MAT4213 - Géométrie différentielle
Deuxième semestre — 2020-2021

Fiche 1: Compléments sur les fonctiones lisses

Propriétés topologiques

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ l'application donnée par

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{si } x \in \mathbb{R}_{>0}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}_{\leq 0}. \end{cases}$$

(a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la n-ième dérivée $f^{(n)}$ de f existe et elle satisfait que

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \frac{P_n(x)e^{-1/x}}{x^{2n}}, & \text{si } x \in \mathbb{R}_{>0}, \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}_{\leq 0}, \end{cases}$$

pour un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$.

(b) Montrer que

$$c_n = \sup\{|f^{(n)}(x)| : x \in \mathbb{R}\} \in \mathbb{R}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

2. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$. Montrer que l'application $g_{x_0,r} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ donnée par

$$g_{x_0,r}(x) = f\big(r^2 - \|x - x_0\|^2\big)$$

pour $x \in \mathbb{R}^n$, où f est l'application définie dans l'exercice **1** et $\|\ \ \|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ est de classe C^∞ et elle satisfait que $g_{x_0,r}(x) = 0$ si et seulement si $x \in B(x_0, r)$, où $B(x_0, r)$ dénote la boule ouverte de centre x_0 et rayon r pour la norme euclidienne.

3. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte. Let but de cet exercice est de montrer qu'il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_{\geq 0})$ telle que $f(x) > 0$ si et seulement si $x \in U$.

(a) Si $U = \emptyset$, vérifier que $f \equiv 1$ satisfait la condition demandée.

(b) On suppose désormais que $U \neq \emptyset$.

(i) Montrer qu'il existe un récouvrement dénombrable $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de U tel que V_i est une boule ouverte de centre $x_i \in U$ et de rayon $r_i > 0$ pour la norme euclidienne pour tout $i \in \mathbb{N}$.

(ii) D'après l'exercice **2** définir $g_i = g_{x_i,r_i}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\sup\left\{\left|\frac{\partial^m g_i}{\partial x_1^{m_1} \dots \partial x_n^{m_n}}(x)\right| : x \in \mathbb{R}, (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n, m = m_1 + \dots + m_n \leq N\right\}$$

est un nombre réel pour tout $N \in \mathbb{N}$, que l'on dénotera c_N.

(iii) Pour tout n-uplet $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, on définit

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i c_i} \frac{\partial^k g_i}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x),$$

où $k = k_1 + \cdots + k_n$. Montrer que la série précédente est uniformément convergente sur $\mathbb{R}^n$ et elle définie alors une application $f_{\bar{k}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ donnée par la somme de la série précédente.

(iv) Montrer que

$$f_{\bar{k}} = \frac{\partial^k k}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $\bar{k} = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, où $k = k_1 + \cdots + k_n$. En déduire que f est de classe C^∞.

(v) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et que $f(x) > 0$ si et seulement si $x \in U$.

4. Soient A et B deux parties fermées de $\mathbb{R}^n$ telles que $A \cap B = \emptyset$. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ de classe C^∞ telle que $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$ et $f(x) \in \,]0,1[$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$.

5. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in U$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞. Montrer qu'il existe $r > 0$ et une application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tels que $f|_{B(x_0,r)} = g|_{B(x_0,r)}$.

6. Soit U une partie ouverte non vide de $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe une application $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ telle que $f^{-1}(\mathbb{R}_{\leq \lambda}) \subseteq \mathbb{R}^n$ est compact pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$A_n = \left\{ x \in U : \|x\| \leq n \text{ et } d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) \geq 1/2^n \right\},$$

où $d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) = \inf\{\|x - y\| : y \in \mathbb{R}^n \setminus U\}$ et $\| \ \|$ est la norme euclidienne. Montrer que

(i) A_n est fermé et $A_n \subseteq A_{n+1}^\circ$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(ii) $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^\circ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$.

D'après l'exercice **4** et le premier item, en déduire qu'il existe une application $f_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$ telle que $f_n|_{A_n} \equiv 0$, $f_n|_{\mathbb{R}^n \setminus A_{n+1}^\circ} \equiv 1$ et $f_n(x) \in \,]0,1[$ pour tout $x \in A_{n+1}^\circ \setminus A_n$.

(b) Montrer que la série

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

est convergente pour tout $x \in U$ et elle définie une fonction $f : U \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ de classe C^∞.

(c) Montrer que $f^{-1}(\mathbb{R}_{\leq \lambda}) \subseteq \mathbb{R}^n$ est borné pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et en conséquence compact.

7. *Lemme de Hadamard.* On rappelle qu'une partie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est **étoilée** s'il existe $x_0 \in A$ tel que $tx + (1-t)x_0 \in A$ pour $t \in [0,1]$ et $x \in A$. On dit que x_0 est un **centre** de A. Soit $U \subseteq \mathbb{R}^n$ une partie ouverte non vide et étoilée avec centre $x_0 \in U$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞.

(a) Étand donné $x \in U$, définir $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ via $g(t) = f(x_0 + t(x - x_0))$. Montrer que g est continue sur $[0,1]$ et de classe C^∞ sur $]0,1[$. En déduire que

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t)dt. \tag{1}$$

(b) À partir de l'item précédent déduire que

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{0,i}) f_i(x),$$

où

$$f_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}\big(x_0 + t(x - x_0)\big)dt$$

pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Montrer que $f_i : U \to \mathbb{R}$ est de classe C^∞ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$.

8. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que $f(x_0) = f(x_0') = 0$, avec x_0 et x_0' deux points différents de $\mathbb{R}^n$. Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe des fonctions $g_1, h_1, \dots, g_m, h_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telles que $g_i(x_0) = h_i(x_0') = 0$ pour tout $i \in [\![1,m]\!]$ et

$$f = \sum_{i=1}^{m} g_i h_i.$$

(a) Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application linéaire bijective satisfaisant $L(e_1) = x_0' - x_0$, où $e_1 = (1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$, et soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application donnée par

$$F(y) = x_0 + Ly.$$

Montrer que F est un C^∞-difféomorphisme.

(b) Utiliser l'item précédent pour montrer qu'il suffit de démontrer le résultat pour $x_0 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ et $x_0' = e_1$.

(c) On suppose désormais que $x_0 = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$ et $x_0' = e_1$. Utiliser l'exercice **7** pour montrer que

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\big(f_i(x) - f_i(e_1)\big) + \sum_{i=2}^{n} f_i(e_1) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i\big(f_i(x) - f_i(e_1)\big) + \sum_{i=2}^{n} f_i(e_1) x_i (1 - x_1) + x_1 \sum_{i=2}^{n} f_i(e_1) x_i. \end{aligned}$$

Conclure.

Propriétés algébriques

Dans cette section M dénotera une partie ouverte de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

9. On considère l'espace vectoriel $A = C^\infty(M,\mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$ pour la structure donnée par

$$(f+\lambda g)(p) = f(p) + \lambda g(p)$$

pour tout $p \in M$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f, g \in A$. On munit A du produit donné par

$$(f.g)(p) = f(p).g(p)$$

pour tout $p \in M$ et $f, g \in A$. Montrer que A est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative (avec unité), dont l'unité est la fonction $1_M \in A$ de valeur constante 1.

10. Soit $f : M \to \mathbb{R}$ une application de classe C^∞ et soit $p_0 \in M$. Utiliser l'exercice **7** pour montrer que $f(x_0) = 0$ si et seulement si f appartient à l'idéal $\mathfrak{m}_{p_0}$ de $C^\infty(M,\mathbb{R})$ engendré par $\{p_i - p_{0,i} : i \in [\![1,n]\!]\}$. En déduire que l'application $\mathbb{R}$-linéaire $C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ donnée par l'évaluation en p_0 induit un isomorphisme $C^\infty(M,\mathbb{R})/\mathfrak{m}_{p_0} \cong \mathbb{R}$. On dénotera $\mathbb{R}_{p_0}$ le $C^\infty(M,\mathbb{R})$-module $C^\infty(M,\mathbb{R})/\mathfrak{m}_{p_0}$.

11. On rappelle que si A est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative et X est un A-module, on considère l'ensemble

$$\mathsf{Der}_{\mathbb{R}}(A,X) = \left\{ d \in \mathsf{Hom}_{\mathbb{R}}(A,X) : d(fg) = f\,d(g) + g\,d(f), \text{ pour tous } f, g \in A \right\}.$$

Un élément de $\mathsf{Der}_{\mathbb{R}}(A,X)$ est appelé une **dérivation** de A dans X. Étant donnés $f \in A$ et $d \in \mathsf{Der}_{\mathbb{R}}(A,X)$, on définit l'application $f.d : A \to X$ donnée par

$$(f.d)(g) = f.d(g)$$

pour $g \in A$. Montrer $f.d \in \mathsf{Der}_{\mathbb{R}}(A,X)$ et que cela induit une structure de A-module sur $\mathsf{Der}_{\mathbb{R}}(A,X)$.

12. (a) On rappelle que, étant donné $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, $p \in M$ et $v \in \mathbb{R}^n$, $v_p(f) \in \mathbb{R}$ est la dérivée directionnelle de f en p dans la direction de v. Montrer que l'application $v_p : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_p$ qui associe $v_p(f)$ à $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ est une dérivation, où l'on a utilisé la terminologie de l'exercice **10**.

(b) Utiliser l'exercice **7** pour montrer que l'application $\mathbb{R}$-linéaire

$$\mathbb{R}^n \to \mathsf{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}_p)$$

qui associe v_p à $v \in \mathbb{R}^n$ est bijective. Conclure que l'on peut identifier l'espace tangent T_pM avec $\mathsf{Der}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R}_p)$.

13. (a) On rappelle qu'un **champ vectoriel** sur M est un élément de l'ensemble $\mathfrak{X}(M) = C^\infty(M,\mathbb{R}^n)$. Étant donnés $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ et $V \in \mathfrak{X}(M)$, on définit l'application $f.V : M \to \mathbb{R}^n$ donnée par $(f.V)(p) = f(p)V(p)$ pour tout $p \in M$. Montrer que cette définition induit une structure de $C^\infty(M,\mathbb{R})$-module sur $\mathfrak{X}(M)$.

(b) Soit $V \in \mathfrak{X}(M)$ un champ vectoriel sur M. Étant donné $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, on définit l'application $V(f) : M \to \mathbb{R}$ donnée par $V(f)(p) = V(p)_p(f)$, pour tout $p \in M$. Montrer que $V(f) \in C^\infty(M,\mathbb{R})$.

(*c*) Soit $V \in \mathfrak{X}(M)$ un champ vectoriel sur M. On définit une application

$$X(V) : C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

qui associe $V(f)$ à f. Montrer que $X(V) \in \mathsf{Der}_{\mathbb{R}}(C^{\infty}(M,\mathbb{R}), C^{\infty}(M,\mathbb{R}))$.

(*d*) Utiliser l'exercice **7** pour montrer que l'application

$$\mathfrak{X}(M) \to \mathsf{Der}_{\mathbb{R}}(C^{\infty}(M,\mathbb{R}), C^{\infty}(M,\mathbb{R}))$$

qui associe $X(V)$ à $V \in \mathfrak{X}(M)$ est un isomorphisme de modules sur $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$. Conclure que l'on peut alors identifier l'espace de champs vectoriels avec les dérivations de $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ dans lui-même.

14. (*a*) Soit $k \in \mathbb{N}$. On rappelle qu'une k-**forme (différentielle)** sur M est une élément de l'ensemble $\Omega^k(M) = C^{\infty}(M, \Lambda^k_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)^*)$, où $(\mathbb{R}^n)^* = \mathsf{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Noter que $\Omega^0(M) = C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ et que $\Omega^k(M) = 0$ si $k > n$. Étant donné une fonction $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ et une k-forme $\omega \in \Omega^k(M)$, on définit l'application $f.\omega : M \to \Lambda^k_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)^*$ par $(f.\omega)(p) = f(p)\omega(p)$ pour tout $p \in M$. Montrer que cette définition induit une structure de $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$-module sur $\Omega^k(M)$.

(*b*) On définit $\Omega(M) = \oplus_{k\in\mathbb{N}}\Omega^k(M)$. Étant donnés des formes $\omega \in \Omega^k(M)$ et $\eta \in \Omega^{\ell}(M)$, avec $k,\ell \in [\![0,n]\!]$, on définit l'application $\omega \wedge \eta : M \to \Lambda^{k+\ell}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)^*$ donnée par $(\omega\wedge\eta)(p) = \omega(p)\wedge\eta(p)$ pour $p \in M$, si $k,\ell > 0$, et par le produit définit dans l'item précédent, si $k = 0$ ou $\ell = 0$. Montrer que $(\Omega(M),\wedge)$ est une A-algèbre qui satisfait que

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{k\ell}\eta \wedge \omega,$$

pour $\omega \in \Omega^k(M)$ et $\eta \in \Omega^{\ell}(M)$.

15. (*a*) Étant donné éléments $\omega \in \Omega^1(M)$ et $V \in \mathfrak{X}(M)$, on définit l'application $\langle \omega, V\rangle : M \to \mathbb{R}$ par $\langle \omega, V\rangle(p) = \omega(p)(V(p))$, pour tout $p \in M$. Montrer que $\langle \omega, V\rangle$ est une fonction de classe C^{∞} et que

$$\langle f.\omega, V\rangle = \langle \omega, f.V\rangle = f.\langle \omega, V\rangle$$

pour tout $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$.

(*b*) À partir de l'item précédent déduire des applications

$$\Omega^1(M) \to \mathsf{Hom}_{C^{\infty}(M,\mathbb{R})}\big(\mathfrak{X}(M), C^{\infty}(M,\mathbb{R})\big)$$

et

$$\mathfrak{X}(M) \to \mathsf{Hom}_{C^{\infty}(M,\mathbb{R})}\big(\Omega^1(M), C^{\infty}(M,\mathbb{R})\big).$$

Vérifier qu'elles sont des isomorphismes de modules sur $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$, où l'on rappelle que, étant donné deux A-modules X et Y sur une algèbre commutative A, $\mathsf{Hom}_A(X,Y)$ possède une structure de A-module via $(f.\phi)(x) = f.\phi(x)$, pour tout $x \in X$, $f \in A$ et $\phi \in \mathsf{Hom}_A(X,Y)$.