bullet(A,L)$$

On a donc

$$\mathcal{E}xt^i_A(M,N) = H^i(\mathcal{C}ob^\bullet(A,M,N))$$
$$Tor^A_i(L,R) = H_i(\mathcal{B}ar_\bullet(R,A,L))$$

On note $\mathcal{B}ar_\bullet(A) = \mathcal{B}ar_\bullet(\mathbf{K},A,\mathbf{K})$. Dans les parties **2.3** et **2.4** on s'intéressera au calcul, pour certains A, de $Tor^A_i(\mathbf{K},\mathbf{K}) = H_i(\mathcal{B}ar_\bullet(A))$ qu'il est difficile de calculer directement à partir du complexe $\mathcal{B}ar_\bullet(A)$. Avant, on fait quelques remarques générales sur la structure de $Tor^A_\bullet(\mathbf{K},\mathbf{K}) = \bigoplus_{i\geq 0} Tor^A_i(\mathbf{K},\mathbf{K})$.

$\mathcal{B}ar_i(A) = A_+^{\otimes i}$ étant muni d'une structure naturelle de $\mathbf{K}$-espace vectoriel, il en va de même pour $H_i(\mathcal{B}ar_\bullet(A)) = Tor^A_i(\mathbf{K},\mathbf{K})$, qui fait donc de $Tor^A_\bullet(\mathbf{K},\mathbf{K})$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel gradué positivement. De plus, les déconcaténations

$$A_+^{\otimes i} \longrightarrow A_+^{\otimes i'} \otimes_K A_+^{\otimes i''}, \qquad i = i' + i''$$

induisent des morphismes de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels

$$\bar{\Delta} : Tor^A_i(\mathbf{K},\mathbf{K}) \longrightarrow Tor^A_{i'}(\mathbf{K},\mathbf{K}) \otimes_K Tor^A_{i''}(\mathbf{K},\mathbf{K})$$

qui munissent $Tor^A_\bullet(\mathbf{K},\mathbf{K})$ d'un coproduit

$$\Delta : Tor^A_\bullet(\mathbf{K},\mathbf{K}) \longrightarrow Tor^A_\bullet(\mathbf{K},\mathbf{K}) \otimes_K Tor^A_\bullet(\mathbf{K},\mathbf{K})$$

faisant ainsi de $Tor^A_\bullet(\mathbf{K},\mathbf{K})$ une $\mathbf{K}$-cogèbre graduée.

On peut, par une construction duale, définir un produit sur $\mathcal{E}xt_A^\bullet(\mathbf{K},\mathbf{K})$, le *produit de Yoneda*, qui munit $\mathcal{E}xt_A^\bullet(\mathbf{K},\mathbf{K})$ d'une structure de **K**-algèbre graduée.

Notons enfin qu'on a un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels gradués

$$\mathcal{E}xt_A^\bullet(\mathbf{K},\mathbf{K}) \simeq Tor_\bullet^A(\mathbf{K},\mathbf{K})^\#$$

qui nous vient de l'isomorphisme naturel en complexe de chaines induit par l'adjonction classique

$$\mathcal{H}om_A(P^\bullet,\mathbf{K}) \simeq \mathcal{H}om_K(\mathbf{K},\mathcal{H}om_A(P^\bullet,\mathbf{K})) \simeq \mathcal{H}om_K(\mathbf{K}\otimes_A P^\bullet,\mathbf{K})$$

pour $P^\bullet \longrightarrow \mathbf{K}$ une résolution projective de $\mathbf{K}$. On remarque qu'on a alors $\mathcal{E}xt_A^\bullet(\mathbf{K},\mathbf{K}) \simeq Ext_A^\bullet(\mathbf{K},\mathbf{K})$. Plus généralement, pour deux DG-A-modules M et N, les conditions pour qu'ils satisfassent $\mathcal{E}xt_A^\bullet(M,N) \simeq Ext_A^\bullet(M,N)$ sont détaillées dans **[Ber]**.

2.3 Résolutions projectives minimales

Dans cette partie on se place dans la catégorie $\mathcal{M}od_{gr}(A)$ définie en **2.2** où A est toujours une DGA-**K**-algèbre graduée positivement. On expose ici quelques résultats essentiels de l'algèbre homologique dans cette catégorie sans leurs démonstrations qui peuvent être trouvées dans **[Ber]**.

Soient M et M' deux A-modules gradués.

Définition 2.3. *On dit qu'un morphisme $f : M \longrightarrow M'$ est* surjectif essentiel *si tout morphisme $\phi : X \longrightarrow M$ de A-modules gradués tel que $f \circ \phi$ est surjectif, est surjectif.*

C'est équivalent à dire que la restriction de f à un sous-objet strict de M n'est jamais surjective.

Définition 2.4. *Une* couverture projective *de M est un couple (P, f) où P est un A-module gradué projectif et $f : P \longrightarrow M$ un morphisme surjectif essentiel.*

Théorème 2.1. *Soit M un A-module gradué, borné inférieurement. Alors M possède une couverture projective. De plus, pour toute couverture projective (P, f) de M, P est borné inférieurement.*

Définition 2.5. *Une* résolution projective minimale *de M est une résolution $P^\bullet \longrightarrow M$ tel que chaque morphisme $P^i \longrightarrow im(d_i)$ est surjectif essentiel.*

Le théorème **2.1** nous assure l'existence d'une résolution projective minimale pour tout A-module gradué borné inférieurement. La terminologie *minimale* est motivée par le résultat suivant:

Proposition 2.1. *Soient $P^\bullet$ et $Q^\bullet$ des résolutions projectives de M, avec $P^\bullet$ minimale. Soient*

$$f^\bullet : P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$$

$$g^\bullet : Q^\bullet \longrightarrow P^\bullet$$

des morphismes de résolutions. Alors $f^\bullet$ est injectif, $g^\bullet$ est surjectif, et

$$Q^\bullet = im(f^\bullet) \oplus ker(g^\bullet)$$

De plus, $ker(g^\bullet)$ est acyclique.

Autrement dit, toute résolution projective de M s'écrit comme la somme directe d'une résolution projective minimale et d'un complexe acyclique.

Proposition 2.2. *Soit M un A-module gradué borné inférieurement. Soient $P^\bullet$ et $Q^\bullet$ deux résolutions minimales projectives de M. Alors tout morphisme de résolutions*

$$f^\bullet : P^\bullet \longrightarrow Q^\bullet$$

est un isomorphisme.

Soit $P^\bullet$ la résolution projective minimale de M, un A-module à droite gradué positivement. Par définition, $Tor_i^A(M, \mathbf{K}) = H_i(P^\bullet \otimes_A \mathbf{K}, d_P \otimes 1_K)$.

Proposition 2.3. *Le complexe $P^\bullet \otimes_A \boldsymbol{K}$ est à différentielle nulle.*

On en déduit immédiatement que $Tor_i^A(M, \mathbf{K}) \simeq P^i \otimes_A \mathbf{K}$. De plus, en remarquant que pour tout $\mathbf{K}$-espace vectoriel gradué E, l'application $\mathbf{K}$-linéaire

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & (E \otimes_K A) \otimes_A \mathbf{K} \\ v & \longmapsto & (v \ \otimes \ 1) \otimes \ 1 \end{array}$$

est un isomorphisme, il vient rapidement $P^i \simeq Tor_i^A(M, \mathbf{K}) \otimes_K A$.

En particulier, pour $M = \mathbf{K}$, muni d'une structure de A-module à droite gradué positivement par l'augmentation $A \xrightarrow{\epsilon} \mathbf{K}$, la résolution projective minimale de $\mathbf{K}$ est donnée à isomorphisme près par $Tor_\bullet^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \otimes_K A$ et réciproquement, si $P^\bullet$ est la résolution projective minimale de $\mathbf{K}$, $Tor_i^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \simeq P^i \otimes_A \mathbf{K}$.

Enfin, notons que l'on peut faire un raisonnement analogue pour M, un A-module à *gauche* gradué positivement. En particulier pour $\mathbf{K}$ vu comme A-module à gauche, si on note $P^\bullet$ sa résolution projective minimale, on a :

$$P^i \simeq A \otimes_K Tor_i^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}),$$

$$Tor_i^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \simeq \mathbf{K} \otimes_A P^i.$$

2.4 Les articles de Bardzell et Sköldberg

On cherche maintenant à calculer explicitement, pour certaines classes de **K**-algèbres graduées positivement, la résolution projective minimale de **K** vu comme A-module. Plus précisément, on s'intéresse au cas où A est une **K**-algèbre monômiale, c'est à dire une **K**-algèbre de la forme

$$\mathbf{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle/(m_1, \ldots, m_r)$$

où $\mathbf{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ désigne l'algèbre libre des mots engendrés par les symboles $x_1, \ldots, x_n$ et où chacun des m_i est un monôme, *i.e.* un mot de la forme $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $i_l \leq n$ pour tout $l \leq k$.

L'article de Bardzell, **[Bardz]**, fournit dans le cadre plus général des algèbres des chemins sur un carquois quotientées par des relations monômiales une méthode pour calculer explicitement une résolution projective minimale de l'algèbre en question, A, vue comme module à droite sur son algèbre enveloppante, $A^e = A \otimes_K A^{op}$ dont le produit d'algèbre est défini par :

$$(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes db.$$

On dira qu'un groupe abélien M est un A-bimodule s'il est muni de structures de A-modules à gauche et à droite compatibles, dans le sens où :

$$(a \cdot m) \cdot b = a \cdot (m \cdot b) \text{ et } \lambda \cdot m = m \cdot \lambda \quad \forall m \in M,\ \forall a, b \in A,\ \forall \lambda \in \mathbf{K}.$$

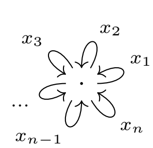
Tout A-bimodule M peut être vu comme un A^e-module à gauche (respectivement à droite) à travers l'identification :

$$(a \otimes b).m = a \cdot m \cdot b \qquad (\text{resp. } m.(a \otimes b) = b \cdot m \cdot a)$$

On a donc des isomorphismes naturels entre les catégories des A-bimodules, des A^e-modules à gauche, et des A^e-modules à droite, qu'on identifiera sans le spécifier dans la suite.

Pour un carquois Δ donné, on notera l'ensemble de ses points Δ_0, Δ_1 l'ensemble de ses flèches, et plus généralement Δ_n ses n-chemins orientés. On notera $\mathbf{K}\Delta$ l'algèbre des chemins sur Δ.

Remarquons tout d'abord que la **K**-algèbre libre $\mathbf{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ n'est rien d'autre que la **K**-algèbre engendrée par les chemins sur le carquois Θ_n:



Ensuite, notons que si on a une résolution projective minimale de A comme A^e-module à droite,

$$\cdots \longrightarrow P^n \xrightarrow{\phi_n} P^{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \cdots \longrightarrow P^0 \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

dont l'existence nous est assurée par le théorème **2.1**, la résolution de $\mathbf{K}$ (comme A-module à gauche) en A-modules projectifs

$$\cdots \longrightarrow P^n \otimes_A \mathbf{K} \xrightarrow{\psi_n} P^{n-1} \otimes_A \mathbf{K} \xrightarrow{\psi_{n-1}} \cdots \longrightarrow P^0 \otimes_A \mathbf{K} \longrightarrow \mathbf{K} \longrightarrow 0$$

où $\psi_n = \phi_n \otimes 1_K$, est encore minimale : en effet, d'après **[Ber]** (section **2**, exercice 3, corrigé), pour tout A-module gradué borné inferieurement M, une résolution projective $R^\bullet$ de M est minimale si, et seulement si, le complexe $\mathbf{K} \otimes_A R^\bullet$ est à différentielle nulle. Comme $\mathbf{K} \otimes_A (P^\bullet \otimes_A \mathbf{K}) = (\mathbf{K} \otimes_A P^\bullet) \otimes_A \mathbf{K}$ et comme $P^\bullet$ est minimale *i.e.* $(\mathbf{K} \otimes_A P^\bullet)$ est a différentielle nulle, $\mathbf{K} \otimes_A (P^\bullet \otimes_A \mathbf{K})$ est aussi à différentielle nulle et donc $P^\bullet \otimes_A \mathbf{K}$ est une résolution projective minimale de $\mathbf{K}$.

Dans l'article **[Skol]**, Sköldberg donne une description commode des générateurs des modules de la résolution de Bardzell : à une algèbre sur un carquois quotientée par des relations monomiales, $\mathbf{K}\Delta/(V)$, on associe un graphe orienté $\Gamma_A = (N, M)$ construit de la manière suivante :

$$N = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \{\ u \mid \exists\ v \in V \text{ tel que } u \text{ est un facteur propre à droite de } v\ \}$$

$M = M_1 \cup M_2$, où

$$M_1 = \{\ e \longrightarrow a \mid e \in \Delta_0,\ a \in \Delta_1,\ e = o(a)\ \}$$

$M_2 = \{\ u \longrightarrow v \mid t(u) = o(v),\ uv \in (V),\ w \notin (V)$ pour tout facteur propre à gauche w de $uv\ \}$.

En particulier, pour le cas qui nous intéresse plus spécifiquement, $A = \mathbf{K}\Theta_n/(V)$, les mailles de Γ_A sont décrites par :

$M = \{\ \cdot \longrightarrow x_i\ \}_{i \leq n} \cup \{\ u \longrightarrow v \mid uv \in (V),\ w \notin (V)$ pour tout facteur propre à gauche w de $uv\ \}$.

On appelle *i-chaîne* un élément de $\mathbf{K}\Delta$ de la forme $w = v_{-1}v_0v_1 \ldots v_i$ pour lequel il existe un chemin orienté dans Γ_A, $v_{-1} \longrightarrow v_0 \longrightarrow v_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow v_i$ où $v_{-1} \in \Delta_0$, et on note $V^{(i)}$ l'ensemble des i-chaînes. En particulier, $V^{(-1)} = \Delta_0$, $V^{(0)} = \Delta_1$, et $V^{(1)} = V$.

On peut aussi définir un graphe dual $\Gamma_A^G = (N^G, M^G)$ par

$$N^G = \Delta_0 \cup \Delta_1 \cup \{\ u \mid \exists\ v \in V \text{ tel que } u \text{ est un facteur propre à gauche de } v\ \}$$

$M^G = M_1^G \cup M_2^G$, où

$$M_1^G = \{\ a \longrightarrow e \mid e \in \Delta_0,\ a \in \Delta_1,\ e = o(a)\ \}$$

$M_2 = \{\ u \longrightarrow v \mid t(u) = o(v),\ uv \in (V),\ w \notin (V)$ pour tout facteur propre à droite w de $uv\ \}$.

et on définit alors les i^G-chaînes comme les éléments $w = u_i u_{i-1} \dots u_{-1} \in \mathbf{K}\Delta$ pour lesquels il existe un chemin orienté dans Γ_A^G, $u_i \longrightarrow u_{i-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow u_{-1}$, $u_{-1} \in \Delta_0$.

Lemme 2.1. *Un élément $w \in \boldsymbol{K}\Delta$ est une i-chaîne si, et seulement si, c'est une i^G-chaîne.*

Preuve. **[Skol]**, lemme **1**. $\square$

On se référera donc dans la suite à un $w \in V^{(i)}$ soit comme à une i-chaîne $v_{-1}v_0v_1 \dots v_i$, soit comme à une i^G-chaîne, $u_i u_{i-1} \dots u_0 u_{-1}$.

Pour $w = v_{-1}v_0v_1 \dots v_i = u_i u_{i-1} \dots u_0 u_{-1} \in V^{(i)}$ on définit

$$\begin{aligned} h_G(w) &= u_i, \\ h_D(w) &= v_i, \\ t_G(w) &= u_{i-1} \dots u_{-1}, \\ t_D(w) &= v_{-1} \dots v_{i-1}. \end{aligned}$$

On note $\mathbf{K}V^{(i)}$ le $\mathbf{K}$-espace vectoriel engendré par les i-chaînes.

Théorème 2.2 (Bardzell)**.** *Soit $A = \boldsymbol{K}\Delta/(V)$ où Δ désigne un carquois fini, et V une collection de monômes engendrés par Δ. Alors une A^e-résolution projective minimale de A comme A^e-module à droite*

$$\cdots \longrightarrow P^n \xrightarrow{\phi_n} P^{n-1} \xrightarrow{\phi_{n-1}} \cdots \longrightarrow P^0 \xrightarrow{\pi} A \longrightarrow 0$$

est donnée par $P^n = A \otimes_{K\Delta_0} \boldsymbol{K}V^{(n-1)} \otimes_{K\Delta_0} A$, et

$$\phi_n(1 \otimes v \otimes 1) = \begin{cases} h_G(v) \otimes t_G(v) \otimes 1 - 1 \otimes t_D(v) \otimes h_D(v), & n \text{ impair} \\ \displaystyle\sum_{\substack{v_1, v_2, v_3 \in \Delta_\bullet \\ v_1 v_2 v_3 = v \\ v_2 \in V^{(n-2)}}} v_1 \otimes v_2 \otimes v_3, & n \text{ pair} \end{cases}$$

Ainsi, lorsque $\Delta_0 = \{\cdot\}$, d'après ce qui a été dit précédemment, une résolution projective minimale de $\mathbf{K}$ comme A-module à gauche est donnée par

$$Q^\bullet = P^\bullet \otimes_A \mathbf{K} = (A \otimes_K \mathbf{K}V^{(\bullet-1)} \otimes_K A) \otimes_A \mathbf{K} \simeq A \otimes_K \mathbf{K}V^{(\bullet-1)}$$

et on a alors

$$Tor_i^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \simeq \mathbf{K} \otimes_A Q^i \simeq \mathbf{K}V^{(i-1)}.$$

Les différentielles du complexe $Q^\bullet$ sont quant à elles données par :

$$\psi_n(p \otimes v) = \sum_{\substack{v_1, v_2 \in \Delta_\bullet \\ v_1 v_2 = v \\ v_2 \in V^{(n-2)}}} p v_1 \otimes v_2.$$

Enfin, remarquons que le début de cette résolution projective minimale est

$$\cdots \longrightarrow A \otimes_K \mathbf{K}\langle V \rangle \longrightarrow A \otimes_K \mathbf{K}\Delta_1 \longrightarrow A \longrightarrow \mathbf{K} \longrightarrow 0.$$

En particulier, lorsque $\Delta = \Theta_n$, $\mathbf{K}\Delta_1$ n'est rien d'autre que $\bigoplus_{i=1}^n \mathbf{K}.x_i$.

2.5 Quelques calculs

$A = \mathbf{K}\langle x, y\rangle/(x^2y^2, yxy^3)$

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[r] & xy^2 \arrow[d] \\ \cdot \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & xy^3 \end{tikzcd}$$

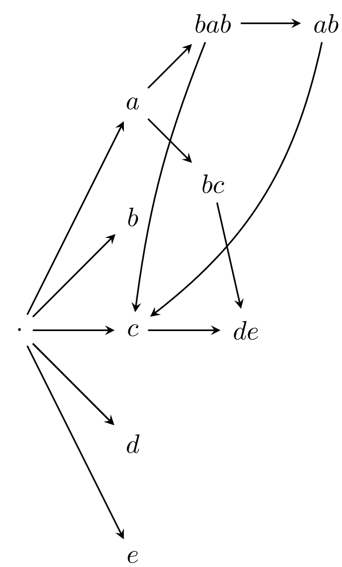
$Tor_0^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) = \mathbf{K}$
$Tor_1^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) = \mathbf{K}.x \oplus \mathbf{K}.y$
$Tor_2^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) = \mathbf{K}.x^2y^2 \oplus \mathbf{K}.yxy^3$
$Tor_3^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) = \mathbf{K}.x^2y^2xy^3$
$Tor_n^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) = 0, \forall n \geq 4.$

$A = \mathbf{K}\langle x, y, z, t, u\rangle/(xyz, yzt, tu)$

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[r] & yz \arrow[dddl, bend left] \\
 & y \arrow[r] & zt \arrow[dddl] \\
\cdot \arrow[uur] \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] \arrow[ddr] & z & \\
 & t \arrow[d] & \\
 & u &
\end{tikzcd}$$

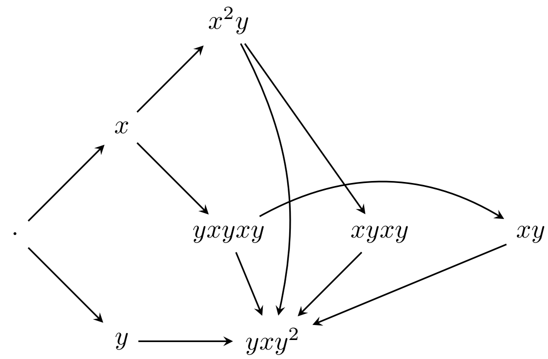
$Tor_0^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}$
$Tor_1^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}.x \oplus \mathbf{K}.y \oplus \mathbf{K}.z \oplus \mathbf{K}.t \oplus \mathbf{K}.u$
$Tor_2^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}.xyz \oplus \mathbf{K}.yzt \oplus \mathbf{K}.tu$
$Tor_3^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}.xyzt \oplus \mathbf{K}.yztu$
$Tor_4^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}.xyztu$
$Tor_n^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = 0, \forall n \geq 5.$

$A = \mathbf{K}\langle a, b, c, d, e\rangle/(abab, abc, cde)$



$Tor_0^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}$
$Tor_1^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}.a \oplus \mathbf{K}.b \oplus \mathbf{K}.c \oplus \mathbf{K}.d \oplus \mathbf{K}.e$
$Tor_2^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}.abab \oplus \mathbf{K}.abc \oplus \mathbf{K}.cde$
$Tor_3^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}.ababc \oplus \mathbf{K}.abcde \oplus \mathbf{K}.ababab$
$Tor_4^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}.ababcde \oplus \mathbf{K}.abababc$
$Tor_5^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = \mathbf{K}.abababcde$
$Tor_n^A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = 0, \forall n \geq 6.$

$A = \mathbf{K}\langle x, y\rangle/(x^3y, y^2xy^2, xyxyxy)$



$Tor_0^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) = \mathbf{K}$
$Tor_1^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) = \mathbf{K}.x \oplus \mathbf{K}.y$
$Tor_2^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) = \mathbf{K}x^3y \oplus \mathbf{K}.y^2xy^2 \oplus \mathbf{K}.xyxyxy$
$Tor_3^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) = \mathbf{K}.x^3y^2xy^2 \oplus \mathbf{K}.x^3yxyxy \oplus \mathbf{K}.xyxyxyxy \oplus \mathbf{K}.xyxyxyxy^2xy^2$
$Tor_4^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) = \mathbf{K}.x^3yxyxy^2xy^2 \oplus \mathbf{K}.xyxyxyxy^2xy^2$
$Tor_n^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) = 0, \forall n \geq 5.$

3 A_∞-structures

Dans cette partie, qui se situe dans la continuité de la première, on présente dans un premier temps les A_∞-(co)algèbres qui généralisent les DGA-(co)algèbres et on généralise certaines des constructions de la partie **1** dans ce nouveau contexte. Dans un second temps, on expose certains résultats fondamentaux qui lient la théorie des A_∞-structures à des problèmes d'algèbre homologique dans l'espoir de convaincre le lecteur du bien fondé cette généralisation. On s'appuiera pêle-mêle sur **[He13]**, **[He15]**, **[Kel01]**, **[KLH]**, et **[P]**.

3.1 Définitions

Soit $\mathbf{K}$ un corps.

Une A_∞*-algèbre sur* $\boldsymbol{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué

$$A = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$$

muni d'une collection d'applications

$$m_i : A^{\otimes i} \longrightarrow A \qquad\qquad i > 0$$

qui vérifient les conditions suivantes:

(i) Les m_i conservent le degré interne, *i.e.*

$$|m_i(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i)| = |a_1 \otimes \cdots \otimes a_i| = |a_1| + \cdots + |a_i|.$$

On dit aussi que les m_i sont *gradués*.

(ii) Les m_i sont de degré $2 - i$, *i.e.*

$$m_i : \bigoplus_{q_1+\cdots+q_i=n+2-i} \bigotimes_{r=1}^{i} A_{q_r} \longrightarrow A_n.$$

(iii) Les m_i satisfont les *identités de Stasheff* :

$$\mathbf{SI(n)} : \qquad \sum_{\substack{r+s+t=n\\ s>0}} (-1)^{r+st} m_{r+1+t} \circ (1_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes 1_A^{\otimes t}) = 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarquons que les premières relations de Stasheff s'écrivent :

$$
\begin{aligned}
m_1 \circ m_1 &= 0 \quad (1)\\
-m_2 \circ (m_1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1) + m_1 \circ m_2 &= 0 \quad (2)\\
m_3 \circ (m_1 \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes m_1 \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes m_1) - m_2 \circ (m_2 \otimes 1 - 1 \otimes m_2) + m_1 \circ m_3 &= 0 \quad (3)
\end{aligned}
$$

Autrement dit, m_1 est une différentielle sur A, et m_2 un produit respectant la différentielle. La troisième relation nous dit que m_2 est associatif à homotopie près. On peut donc parler de l'homologie de A relative à m_1. Nous verrons plus tard que cette homologie peut également être munie d'une A_∞-structure.

Si $m_1 = 0$, A est dite minimale.

Remarquons enfin que si A est une DGA-**K**-algèbre associative, on peut la munir canoniquement d'une structure d'A_∞-algèbre en posant

$$m_1 = \partial_A \quad m_2 = \mu_A \quad m_{i\geq 3} = 0,$$

et que, réciproquement, une A_∞-algèbre qui satisfait $m_{i\geq 3} = 0$ est une DGA-**K**-algèbre associative.

Morphismes

Si A et B sont deux A_∞-algèbres, on définit un *morphisme d'A_∞-algèbres* ou *A_∞-morphisme*, $f : A \longrightarrow B$ comme une famille

$$f_n : A^{\otimes n} \longrightarrow B$$

de morphismes gradués de degré $1 - n$ satisfaisant:

$$\sum_{\substack{r+s+t=n\\ s>0}} (-1)^{r+st} f_{r+1+t} \circ (1_A^{\otimes r} \otimes m_s^A \otimes 1_A^{\otimes t}) = \sum_{\substack{1\leq u\leq n\\ i_1+\cdots+i_u=n}} (-1)^v m_u^B \circ (f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_u}) \qquad (*)$$

où $v = (u-1)(i_1-1) + (u-2)(i_2-2) + \cdots + 2(i_{u-2}-1) + (i_{u-1}-1)$.

La composée de deux A_∞-morphismes $f : B \longrightarrow C$ et $g : A \longrightarrow B$ est définie par:

$$(f \circ g)_n := \sum_{\substack{1\leq u\leq n\\ i_1+\cdots+i_u=n}} (-1)^v f_u \circ (g_{i_1} \otimes \cdots \otimes g_{i_u})$$

où v est le même signe que précédemment.

Remarquons que l'équation $(*)$ pour $n = 1, 2$ nous dit que f_1 est un morphisme de complexe entre (A, m_1^A) et (B, m_1^B) qui est, à l'homotopie donnée par f_2

près, compatible avec m_2. En particulier, f_1 induit un morphisme d'algèbres graduées:

$$H_\bullet(A) \longrightarrow H_\bullet(B)$$

On dira qu'un A_∞-morphisme $f : A \longrightarrow B$ est un A_∞-*quasi-isomorphisme* si f_1 est un quasi-isomorphisme (*i.e.* f_1 induit un isomorphisme en homologie) et que c'est un A_∞-isomorphisme si f_1 est un isomorphisme de complexes.

Augmentation

Une A_∞-algèbre A est dite *augmentée* si elle est munie :

(i) d'une application $\eta : \mathbf{K} \longrightarrow A$ de degré 0 telle que

$$m_i \circ (1_A^{\otimes r} \otimes \eta \otimes 1_A^{\otimes t}) \qquad \text{où } r, t \geq 0 \text{ et } r + 1 + t = i$$

s'annule pour tout $i \neq 2$, et

$$m_2 \circ (1_A \otimes \eta) = 1_A = m_2 \circ (\eta \otimes 1_A).$$

(ii) d'une application $\epsilon : A \longrightarrow \mathbf{K}$ de degré 0 telle que $\epsilon \circ \eta = 1_K$, $\epsilon \circ m_2 = \epsilon \otimes \epsilon$, et $\epsilon \circ m_i = 0$ pour tout $i \neq 2$.

A_∞-cogèbre

A la notion d'A_∞-algèbre, correspond la notion duale d'A_∞-cogèbre, définie comme suit:

Une A_∞-*cogèbre sur* $\boldsymbol{K}$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbb{Z}$-gradué

$$C = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} C_n$$

muni d'une collection d'applications

$$\Delta_i : C \longrightarrow C^{\otimes i} \qquad\qquad i > 0$$

localement finies, qui vérifient les conditions suivantes:

(i) Les Δ_i conservent le degré interne.

(ii) Les Δ_i sont de degré $i - 2$, *i.e.*

$$\Delta_i : C_n \longrightarrow \bigoplus_{q_1 + \cdots + q_i = n+i-2} \quad \bigotimes_{r=1}^{i} C_{q_r}$$

(iii) Les Δ_i satisfont les *identités de Stasheff*:

$$\mathbf{SI(n)} : \qquad \sum_{\substack{r+s+t=n \\ s>0}} (-1)^{rs+t}(1_C^{\otimes r} \otimes \Delta_s \otimes 1_C^{\otimes t}) \circ \Delta_{r+1+t} = 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De même, Δ_1 est une différentielle sur C, et Δ_2 un coproduit compatible avec Δ_1. Si Δ_1 est nulle, C sera dite minimale.

Un morphisme d'A_∞-cogèbres $f : C \longrightarrow D$ est défini comme une famille de morphismes gradués

$$f_n : C \longrightarrow D^{\otimes n}$$

de degrés $n-1$, vérifiant:

$$\sum_{\substack{r+s+t=n \\ s>0}} (-1)^{rs+t}(1_D^{\otimes r} \otimes \Delta_s^D \otimes 1_D^{\otimes t}) \circ f_{r+1+t} = \sum_{\substack{1 \leq u \leq n \\ i_1+\cdots+i_u=n}} (-1)^w (f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_u}) \circ \Delta_u^C$$

où $w = (u-1)(i_n-1) + (u-2)(i_{n-1}-2) + \cdots + 2(i_{u+2}-1) + (i_{u+1}-1)$, et on définit alors la composition de manière évidente. On appliquera aux A_∞-morphismes d'A_∞-cogèbres la même terminologie que celle explicitée pour les A_∞-morphismes d'A_∞-algèbres.

Une A_∞-cogèbre C est dite *coaugmentée* si elle est munie :

(i) d'une application $\epsilon : C \longrightarrow \mathbf{K}$ de degré 0 telle que

$$(1_C^{\otimes r} \otimes \epsilon \otimes 1_C^{\otimes t}) \circ \Delta_i \qquad \text{où } r, t \geq 0 \text{ et } r+1+t = i$$

s'annule pour tout $i \neq 2$, et

$$(1_C \otimes \epsilon) \circ \Delta_2 = 1_C = (\eta \otimes 1_C) \circ \Delta_2.$$

(ii) d'une application $\eta : \mathbf{K} \longrightarrow C$ de degré 0 telle que $\epsilon \circ \eta = 1_K$, $\Delta_2 \circ \eta(1) = \eta(1) \otimes \eta(1)$, et $\Delta_i \circ \eta(1) = 0$ pour tout $i \neq 2$.

Constructions $\mathcal{B}ar$ et $\mathcal{C}obar$ pour les A_∞-structures

Pour une A_∞-$\mathbf{K}$-algèbre augmentée A (respectivement une $A_\infty\mathbf{K}$–cogèbre coaugmentée C), on note sa *construction $\mathcal{B}ar$*, $\mathcal{B}(A)$ (resp. sa *construction $\mathcal{C}obar$*, $\Omega(C)$) construite sur l'espace vectoriel sous-jacent comme dans le théorème **1.1**. Les cochaînes tordantes universelles dans le contexte des DGA-(co)algèbres, $\mathcal{B}(A) \longrightarrow A$ et $C \longrightarrow \Omega(C)$, notées respectivement $\overline{\tau}_A$ et $\underline{\tau}^C$ (ou simplement $\overline{\tau}$ et $\underline{\tau}$ quand il n'y aura pas d'ambiguité), sont, rappelons le, données par les composées:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}(A) \arrow[rrr, "\overline{\tau}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & & A \\ & SA_+ \arrow[r, "s^{-1}"'] & A_+ \arrow[ur, hook, "\iota"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[rrr, "\underline{\tau}"] \arrow[dr, "\pi"'] & & & \Omega(C) \\ & C_+ \arrow[r, "s^{-1}"'] & S^{-1}C_+ \arrow[ur, hook, "\iota"'] & \end{tikzcd}$$

On verra dans le paragraphe suivant que ces cochaînes resteront tordantes et universelles dans le contexte A_∞.

On aimerait munir $\mathcal{B}(A)$ (resp. $\Omega(C)$) d'une structure de DGA-cogèbre (resp. DGA-algèbre) mais malheureusement, si dans le cas des constructions $(\mathcal{C}o)\mathcal{B}ar$ pour les DGA-(co)algèbres l'existence d'une différentielle sur $\mathcal{B}(A)$ (resp. $\Omega(C)$) nous est assurée par la fonctorialité de la définition, ce n'est plus le cas ici. Prenons le problème à l'envers :

Soit A une **K**-algèbre graduée augmentée et $(m_i)_{i\geq 1}$ une famille de morphismes gradués

$$m_i : A^{\otimes i} \longrightarrow A, \qquad i \geq 1$$

de degré $2-i$. Pour tout $i \geq 1$, nous définissons une bijection

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}om_A(A^{\otimes i}, A) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_A((SA)^{\otimes i}, SA) \\ m_i & \longmapsto & b_i \end{array}$$

en définissant les b_i par les relations

$$b_i = -s \circ m_i \circ (s^{-1})^{\otimes i}.$$

Remarquons que les b_i sont tous de degré 1. Le morphisme

$$\bigoplus_{i\geq 1} (SA)^{\otimes i} \longrightarrow SA$$

dont les composantes sont les b_i est encore de degré 1 et se relève, d'après le lemme **1.1**, en une unique codérivation b sur $T^c(SA_+) = \mathcal{B}(A)$.

Lemme 3.1 (**Stasheff**). *Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) Les m_i définissent une structure d'A_∞-algèbre sur A.

(ii) Pour tout $n \geq 1$, l'équation suivante est vérifiée :

$$\sum_{\substack{j+k+l=n \\ j+1+l=i}} b_i \circ (1_{SA}^{\otimes j} \otimes b_k \otimes 1_{SA}^{\otimes l}) = 0.$$

(iii) La codérivation b est une différentielle sur $\mathcal{B}(A)$, i.e. $b \circ b = 0$.

Preuve. **[KLH]**, Lemme **1.2.2.1**. $\square$

Ainsi, si A est une A_∞-algèbre augmentée, il existe une unique différentielle b_A sur $\mathcal{B}(A)$ qui relève les $(m_i^A)_{i\geq 1}$. On peut alors définir la construction $\mathcal{B}ar$ de A, $\mathcal{B}(A)$, comme la DGA-cogèbre $(T^c(SA_+), b_A)$ munie de sa cochaîne tordante universelle. Par une construction duale, on peut munir la construction $\mathcal{C}obar$ d'une A_∞-cogèbre coaugmentée C d'une unique structure de DGA-algèbre compatible avec les $(\Delta_i^C)_{i\geq 1}$ (voir par exemple **[KLH]**, section **1.2**). Notons que, si A est une DGA-algèbre, la construction $\mathcal{B}ar$ de A vue comme A_∞-algèbre correspond exactement à la construction $\mathcal{B}ar$ de A comme DGA-algèbre et que de même, si C est une DGA-cogèbre, la construction $\mathcal{C}obar$ de C vue comme A_∞-cogèbre correspond exactement à la construction $\mathcal{C}obar$ de C comme DGA-cogèbre.

Mentionnons à titre informatif que les constructions $\mathcal{B}ar$ et $\mathcal{C}obar$ pour les A_∞-structures induisent des isomorphismes de catégories entre d'une part, les A_∞-algèbres augmentées et les DGA-cogèbres libres, et d'autre part, les A_∞-cogèbres augmentées et les DGA-algèbres libres (**[P]**, **[KLH]**).

Torsions d'A_∞-structures

Fixons maintenant C une A_∞-$\mathbf{K}$-cogèbre coaugmentée et A une DGA-$\mathbf{K}$-algèbre. Une *cochaîne tordante* (parfois aussi appelée *cochaîne tordante cogénéralisée* ou *γ-cochaîne*) dans ce contexte, est un morphisme de $\mathbf{K}$-espaces vectoriels gradués $\tau : C \longrightarrow A$ homogène de degré 1 tel que les composées $\epsilon_A \circ \tau$ et $\tau \circ \eta_C$ s'annulent, et qui de plus satisfait *l'équation de Maurer-Cartan cogénéralisée*:

$$\partial_A \circ \tau + \sum_{n\geq 0} (-1)^{n(n-1)/2} \mu_A^{(n)} \circ \tau^{\otimes n} \circ \Delta_n^C = 0,$$

où $\mu_A^{(n)}$ désigne la $(n-1)$-ième itération du produit d'algèbre sur A.

On définit alors le produit tensoriel tordu $C \otimes_\tau A$ comme le $\mathbf{K}$-espace vectoriel gradué $C \otimes_K A$ muni de la *différentielle tordue* définie par:

$$\partial_\tau = \Delta_1 \otimes 1_A + \sum_{i\geq 1} (-1)^{i(i-1)/2} (1_C \otimes \mu_A^{(i+1)}) \circ (1_C \otimes \tau^{\otimes i} \otimes 1_A) \circ (\Delta_{i+1} \otimes 1_A).$$

Théorème 3.1. *Soit C une une A_∞-cogèbre coaugmentée. Alors $\underline{\tau}$ est une γ-cochaîne et $C \otimes_{\underline{\tau}} \Omega(C)$ est acyclique. De plus, les γ-cochaînes $\tau : C \longrightarrow A$ sont en bijection avec les morphismes de DG-algèbres $f_\tau : \Omega(C) \longrightarrow A$ via les relèvements :*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\underline{\tau}"] \arrow[rr, bend right, "\tau"'] & \Omega(C) \arrow[r, "f_\tau"] & A \end{tikzcd}$$

Preuve. **[P]**, Th. **3.19**, Lemme **3.17**. □

Lemme 3.2. *Soient $f : C \longrightarrow C'$ un A_∞-morphisme d'A_∞-**K**-cogèbres coaugmentées et $\tau : C' \longrightarrow A$ une γ-cochaîne. Alors la composée $\tau \circ f : C \longrightarrow A$ définie par*

$$\tau \circ f = \sum_{i \geq 1} \mu_A^{(i)} \circ \tau^{\otimes i} \circ f_i$$

est encore une γ-cochaîne.

Preuve. **[P]**, Lemme **3.22**. □

Théorème 3.2. *Soient $f : C \longrightarrow C'$ un A_∞-morphisme d'A_∞-**K**-cogèbres coaugmentées et $\tau : C' \longrightarrow A$ une γ-cochaîne. Alors la flèche*

$$f \otimes_\tau 1_A : C \otimes_{\tau \circ f} A \longrightarrow C' \otimes_\tau A$$

définie par :

$$f \otimes_\tau 1_A = \sum_{i \geq 1} (1_{C'} \otimes \mu_A^{(i)}) \circ (1_{C'} \otimes \tau^{\otimes (i-1)} \otimes 1_A) \circ (f_i \otimes 1_A)$$

est un morphisme de DGA-modules.

Preuve. **[P]**, Th. **3.23**. □

Inversement, pour A une A_∞-**K**-algèbre augmentée, C une DGA-**K**-cogèbre, une cochaîne tordante, ou β-cochaîne, est définie comme une application $\tau : C \longrightarrow A$, **K**-linéaire, homogène de degré 1, et qui satisfait *l'équation de Maurer-Cartan généralisée*:

$$\tau \circ \partial_A + \sum_{n \geq 0} (-1)^{n(n-1)/2} m_n^A \circ \tau^{\otimes n} \circ \Delta_C^{(n)} = 0.$$

On peut encore définir le produit tensoriel tordu $C \otimes_\tau A$ comme le **K**-espace vectoriel gradué $C \otimes_K A$ muni de la *différentielle tordue* définie cette fois par:

$$\partial_\tau = 1_C \otimes m_1 + \sum_{i \geq 1} (-1)^{i(i-1)/2} (1_C \otimes m_{i+1}) \circ (1_C \otimes \tau^{\otimes i} \otimes 1_A) \circ (\Delta^{(i+1)} \otimes 1_A).$$

Théorème 3.3. *Soit A une une A_∞-algèbre augmentée. Alors $\overline{\tau}$ est une β-cochaîne et $\mathcal{B}(A) \otimes_{\overline{\tau}} A$ est acyclique. De plus, les β-cochaînes $\tau : C \longrightarrow A$ sont en bijection avec les morphismes de DG-cogèbres $f^\tau : C \longrightarrow \mathcal{B}(A)$ via les relèvements :*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f^\tau"] \arrow[rr, bend right, "\tau"'] & \mathcal{B}(A) \arrow[r, "\overline{\tau}"] & A \end{tikzcd}$$

Preuve. **[P]**, Th. **3.19**, Lemme **3.17**. □

Si A et A' sont deux A_∞-**K**-algèbres coaugmentées, $f : A \longrightarrow A'$ un A_∞-morphisme, et $\tau : C \longrightarrow A$ une β-cochaîne, on définit la cochaîne composée $f \circ \tau : C \longrightarrow A'$ par

$$f \circ \tau = \sum_{i \geq 1} f_i \circ \tau^{\otimes i} \circ \Delta_C^{(i)},$$

et alors, $f \circ \tau$ est encore une β-cochaîne, et la flèche

$$1_C \otimes_\tau f : C \otimes_\tau A \longrightarrow C \otimes_{f \circ \tau} A'$$

définie par

$$1_C \otimes_\tau f = \sum_{i \geq 1} (1_C \otimes f_i) \circ (1_C \otimes \tau^{\otimes (i-1)} \otimes 1_A) \circ (\Delta_C^{(i)} \otimes 1_A)$$

est un morphisme de DGA-modules (**[P]**, Lemme **3.22** et Th. **3.23**).

Nous aurons besoin pour la suite d'un résultat supplémentaire donné par le théorème suivant :

Théorème 3.4. *Soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme d'A_∞-algèbres où A et A' sont supposées connexes. Alors les proposition suivantes sont équivalentes:*

(i) f_1 est un quasi-isomorphisme.

(ii) $\mathcal{B}(f) : \mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathcal{B}(A')$ est un quasi-isomorphisme.

(iii) Le produit tensoriel tordu $\mathcal{B}(A) \otimes_{f \circ \overline{\tau}} A'$ est acyclique.

Preuve. **[P]**, Th. **3.25**. □

Enfin, remarquons que nous n'avons pas envisagé le cas où C est une A_∞-cogèbre et A une A_∞-algèbre. Donner une définition cohérente de cochaîne tordante $\tau : C \longrightarrow A$ est dans ce cas là, d'après **[P]**, un problème équivalent à celui de définir l'(A_∞)-produit tensoriel de deux A_∞-algèbres, non encore résolu à ce jour.

3.2 A_∞-structures et algèbre homologique

On aborde maintenant deux résultats centraux de ce mémoire qui font le lien entre les parties **2** et **3.1**.

Théorème 3.5 (Kadeishvili). *Soit A une DG-$\boldsymbol{K}$-algèbre. Alors $H_\bullet(A)$ admet une structure d'A_∞-algèbre telle que:*

1. *$m_1 = 0$ et m_2 est induite par m_2^A.*
2. *Il existe un A_∞-quasi-isomorphisme $H_\bullet(A) \longrightarrow A$ qui induit l'identité en homologie.*

De plus, cette structure est unique à A_∞-isomorphisme (non unique) près.

Preuve. Rappelons tout d'abord qu'on peut munir canoniquement la DG-algèbre A d'une structure d'A_∞-algèbre en posant $m_1^A = \partial_A$, $m_2^A = \mu_A$ et $m_{i\geq 3}^A = 0$. Dans la suite m_2^A sera notée $\cdot$ ou par la simple juxtaposition des termes.

On va construire inductivement une structure d'A_∞-algèbre sur $H_\bullet(A)$: imposons $m_1 = 0$ et m_2 définie par la multiplication induite sur $H_\bullet(A)$ par μ_A. Ensuite, choisissons une application linéaire $f_1 : H_\bullet(A) \longrightarrow A$ qui à une classe d'homologie associe un cycle dans celle-ci. En particulier, f_1 est un quasi-isomorphisme. Etant donnés $a_1, a_2 \in A$, soit Ψ_2 définie par

$$\Psi_2(a_1 \otimes a_2) = f_1(a_1 a_2) - f_1(a_1) f_1(a_2).$$

Comme $f_1(a_1 a_2)$ est par définition un cycle représentant la classe d'homologie contenant $f_1(a_1)f_1(a_2)$, $\Psi_2(a_1 \otimes a_2)$ est un bord *i.e.* $\Psi_2(a_1 \otimes a_2) = \partial_A w$, pour un certain $w \in A$. Soit f_2 une application linéaire qui à $a_1 \otimes a_2$ associe w: on a alors $\Psi_2 = \partial_A \circ f_2$.

Soit maintenant $n > 2$. Pour $a_1, \ldots, a_n \in A$ on définit

$$\Psi_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{\epsilon_1(a_1,\ldots,a_n,s)} f_s(a_1 \otimes \ldots \otimes a_s) \cdot f_{n-s}(a_{s+1} \otimes \ldots \otimes a_n) +$$

$$\sum_{j=2}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-j} (-1)^{\epsilon_2(a_1,\ldots,a_n,k,j)} f_{n-j+1}(a_1 \otimes \ldots \otimes a_k \otimes m_j(a_{k+1}, \ldots, a_{k+j}) \otimes a_{k+j+1} \otimes \ldots \otimes a_n)$$

où les expressions

$$\epsilon_1(a_1, \ldots, a_n, s) = s + (n - s + 1)(|a_1| + \ldots + |a_s|)$$

$$\epsilon_2(a_1, \ldots, a_n, j, k) = k + j(n - k - j + |a_1| + \ldots + |a_k|)$$

sont les signes dans $(*)$, la condition que doivent satisfaire les f_n pour répondre à la définition d'A_∞-morphisme (p.31). L'expression Ψ_n n'est en fait rien d'autre que $(*)$ où font défaut les termes $f_1 \circ m_n$ et $f_n \circ m_1$. Pour compléter l'induction, on doit mettre en évidence de bons termes m_n et f_n de sorte que l'expression $(*)$ soit satisfaite. Un calcul direct mais fastidieux met en évidence que $\Psi_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)$ est un cycle et on définit alors

$$m_n(a_1, \ldots a_n) = [\Psi_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)] \in H_\bullet(A).$$

S'ensuit alors que, comme $f_1(m_n(a_1, \ldots, a_n))$ et $\Psi_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)$ sont dans la même classe d'homologie, il y a un $w \in A$ vérifiant

$$f_1(m_n(a_1, \ldots, a_n)) - \Psi_n(\Psi_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)) = \partial_A w.$$

Une application linéaire f_n qui envoie $\Psi_n(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n)$ sur w satisfait alors

$$\Psi_n = \partial_A \circ f_n,$$

et ainsi, m_n et f_n constituent bien les composantes, respectivement, d'une A_∞-algèbre et d'un A_∞-morphisme.

$\square$

[KLH], Cor. **1.4.1.4** généralise ce résultat au cas où A est une A_∞-algèbre. Le théorème qui suit a été annoncé sans démonstration par Keller au X ICRA, Toronto (Canada, 2002). Nous suivons la preuve donnée dans **[He13]**.

Théorème 3.6 (**Keller**). *Soient C une A_∞-$\boldsymbol{K}$-cogèbre coaugmentée minimale et A une $\boldsymbol{K}$-algèbre connexe graduée positivement. Alors, sont équivalents:*

(i) Il existe un A_∞-quasi-isomorphisme d'A_∞-algèbres augmentées minimales

$$\mathcal{E}xt^\bullet_A(\boldsymbol{K}, \boldsymbol{K}) \longrightarrow C^\#$$

(ii) Il existe une γ-cochaîne $\tau : C \longrightarrow A$ telle que le produit tensoriel tordu $C \otimes_\tau A$ est une résolution projective minimale de $\boldsymbol{K}$, vu comme A-module à droite.

Preuve. (i) $\Rightarrow$ (ii): Soit $f : \mathcal{E}xt^\bullet_A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \longrightarrow C^\#$ un A_∞-quasi-isomorphisme d'A_∞-algèbres augmentées minimales. Comme A est une $\mathbf{K}$-algèbre graduée positivement, sa résolution $\mathcal{B}ar$, $\mathcal{B}ar_\bullet(A)$, est munie naturellement d'une structure de DGA-cogèbre qui s'identifie à la construction $\mathcal{B}ar$ de A, $\mathcal{B}(A)$. On confondra dans la suite $\mathcal{B}ar_\bullet(A)$ et $\mathcal{B}(A)$. Le dual de $\mathcal{B}(A)$, $\mathcal{B}(A)^\#$, est à son tour muni d'une structure de DG-algèbre augmentée qu'on verra ici comme une A_∞-algèbre augmentée. Comme $\mathcal{E}xt^\bullet_A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) = H^\bullet(\mathcal{B}(A)) \simeq H_\bullet(\mathcal{B}(A))^\# \simeq H_\bullet(\mathcal{B}(A)^\#)$, on a un quasi-isomorphisme canonique $\mathcal{B}(A)^\# \longrightarrow \mathcal{E}xt^\bullet_A(\mathbf{K}, \mathbf{K})$ qui envoie un élément sur sa classe d'homologie, qui se prolonge trivialement en un A_∞-quasi-isomorphisme, et qui, composé avec f, nous procure un A_∞-quasi-isomorphisme d'A_∞-algèbres augmentées $g : \mathcal{B}(A)^\# \longrightarrow C^\#$. La composée de la flèche duale $g^\# : C \longrightarrow \mathcal{B}(A)$ avec la cochaîne tordante universelle $\overline{\tau} : \mathcal{B}(A) \longrightarrow A$ est alors une γ-cochaîne qu'on appellera τ. D'après le théorème **3.2**,

$$g^{\#} \otimes_{\overline{\tau}} 1_A : C \otimes_\tau A \longrightarrow \mathcal{B}(A) \otimes_{\overline{\tau}} A$$

est un morphisme de DGA-modules. **[P]**, Th. **2.8** (i) nous assure que c'est en fait un quasi-isomorphisme. Mais d'après le théorème **1.2**, $\mathcal{B}(A) \otimes_{\overline{\tau}} A$ est toujours acyclique. Ainsi $C \otimes_\tau A$ est acyclique. Sa différentielle est alors restreinte à $\Delta_1 \otimes 1_A = 0$ par minimalité de C et donc le complexe $\mathbf{K} \otimes_A (C \otimes_\tau A)$ est à différentielle nulle. Comme $C \otimes_\tau A$ est quasi-isomorphe à $Tor^A_\bullet(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \otimes_K A$ qui est une résolution projective de $\mathbf{K}$ comme A-module à droite d'après la section **2.3**, $C \otimes_\tau A$ est encore une résolution projective de $\mathbf{K}$ et l'annulation de la différentielle de $\mathbf{K} \otimes_A (C \otimes_\tau A)$ nous assure, d'après **[Ber]** (section **2** exercice 3, corrigé), que $C \otimes_\tau A$ est bien minimale.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Notons tout d'abord que d'après le théorème **3.1** on a un morphisme de DGA-algèbres :

$$f_\tau : \Omega(C) \longrightarrow A$$

qui a son tour induit un morphisme de DGA-cogèbres :

$$\mathcal{B}(f_\tau) : \mathcal{B}(\Omega(C)) \longrightarrow \mathcal{B}(A).$$

Le théorème **3.4** nous assure que f_τ est un quasi-isomorphisme si, et seulement si, $\mathcal{B}(f_\tau)$ est un quasi-isomorphisme si, et seulement si, $\mathcal{B}(\Omega(C)) \otimes_{f_\tau \circ \overline{\tau}_{\Omega(C)}} A$ est acyclique. En utilisant le quasi-isomorphisme d'adjonction $\psi : C \longrightarrow \mathcal{B}(\Omega(C))$ défini dans **[KLH]** Lemme **1.3.2.3** *c.* on déduit que $C \otimes_\tau A$ est quasi-isomorphe à $\mathcal{B}(\Omega(C)) \otimes_{f_\tau \circ \overline{\tau}_{\Omega(C)}} A$. Ainsi, l'hypothèse que $C \otimes_\tau A$ est acyclique induit que $\mathcal{B}(f_\tau) : \mathcal{B}(\Omega(C)) \longrightarrow \mathcal{B}(A)$ est un quasi-isomorphisme de DGA-cogèbres. Si on considère la composition des quasi-isomorphismes de DGA-cogèbres, vues comme A_∞-cogèbres coaugmentées, $\psi : C \longrightarrow \mathcal{B}(\Omega(C))$ et $\mathcal{B}(f_\tau)$, on a un A_∞-quasi-isomorphisme d'A_∞-cogèbres coaugmentées $C \longrightarrow \mathcal{B}(A)$ qui, à son tour, induit un A_∞-quasi-isomorphisme d'A_∞-algèbres augmentées $\mathcal{B}(A)^{\#} \longrightarrow C^{\#}$. Composé avec l' A_∞-quasi-isomorphisme d'A_∞-algèbres augmentées :

$$\mathcal{E}xt^\bullet_A(\mathbf{K}, \mathbf{K}) \longrightarrow \mathcal{B}(A)^{\#}$$

induit par le théorème de Kadeishvili, on a bien l'A_∞-quasi-isomorphisme d'A_∞-algèbres augmentées attendu. □

Nous arrivons au terme de ce mémoire et allons pouvoir accomplir notre objectif premier : pour une algèbre connexe graduée positivement donnée A, le théorème précédent nous dit qu'on peut, en dualisant la flèche donnée par la condition (i), munir le dual de son algèbre de Yoneda d'une structure d'A_∞-cogèbre minimale unique à A_∞-quasi-isomorphisme près, et nous donne une condition nécéssaire et suffisante pour vérifier si celle si convient. On se propose d'essayer de calculer cette structure sur quelques exemples.

Concrètement, on se donne une algèbre monômiale A et on en calcul dans un premier temps, à l'aide des résultats de la partie **2**, la résolution projective minimale donnée par Bardzell, ainsi que les $Tor_i^A(\mathbf{K},\mathbf{K})$. Ensuite on met *à la main* une structure d'A_∞-cogèbre minimale sur $Tor_\bullet^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) = \bigoplus_{i\geq 0} Tor_i^A(\mathbf{K},\mathbf{K})$: les conditions sur les degrés internes et homologiques sont alors des restrictions relativement fortes. Viens alors une étape un peu fastidieuse, la vérification des identités de Stasheff. Enfin, on calcule la différentielle du produit tensoriel tordu comme définie à la fin de la section **3.1**,

$$\partial_\tau = \sum_{i\geq 1} (-1)^{i(i-1)/2}(1_C \otimes \mu_A^{(i+1)}) \circ (1_C \otimes \tau^{\otimes i} \otimes 1_A) \circ (\Delta_{i+1} \otimes 1_A)$$

où $\tau : Tor_\bullet^A(\mathbf{K},\mathbf{K}) \longrightarrow A$ est donnée par la projection canonique sur l'espace des mots de longueur 1 et on vérifie qu'on retrouve bien, à quasi-isomorphisme près, la résolution de Bardzell.

4 Quelques exemples de calculs

$A = k\langle x, y\rangle/(x^2y^2, yxy^3)$

$$C = Tor_{\bullet}^A(k,k) = \bigoplus_{i\geq 0} Tor_i^A(k,k) = \underbrace{k}_{T_0} \oplus \underbrace{(k.x \oplus k.y)}_{T_1} \oplus \underbrace{(k.x^2y^2 \oplus k.yxy^3)}_{T_2} \oplus \underbrace{k.x^2y^2xy^3}_{T_3}$$

Structure d'A_∞-cogèbre sur C:

$$\begin{array}{cccc} \Delta_1 & : & C & \to & C \\ & & {}^\forall u & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_2 & : & C & \to & C \otimes C \\ & & {}^\forall u & \mapsto & 1 \otimes u + u \otimes 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_3 & : & C & \to & C \otimes C \otimes C \\ & & {}^\forall u & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_4 & : & C & \to & C \otimes C \otimes C \otimes C \\ & & 1, x, y & \mapsto & 0 \\ & & x^2y^2 & \mapsto & -x \otimes x \otimes y \otimes y \\ & & yxy^3 & \mapsto & 0 \\ & & x^2y^2xy^3 & \mapsto & -x \otimes x \otimes y \otimes yxy^3 \end{array} ‘$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_5 & : & C & \to & C \otimes C \otimes C \otimes C \otimes C \\ & & 1, x, y & \mapsto & 0 \\ & & x^2y^2 & \mapsto & 0 \\ & & yxy^3 & \mapsto & y \otimes x \otimes y \otimes y \otimes y \\ & & x^2y^2xy^3 & \mapsto & x^2y^2 \otimes x \otimes y \otimes y \otimes y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_{n\geq 6} & : & C & \to & C^{\otimes n \geq 6} \\ & & {}^\forall u & \mapsto & 0 \end{array}$$

$A = k\langle x, y, z, t, u\rangle/(xyz, yzt, tu)$

$$C = Tor^A_\bullet(k,k) = \bigoplus_{i\geq 0} Tor^A_i(k,k)$$

$$C = \underbrace{k}_{T_0} \oplus \underbrace{(k.x \oplus k.y \oplus k.z \oplus k.t \oplus k.u)}_{T_1} \oplus \underbrace{(k.xyz \oplus k.yzt \oplus k.tu)}_{T_2} \oplus \underbrace{(k.xyzt \oplus k.yztu)}_{T_3} \oplus \underbrace{k.xyztu}_{T_4}$$

Structure d'A_∞-cogèbre sur C:

$$\begin{array}{lccc} \Delta_1 & : & C & \to & C \\ & & {}^\forall u & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} \Delta_2 & : & C & \to & C \otimes C \\ & & \sigma = x, y, z, t, u & \mapsto & 1 \otimes \sigma + \sigma \otimes 1 \\ & & \eta = xyz, yzt & \mapsto & 1 \otimes \eta + \eta \otimes 1 \\ & & tu & \mapsto & 1 \otimes tu + tu \otimes 1 + t \otimes u \\ & & xyzt & \mapsto & 1 \otimes xyzt + xyzt \otimes 1 - xyz \otimes t + x \otimes yzt \\ & & yztu & \mapsto & 1 \otimes yztu + yztu \otimes 1 + yzt \otimes u \\ & & xyztu & \mapsto & 1 \otimes xyztu + xyztu \otimes 1 + xyzt \otimes u - xyz \otimes tu + x \otimes yztu \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} \Delta_3 & : & C & \to & C \otimes C \otimes C \\ & & \sigma = x, y, z, t, u & \mapsto & 0 \\ & & xyz & \mapsto & -x \otimes y \otimes z \\ & & yzt & \mapsto & -y \otimes z \otimes t \\ & & tu & \mapsto & 0 \\ & & xyzt & \mapsto & 0 \\ & & yztu & \mapsto & -y \otimes z \otimes tu \\ & & xyztu & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} \Delta_{n\geq 4} & : & C & \to & C^{\otimes n \geq 4} \\ & & {}^\forall \sigma & \mapsto & 0 \end{array}$$

$A = k\langle a,b,c,d,e\rangle/(abab, abc, cde)$

$$C = Tor^A_\bullet(k,k) = \bigoplus_{i\geq 0} Tor^A_i(k,k)$$

$$C = \underbrace{k}_{T_0} \oplus \underbrace{(k.a \oplus k.b \oplus k.c \oplus k.d \oplus k.e)}_{T_1} \oplus \underbrace{(k.abab \oplus k.abc \oplus k.cde)}_{T_2} \oplus \underbrace{(k.ababc \oplus k.abcde \oplus k.ababab)}_{T_3}$$
$$\oplus \underbrace{(k.ababcde \oplus k.abababc)}_{T_4} \oplus \underbrace{k.abababcde}_{T_5}$$

Structure d'A_∞-cogèbre sur C:

$$\begin{array}{cccc} \Delta_1 & : & C & \to & C \\ & & {}^\forall u & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_2 & : & C & \to & C \otimes C \\ & & \sigma = a,b,c,d,e & \mapsto & 1\otimes\sigma + \sigma\otimes 1 \\ & & \eta = abab, abc, cde & \mapsto & 1\otimes\eta + \eta\otimes 1 \\ & & ababc & \mapsto & 1\otimes ababc + ababc\otimes 1 - abab\otimes c \\ & & \lambda = abcde, ababab & \mapsto & 1\otimes\lambda + \lambda\otimes 1 \\ & & ababcde & \mapsto & 1\otimes abcde + abcde\otimes 1 - abab\otimes cde \\ & & abababc & \mapsto & 1\otimes abababc + abababc\otimes 1 - ababab\otimes c - abab\otimes abc \\ & & abababcde & \mapsto & 1\otimes abababcde + abababcde\otimes 1 - ababab\otimes cde - abab\otimes abcde \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_3 & : & C & \to & C\otimes C\otimes C \\ & & a,b,c,d,e & \mapsto & 0 \\ & & abab & \mapsto & 0 \\ & & abc & \mapsto & -a\otimes b\otimes c \\ & & cde & \mapsto & -c\otimes d\otimes e \\ & & ababc & \mapsto & -a\otimes b\otimes abc \\ & & abcde & \mapsto & -a\otimes b\otimes cde - abc\otimes d\otimes e \\ & & ababab & \mapsto & -a\otimes b\otimes abab + abab\otimes a\otimes b \\ & & ababcde & \mapsto & -a\otimes b\otimes abcde + ababc\otimes d\otimes e \\ & & abababc & \mapsto & -a\otimes b\otimes ababc \\ & & abababcde & \mapsto & -a\otimes b\otimes ababcde - abababc\otimes d\otimes e \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_4 & : & C & \to & C\otimes C\otimes C\otimes C \\ & & {}^\forall u \neq abab & \mapsto & 0 \\ & & abab & \mapsto & -a\otimes b\otimes a\otimes b \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_{n\geq 5} & : & C & \to & C^{\otimes n\geq 5} \\ & & {}^\forall u & \mapsto & 0 \end{array}$$

$A = k\langle x,y\rangle/(x^3y, y^2xy^2, xyxyxy)$

$$C = Tor_\bullet^A(k,k) = \bigoplus_{i\geq 0} Tor_i^A(k,k)$$

$$\begin{aligned} C = \underbrace{k}_{T_0} &\oplus \underbrace{(k.x \oplus k.y)}_{T_1} \oplus \underbrace{(k.x^3y \oplus k.y^2xy^2 \oplus k.xyxyxy)}_{T_2} \\ &\oplus \underbrace{(k.x^3y^2xy^2 \oplus k.x^3yxyxy \oplus k.xyxyxyxy \oplus k.xyxyxyxy^2xy^2)}_{T_3} \\ &\oplus \underbrace{(k.x^3yxyxy^2xy^2 \oplus k.xyxyxyxy^2xy^2)}_{T_4} \end{aligned}$$

Structure d'A_∞-cogèbre sur C:

$$\begin{array}{cccc} \Delta_1 & : & C & \to & C \\ & & \forall u & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \Delta_2 & : & C & \to & C \otimes C \\ & & \forall u & \mapsto & 1 \otimes u + u \otimes 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_3 & : & C & \to & C \otimes C \otimes C \\ & & x, y & \mapsto & 0 \\ & & x^3y, y^2xy^2, xyxyxy & \mapsto & 0 \\ & & x^3y^2xy^2 & \mapsto & 0 \\ & & x^3yxyxy & \mapsto & -x \otimes x \otimes xyxyxy \\ & & xyxyxyxy & \mapsto & -x \otimes y \otimes xyxyxy + xyxyxy \otimes x \otimes y \\ & & xyxyxy^2xy^2 & \mapsto & 0 \\ & & x^3yxyxy^2xy^2 & \mapsto & -x \otimes x \otimes xyxyxy^2xy^2 \\ & & xyxyxyxy^2xy^2 & \mapsto & -x \otimes y \otimes xyxyxy^2xy^2 + xyxyxy \otimes x \otimes y^2xy^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \Delta_4 & : & C & \to & C \otimes C \otimes C \otimes C \\ & & x, y & \mapsto & 0 \\ & & x^3y & \mapsto & -x \otimes x \otimes x \otimes y \\ & & y^2xy^2, xyxyxy & \mapsto & 0 \\ & & x^3y^2xy^2 & \mapsto & -x \otimes x \otimes x \otimes y^2xy^2 \\ & & x^3yxyxy & \mapsto & 0 \\ & & xyxyxyxy & \mapsto & 0 \\ & & xyxyxy^2xy^2 & \mapsto & 0 \\ & & x^3yxyxy^2xy^2 & \mapsto & 0 \\ & & xyxyxyxy^2xy^2 & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$
\begin{array}{cccc}
\Delta_5 & : & C & \to & C \otimes C \otimes C \otimes C \otimes C \\
& & x, y & \mapsto & 0 \\
& & y^2xy^2 & \mapsto & y \otimes y \otimes x \otimes y \otimes y \\
& & x^3y, xyxyxy & \mapsto & 0 \\
& & x^3y^2xy^2 & \mapsto & x^3y \otimes y \otimes x \otimes y \otimes y \\
& & x^3yxyxy & \mapsto & x^3y \otimes x \otimes y \otimes x \otimes y \\
& & xyxyxyxy & \mapsto & 0 \\
& & xyxyxy^2xy^2 & \mapsto & xyxyxy \otimes y \otimes x \otimes y \otimes y \\
& & x^3yxyxy^2xy^2 & \mapsto & x^3yxyxy \otimes y \otimes x \otimes y \otimes y - x^3y \otimes x \otimes y \otimes x \otimes y^2xy^2 \\
& & xyxyxyxy^2xy^2 & \mapsto & xyxyxyxy \otimes y \otimes x \otimes y \otimes y
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\Delta_6 & : & C & \to & C \otimes C \otimes C \otimes C \otimes C \otimes C \\
& & x, y & \mapsto & 0 \\
& & xyxyxy & \mapsto & x \otimes y \otimes x \otimes y \otimes x \otimes y \\
& & x^3y, x^2yxy^2 & \mapsto & 0 \\
& & x^3y^2xy^2 & \mapsto & 0 \\
& & x^3yxyxy & \mapsto & 0 \\
& & xyxyxyxy & \mapsto & 0 \\
& & xyxyxy^2xy^2 & \mapsto & x \otimes y \otimes x \otimes y \otimes x \otimes y^2xy^2 \\
& & x^3yxyxy^2xy^2 & \mapsto & 0 \\
& & xyxyxyxy^2xy^2 & \mapsto & 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
\Delta_{n\geq 7} & : & C & \to & C^{\otimes n \geq 7} \\
& & {}^{\forall}u & \mapsto & 0
\end{array}
$$

Références :

[Bardz] Michael J. Bardzell, *The alternating syzygy behavior of monomial algebras*, J. Algebra **188** (1997), no. 1, 69-89.

[Ber] Roland Berger, *La catégorie des modules gradués sur une algèbre graduée (nouvelle version du chapitre 5 d'un cours de Master 2 à Lyon 1)*, disponible à l'adresse `webperso.univ-st-etienne.fr/~rberger/M2ch5.ps`.

[He13] Estanislao Herscovich, *On the multi-Koszul property for connected algebras*, Documenta Mathematica **18** (2013), 1301-1347.

[He15] Estanislao Herscovich, *Hochschild (co)homology and Koszul duality*, (2015), disponible à l'adresse `http://arxiv.org/pdf/1405.2247v2.pdf`.

[Kel01] Bernhard Keller, *Introduction to A-infinity algebras and modules*, (2001), disponible à l'adresse `https://arxiv.org/pdf/math/9910179v2.pdf`.

[KLH] Kenji Lefèvre-Hasegawa, *Sur les A_∞-catégories*, thèse de doctorat, (2003), disponible à l'adresse `https://webusers.imj-prg.fr/~bernhard.keller/lefevre/TheseFinale/tel-00007761.pdf`.

[PolPos] Alexander Polishchuk et Leonid Positselski, *Quadratic Algebras*, University Lecture Series, vol. 37, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[P] Alain Prouté, *A_∞-structures. Modèles minimaux de Baues-Lemaire et Kadeishvili et homologie des fibrations*, thèse de doctorat, (1986), disponible à l'adresse `http://www.logique.jussieu.fr/~alp/these_A_Proute-TAC.pdf`.

[Skol] Emil Sköldberg, *A contracting homotopy for Bardzell's resolution*, Math. Proc. Royal Irish Academy **108** (2008), no. 2, 111-117.

[Wei] Charles A. Weibel, *An introduction to Homological Algebra*, Cambridges Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge,1994.