Licence L3 mathématiques - Parcours B - 2022-2023

Calcul différentiel

Enseignant en charge des TD : Zindine DJADLI

Exercices de révision

Exercice 1

Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x+y}{x-y}\right), \quad g(x,y) = \sqrt{1-(x-y)^2},$$
$$h(x,y) = \frac{1}{\sqrt{y-\sqrt{x}}}, \qquad k(x,y) = \ln\left(\frac{y}{x^2+y^2-1}\right).$$

Exercice 2

Tracer quelques courbes de niveau pour les fonctions suivantes :

$$f(x,y) = x^2 - 9y^2, \quad g(x,y) = x^2 + 9y^2, \quad h(x,y) = x^2 + x + y^2.$$

Exercice 3

On considère la fonction réelle $f(x,y) = 4y^2 - 2y + 4x^2 + x$.

1. Calculer $f(-1,1)$.
2. On note C la courbe de niveau $f = 5$. Quelle est sa nature ?
3. Tracer la courbe C.
4. Donner une paramétrisation $c : I \to C$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et c une application dérivable sur I.
5. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
6. Montrer que pour tout $t \in I$, tout vecteur tangent $v(t)$ à la courbe C au point $(x(t),y(t))$ est orthogonal au gradient $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t),y(t)), \frac{\partial f}{\partial y}(x(t),y(t))\right)$.
7. Déterminer l'ensemble des points (x,y) de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(x,y) \leq 5$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 1 - \dfrac{x^2}{4}$.

1. Dessiner la représentation graphique S de f.
2. Quelles sont les lignes de niveau de f ?

3. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tout vecteur tangent v en (x, y) à la ligne de niveau de f qui contient (x, y) est orthogonal au gradient $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$.

Exercice 5

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$.
   (a) Quel est le domaine de définition de f ?
   (b) Quelles sont les courbes de niveau de f ?
2. Soient plus généralement $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable, et $h : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application $(x, y) \mapsto h(x, y) = g(\dfrac{y}{x})$.
   (a) Montrer que pour tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2$ privé de l'axe Oy on a
   $$x\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0\,.$$
   (b) Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 6

Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité en (0,0) ?

$$f_1(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}\,, \qquad f_2(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}\,, \qquad f_3(x, y) = \frac{1 + x + y}{x^2 + y^2}\,,$$
$$f_4(x, y) = \frac{x^5 y^3}{x^6 + y^4}\,, \qquad f_5(x, y) = \frac{\sin(x^4) + \sin(y^4)}{\sqrt{x^4 + y^4}}\,, \qquad f_6(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}\,.$$

Exercice 7

Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$f(0, 0) = 0$,
si $(x, y) \in \mathcal{P} \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = 1$,
si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{P}$, $f(x, y) = 0$.

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.
2. Pour tout vecteur v de $\mathbb{R}^2$, montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $t \mapsto f(tv)$ est continue en 0.

Différentiabilité

Exercice 1:

Soient $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, $\mathbb{K} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})$. On note $\mathcal{B}(X,Y)$ l'ensemble des applications linéaires bornées $X \to Y$:

$$\mathcal{B}(X,Y) := \Big\{ L : X \to Y \;\Big|\; \exists C \geqslant 0,\ \forall x \in X,\ \|Lx\|_Y \leqslant C\|x\|_X \Big\}.$$

Soit $L \in \mathcal{B}(X,Y)$; on définit les quantités suivantes :

$$c_1 := \sup \Big\{ \|Lx\|_Y \;\Big|\; \|x\|_X = 1 \Big\},$$
$$c_2 := \sup \Big\{ \|Lx\|_Y \;\Big|\; \|x\|_X \leqslant 1 \Big\},$$
$$c_3 := \sup \left\{ \frac{\|Lx\|_Y}{\|x\|_X} \;\middle|\; x \neq 0_X \right\}.$$

1. Montrer que $c_1 = c_2 = c_3$. On notera alors $|||L|||$ cette quantité.
2. Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme.
3. Montrer que $\|Lx\|_Y \leqslant |||L|||\,\|x\|_X$ pour tout $x \in X$.
4. Montrer qu'une application linéaire $X \to Y$ est bornée si et seulement si elle est continue.
5. Soient $(Z, \|\cdot\|_Z)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et $L' \in \mathcal{B}(Y,Z)$. Montrer que $L' \circ L \in \mathcal{B}(X,Z)$ et $|||L' \circ L||| \leqslant |||L'|||\,|||L|||$.

Exercice 2:

On fixe $\mathbb{K} \in (\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Soit $(X, \|\cdot\|)$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Banach unitaire *i.e.* un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et complet muni d'une loi de composition interne associative et bilinéaire

$$X \times X \ni (x, x') \longmapsto xx' \in X$$

dont l'élément neutre est noté $\mathbb{1}$, tels que

$$\|xx'\| \leqslant \|x\|\|x'\| \text{ (sous-multiplicativité)}, \qquad \|\mathbb{1}\| = 1.$$

On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des éléments inversibles de X.

1. Soit $h \in X$ tel que $\|h\| < 1$. Montrer que $\mathbb{1} - h \in \mathcal{U}$ et

$$(\mathbb{1} - h)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} h^k =: \lim_{N \to +\infty} \sum_{k=0}^{N} h^k.$$

2. Soit $x \in \mathcal{U}$. Montrer que $x + h \in \mathcal{U}$ dès que $\|x^{-1}h\| < 1$.
3. En déduite que $B(x, \varepsilon) \subset \mathcal{U}$ pour tout $\varepsilon \in \left]0, 1/\|x^{-1}\|\right[$ et donc que $\mathcal{U}$ est un ouvert pour la topologie induite par la norme $\| \cdot \|$.
4. Montrer que l'application

$$\Psi : \mathcal{U} \ni x \longmapsto x^{-1} \in \mathcal{U}$$

est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 3:

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $a \in U$, $f : U \to \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{R}^n$. On rappelle que la limite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t},$$

quand elle existe, est la **dérivée directionnelle** de f au point a, dans la direction v.

1. Notons $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Lorsqu'elle existe, que vaut la dérivée directionnelle de f au point a, dans la direction e_i ?
2. Si f est différentiable en a, montrer qu'elle admet une dérivée directionnelle en a dans toute direction v, dérivée qui dépend linéairement de v.
3. a) On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel et de la norme associée. On suppose que f est différentiable en a. Montrer que si $v \in \mathbb{R}^n$ est de norme 1, on a $df(a)(v) \leqslant \|\nabla f(a)\|$, avec égalité si et seulement si v est positivement colinéaire au gradient (en d'autres termes, le gradient pointe dans la direction de plus grande pente).

   b) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2}$. Calculer $\nabla f(x, y)$ en un point quelconque. Pour quels (x, y) la direction en (x, y) de pente la plus négative pointe-t-elle vers l'origine ?
4. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $\gamma : I \to U$ différentiable, telle que $f(\gamma(t))$ est constante. Montrer qu'alors pour tout t, $\gamma'(t)$ est orthogonal au gradient $\nabla f(\gamma(t))$ (en d'autres termes, le gradient est orthogonal aux ensembles de niveau de f).

Exercice 4:

Pour les applications suivantes et pour tout point m de l'espace de départ, calculer la matrice jacobienne de f en m et expliciter $df(m)$. Calculer ensuite la dérivée directionnelle de f en 0, dans la direction v.

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = (x + y)e^{-y^2}$ et $v = (3, 1)$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y, z) = (x + y + z, x^2 + y^2)$ et $v = (1, 1, 1)$.
3. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(t) = (t \sin t,\ t \cos t,\ t^2)$ et $v = 2$.

Exercice 5:

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ données respectivement par $f(x,y) = \sin(x^2 - y^2)$ et $g(x,y) = (x+y, x-y)$. Pour tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2$, déterminer de deux manières différentes la différentielle de $f \circ g$ en un point (x,y) de $\mathbb{R}^2$ et donner sa matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}$.

Exercice 6:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$ et différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$.
3. L'application f est-elle différentiable en $(0,0)$?
4. L'application f admet-elle des dérivées partielles continues en $(0,0)$?

Exercice 7:

a) Représenter le graphe des fonctions $f_1(x,y) = x^2$, $f_2(x,y) = y^2$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, puis celui de $f(x,y) = \min\left(x^2, y^2\right)$.

b) Montrer que la fonction f n'est pas différentiable en (x_0, x_0) si $x_0 \neq 0$.

c) Montrer que la fonction f est différentiable en $(0,0)$.

d) Montrer que la fonction f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

e) Montrer que la fonction f n'admet de dérivées partielles dans aucun voisinage de $(0,0)$.

f) Montrer que la réciproque du théorème : *"Si f admet dans un voisinage de (x_0, y_0) des dérivées partielles et que ces dérivées partielles sont continues en (x_0, y_0), alors f est différentiable en (x_0, y_0)"* est fausse.

Exercice 8:

Donner le domaine de différentiabilité et le cas échéant la différentielle des applications f, g, h suivantes :

1. f, g et h applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définies par
   $f(x) = \|x\|^2$, $g(x) = \|x\|$ et $h(x) =< u(x), x >$, où $< \, , \, >$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, $|| \; ||$ désigne la norme euclidienne associée, et u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$.
2. $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ et $g : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définies respectivement par $f(A) = A^2$ et $g(A) = A^3$.
3. $f : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A,B) = AB$.
4. $g : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $g(A,B) = \mathrm{tr}(AB)$.

Exercice 9:

On appelle **surface** S de $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des points (x, y, z) tels que $g(x, y, z) = 0$, où $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est donnée, de classe C^1. On dit que S est la surface d'équation $g = 0$. Soit alors $m = (x, y, z) \in S$. On dit que le **vecteur** $v \in \mathbb{R}^3$ est **tangent à** S **en** m lorsqu'il existe un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$, un réel $t_0 \in I$ et une courbe $c : I \to S$ de classe C^1 tels que $c(t_0) = m$ et $c'(t_0) = v$.

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et $S \subset \mathbb{R}^3$ son graphe, c'est-à-dire la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $g = 0$ où pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on pose $g(x, y, z) = z - f(x, y)$.

1. Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker} dg(m)$?
2. Montrer que l'ensemble des vecteurs tangents à S en m est $\mathrm{Ker} dg(m)$.
   Nous dirons que **l'espace tangent à** S **en** m est le sous-espace affine de $\mathbb{R}^3$ qui contient m et dont la direction est $\mathrm{Ker} dg(m)$. On le note $T_m S = T_m f$.
3. Écrire l'équation de $T_m S$ à l'aide de la fonction f.

Exercice 10:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y) = x^2 y - 3xy + xy^2$.

1. Montrer que le point $(1, -1, 3)$ appartient au graphe de f. Donner une équation du plan tangent au graphe de f en ce point.
2. Calculer le gradient de f en $(1, -1)$. Donner une équation de la tangente à la courbe de niveau 3 au point $(1, -1)$.
3. Écrire une équation du plan tangent au graphe de f en un point quelconque $(a, b, f(a, b))$. Pour quels points (a, b) ce plan contient-il l'origine ?

Exercice 11:

Soit $h : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ une application dérivable et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = h(x^2 + y^2)$. On note S le graphe de f.

1. Soit r une rotation d'axe Oz. Montrer que $r(S) = S$.
2. Montrer que si v est un vecteur tangent à S en un point m de S alors $r(v)$ est un vecteur tangent à S en $r(m)$.
3. On considère $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$, et S son graphe. Montrer que S contient les points $m_1 = (\sqrt{2}, 0, \dfrac{1}{2} \ln 2)$ et $m_2 = (1, 1, \dfrac{1}{2} \ln 2)$. Donner les équations de T_1 et T_2 les plans tangents à S en m_1 et m_2. Vérifier que $r(T_1) = T_2$, où r est la rotation d'axe Oz qui envoie m_1 sur m_2.

Exercice 12:

Dans cet exercice, nous cherchons à calculer la différentielle de l'application :

$$\mathbf{Det} \; : \; \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & Det(A). \end{array}$$

1. Montrer que Det est une application de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que :
$$D\mathbf{Det}(I_n)[H] = tr(H)$$
pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. En déduire que :
$$D\mathbf{Det}(A)[H] = Det(A)tr(A^{-1}H)$$
pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que l'application :
$$A \mapsto \mathbf{Det}(A)A^{-1}$$
est $\mathcal{C}^\infty$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.
6. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
7. Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, notons $\tilde{A}$ la matrice des cofacteurs de A. Montrer que :
$$D\mathbf{Det}(A)[H] = tr({}^t\tilde{A}H).$$

Accroissements finis - Dérivées d'ordre supérieur

Exercice 1:

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 2$) et $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction. On écrit $\mathbb{R}^n = E_1 \times E_2$, où $E_1 = \mathbb{R}^{n-m}$ et $E_2 = \mathbb{R}^m$ pour $1 \leqslant m < n$. On considère un point $a = (a_1, \ldots, a_n)$ de U, noté $(a_{\underline{1}}, a_{\underline{2}}) \in E_1 \times E_2$. Si elles existent, on note $d_i f(a)\colon E_i \to \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) les différentielles partielles de f.

1. On suppose que les différentielles $d_1 f(a)$ et $d_2 f(a)$ existent. Montrer que les n dérivées partielles de f en a existent et les expliciter.
2. Que peut-on dire si f est différentiable en a ? Exprimer $df(a)$.
3. Montrer que si f est de classe C^1 sur U, ses différentielles partielles sont continues sur U.

Exercice 2:

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f\colon U \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Soient a, b deux points distincts de U.

1. Justifier qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = df(c)(b - a)$.
2. De combien de décimales exactes des nombres e, $\sqrt{2}$ et π a-t-on besoin pour pouvoir calculer le nombre $\sqrt{2}/(e + \pi^3)$ à 10^{-10} près ?

Exercice 3:

Soit $(E, \|.\|)$ une espace de Banach et $\mathcal{U} \subset E$ un ouvert connexe par arcs de E. Soient $a, b \in \mathcal{U}$ tels qu'il existe $r_a, r_b > 0$ avec $B(a, r_a) \subset \mathcal{U}$, $B(b, r_b) \subset \mathcal{U}$ et $B(a, r_a) \cap B(b, r_b) \neq \emptyset$.

1. Déterminer une formule explicite pour le segment $[a, b]$ allant de a à b et montrer qu'il est inclus dans $\mathcal{U}$.
2. Montrer que $[a, b] \subset B(a, r_a) \cup B(b, r_b)$.

Exercice 4:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x, y) = \Big(\dfrac{1}{2}\sin(x + y), \dfrac{1}{2}\cos(x - y)\Big)$.

1. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne usuelle $\|.\|_2$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,
$$|\!|\!| df(x, y) |\!|\!|_2 \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$
2. Qu'en déduit-on pour f ? Montrer que f admet au plus un point fixe.
3. (a) Plus généralement, soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$. Montrer alors que f est Lipschitzienne sur toute boule ouverte $B(0, R)$ avec $R > 0$.

(b) Réciproquement, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est différentiable et Lipschitzienne de rapport K, montrer que, en tout point $a \in \mathbb{R}^n$, $df(a)$ est bornée.

Exercice 5: 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, et $f(0,0) = 0$.

a) Montrer que f est différentiable sur tout $\mathbb{R}^2$. Calculer $df(0,0)$ et $df(1,1)$.

b) Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et les comparer.

2. Pour la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y,z) = ye^z + \dfrac{e^y}{x} + xy\sin(z)$, vérifier si les dérivées partielles mixtes d'ordre 2 coïncident. Calculer la différentielle seconde $d^2g(1,2,0)$.

Exercice 6:

On suppose que $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe C^2 et que la fonction $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ est nulle sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que f s'écrit sous la forme

$$f(x,y) = g(x) + h(y),$$

où g et h sont deux fonctions de classe C^2.

Exercice 7:

On se propose de déterminer toutes les fonctions $f\,(x,t)$ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial t^2} - c^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ (ici c est une constante réelle, on suppose $c > 0$). Si f est une telle fonction, on définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g\,(u,v) = f\left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{u-v}{2c}\right)$.

1. Exprimer dg à l'aide des dérivées partielles de f.
   En déduire les dérivées partielles de g.
2. Calculer $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$ en termes de dérivées partielles de f.
3. En déduire la forme de g, puis de f.
4. Vérifier que toute fonction f de la forme précédente est bien solution de l'équation.

Exercice 8:

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et (a,b) un point de U. On suppose qu'il existe des constantes $c_1, ..., c_5$, et une fonction $\epsilon : U \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{(h,k)\to 0} \epsilon(h,k) = 0$, qui vérifient : pour tout (h,k) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $(a+h, b+k) \in U$,

$$f(a+h, b+k) = f(a,b) + c_1h + c_2k + c_3h^2 + c_4hk + c_5k^2 + ||(h,k)||^2\epsilon(h,k)\,.$$

Montrer qu'une telle écriture est unique.

Exercice 9:

Calculer le polynôme de Taylor d'ordre deux des fonctions suivantes.

1. $f(x,y) = (x+y)^2$ en $(0,0)$,
2. $f(x,y) = e^{x+y}$ en $(0,0)$,
3. $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0,0)$,
4. $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos(y)$ en $(1,0)$,
5. $f(x,y) = \sin(xy)$ en $(1,\pi)$,
6. $f(x,y) = e^x\sin(y)$ en $(2,\frac{\pi}{4})$,
7. $f(x,y) = \ln(1+xy)$ en $(2,3)$,
8. $f(x,y) = x+xy+2y$ en $(1,1)$.
9. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{x+y+z+1}$ en $(0,0,0)$,
10. $f(x,y,z) = e^x yz^2$ en $(0,1,1)$.

Exercice 10:

Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe C^r, où $r \geqslant 2$ et I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ qui contient 0.

1. Montrer que pour tout $x \in I$ $\varphi(x) = \varphi(0) + \displaystyle\int_0^1 \varphi'(tx)x\,dt$.
2. Montrer (par récurrence) que pour tout $x \in I$

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{r-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}x^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^{r-1}}{(r-1)!}\varphi^{(r)}(tx)x^r\,dt\,.$$

Exercice 11:

Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, et $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2. Soit $a \in U$, $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, si $||h|| < \delta$ alors $a+h \in U$. Étant donné h avec $\|h\| < \delta$, on considère la fonction $\varphi : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(a+th)$.

1. Montrer que φ est bien définie au moins sur un intervalle ouvert J qui contient $[-1,1]$ (dans la suite on suppose J choisi ainsi).
2. Montrer que pour tout $t \in J$, $\varphi'(t) = df(a+th)(h)$.
3. Montrer que pour tout $t \in J$, $\varphi''(t) = d^2f(a+th)(h)(h)$.
4. En déduire les formules de Taylor avec reste intégral suivantes :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \int_0^1 (1-t)d^2f(a+th)(h,h)dt$$

$$f(a+h) = f(a)+df(a)(h)+\frac{1}{2}d^2f(a)(h,h)+\int_0^1 (1-t)(d^2f(a+th)-d^2f(a))(h,h)dt\,.$$

5. Montrer que le reste intégral de la seconde formule est un $o(\|h\|^2)$.

Exercice 12:

Soit f une fonction de classe C^2 définie sur U un ouvert de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On appelle *Laplacien de* f la fonction $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, définie sur U. On considère $g : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ définie par $g(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$, et on pose $F = f \circ g$.

1. Calculer $\Delta f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ en fonction des dérivées partielles de F.
2. Application : trouver toutes les fonctions ϕ de classe C^2 sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que la fonction $f(x,y) = \phi\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ vérifie $\Delta f(x,y) = 0$ en tout point (x,y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Recherche d'extrema

Exercice 1:

Chercher les extrema relatifs des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$,
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)$,
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$,
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2y + 1$,
5. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y, z) = \dfrac{x^2}{2} + xyz - z + y$,

Exercice 2:

Soit E un espace vectoriel euclidien, dont on note $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire et $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme associée. Soit $u : E \to E$ un endomorphisme symétrique, c'est-à-dire tel que

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle \text{ pour tous } x, y \in E.$$

1. On définit une application $\varphi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}$. Montrer que φ est différentiable, et calculer sa différentielle $d\varphi(a)$ en un point quelconque $a \in E \setminus \{0\}$.
2. Montrer que $d\varphi(a) = 0$ si et seulement si a est un vecteur propre de u.
3. Montrer que la restriction de l'application φ à la sphère unité S de E admet un maximum en un point x_0 de S.
4. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, $\varphi(\lambda x) = \varphi(x)$.
5. En déduire que l'application $\varphi : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ admet un maximum global en x_0.
6. Montrer que x_0 est un vecteur propre de u.

Exercice 3:

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 qui admet un extremum strict en $a \in \mathbb{R}^n$. La forme bilinéaire $d^2 f(a)$ est-elle nécessairement définie positive ou négative ?

Exercice 4:

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x, y) = 2\cos x \cos y - x^2 + y^2$ admet-elle un extremum local en $(0, 0)$?

Exercice 5:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$.

1. Montrer que $(0, 0)$ est un point critique qui n'est pas un extremum.
2. Montrer que f admet un minimum local en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. Montrer que f n'admet pas d'autre extremum local.
4. Montrer que f admet un minimum global en $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et en $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Exercice 6:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \left(y - 3x^2\right)\left(y - x^2\right)$.

1. Montrer que $(0,0)$ est un point critique pour f et calculer $d^2 f(0,0)$.
2. Montrer que f a un minimum local en $(0,0)$ sur toute droite qui passe par $(0,0)$, i.e., si $g(t) = (at, bt)$ alors $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a un minimum local en 0 pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ pour lesquels soit $a \neq 0$, soit $b \neq 0$.
3. Montrer que $(0,0)$ est un point-col.

Exercice 7:

1. Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 et $a \in U$. Montrer que si $d^2 f(a)$ est définie positive, alors au voisinage de a, le graphe de f est au dessus de celui de son approximation affine en a.
2. On prend $n = 2$ et on considère la fonction $f\colon\ (x,y) \mapsto x - 2\left(x^2 + y^2\right)^2$.

   a) Soit $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Donner l'approximation affine f_1 de f en a et calculer $\mathrm{Hess}_f(a)$.

   b) Comparer les graphes de f et f_1 au voisinage de a.

Problèmes d'inversion locale et globale

Exercice 1:

1. Pour les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ci-dessous, trouver des ouverts U et V de $\mathbb{R}$ tels que
   (a) la restriction de f à U soit une bijection de U sur V ;
   (b) la restriction de f à U soit un difféomorphisme de U sur V.

   i) $f(x) = x^3$, ii) $f(x) = x^2$, iii) $f(x) = \sin x$.
2. Reprendre (b) avec iii) en imposant que $\pi \in U$. Donner alors la dérivée de $f_{|U}^{-1}$.

Exercice 2:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

1. Montrer que f est localement inversible au voisinage de tout point mais ne l'est pas globalement.
2. Trouver deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^2$ tels que la restriction de f à U soit un difféomorphisme $f_{|U}$ de U sur V.
3. Pour tout couple (x, y) de U, déterminer $d(f_{|U}^{-1})(f(x, y))$.

Exercice 3:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $f(x, y) = (x^2 + y^2, e^{xy})$.

1. Au voisinage de quels points f est-elle un difféomorphisme local ? On montrera qu'il s'agit des points d'un ouvert U_0 contenant $(1, 0)$.
2. f est-elle un difféomorphisme global de U_0 sur $f(U_0)$?
3. Trouver deux ouverts U et V de $\mathbb{R}^2$ tels que $(1, 0) \in U$ et que f établisse un difféomorphisme $f_{|U}$ de U sur V.
4. Donner le développement de Taylor à l'ordre 1 de $f_{|U}^{-1}$ au voisinage de $(1, 1)$.
5. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$. L'application f est-elle ouverte ?

Exercice 4:

Soit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(x,y,z) = (x+y, \frac{y}{x}, \frac{z}{x})$. On considère les ouverts

$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x > 0 \text{ et } x+y > 0\}$ et $V = \{(a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \mid a > 0 \text{ et } b > -1\}$ de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que la restriction de f à U est un difféomorphisme $f_{|U}$ de U sur V.
2. Déterminer $d(f_{|U}^{-1})\big((\frac{1}{2}, 0, 1)\big)$.

Exercice 5:

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable telle que df ne s'annule pas sur U. Montrer que $f(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 6:

Soient $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = A^2$, et $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ une matrice diagonale. À quelle condition sur les $(d_i)_i$ l'application f est-elle un difféomorphisme local en D ? exemple : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7:

On considère l'espace vectoriel E des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont le degré est au plus n.

1. On définit l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to E$ par $f((s, x_1, ..., x_n)) = s \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)$. Calculer les dérivées partielles de f par rapport à s et par rapport aux x_i.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.
3. Montrer que f est un difféomorphisme local en $(s, x_1, ..., x_n)$ si et seulement si s n'est pas nul et les x_i sont tous distincts.
4. On note D l'ensemble des polynômes non nuls de E ayant n racines distinctes réelles. Montrer que D est un ouvert de E.
5. Soit $P \in D$. Montrer qu'il existe un ouvert U de D contenant P, une application $c : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et n applications $r_i : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que pour tout polynôme Q de U, on ait :

$$Q = c(Q) \prod_{i=1}^{n} (X - r_i(Q)) .$$

Fonctions implicites

Exercice 1:

Déterminer les points (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $x_0 - y_0 - \sin y_0 = 0$ et au voisinage desquels l'équation $x - y - \sin y = 0$ définit une fonction de classe C^1 $y = \varphi(x)$. Donner alors φ'.

Exercice 2:

Dans les exemples ci-dessous on donne une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et un point $m_0 = (x_0, y_0)$ de $\mathbb{R}^2$ tels que $f(m_0) = 0$. Pour chacun, montrer qu'il existe un voisinage U de x_0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage V de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$, et une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ tels que

$$((x, y) \in V \text{ et } f(x, y) = 0) \iff (x \in U \text{ et } \varphi(x) = y)\,.$$

Donner un développement limité à l'ordre 2 de φ en x_0, et l'allure de la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ au voisinage de m_0.

1. $f(x, y) = \sin(x + y) + \cos(x - y) - 1$ et $m_0 = (0, 0)$;
2. $f(x, y) = ye^x + xe^y - 1$ et $m_0 = (0, 1)$.

Exercice 3:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction donnée par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12xy$. On note $\mathcal{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^2$ d'équation $f(x, y) = 0$.

1. Au voisinage de quels points de $\mathcal{C}$ peut-on définir $\mathcal{C}$ par
   (a) une relation $y = \varphi(x)$, avec φ de classe C^1 ?
   (b) une relation $x = \psi(y)$, avec ψ de classe C^1 ?

   Donner dans chaque cas la propriété vérifiée par la tangente à $\mathcal{C}$ en ces points ; cette propriété caractérise-t-elle les points obtenus ?
2. Remarquer que chaque droite $D_t : y = tx$ coupe $\mathcal{C}$ en deux points dont le point $(0, 0)$. En déduire une paramétrisation de $\mathcal{C} \setminus \{(0, 0)\}$.
3. On note $x_1 = 4 \cdot 2^{2/3}$. Déterminer les valeurs de y telles que $(x_1, y) \in \mathcal{C}$. Donner pour chacune l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en (x_1, y).

Exercice 4:

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction $(x, y) \mapsto y^3 - 2y^2 + y - x^2y$.

1. Déterminer les points critiques de f.

2. Décrire l'ensemble de niveau $f(x, y) = 0$.
3. Déterminer la nature des points critiques (maximum ou minimum local, ou point col).
4. Pourquoi les ensembles de niveau qui ne passent pas par un point critique sont-ils des courbes régulières ?
5. Au voisinage de quels points m de $\mathbb{R}^2$ peut-on définir l'ensemble de niveau passant par m par une relation $x = \psi(y)$, avec ψ de classe C^1 ?

Exercice 5:

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4\sqrt{x^2 + y^2} + z^2 + 4$$

et S la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $f(x, y, z) = 1$.

1. Déterminer l'ensemble S_1 des points de S au voisinage desquels on peut paramétrer S par (x, y), c'est-à-dire l'ensemble des points (a, b, c) de S pour lesquels il existe un voisinage U de (a, b) dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage V de (a, b, c) dans $\mathbb{R}^3$ et une fonction $\varphi : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que

$$((x, y, z) \in V \cap S) \iff ((x, y) \in U \text{ et } \varphi(x, y) = z).$$

2. Pour un point (a, b, c) de S_1, que vaut la différentielle $d\varphi$ au point (a, b) ?
3. On note $m_0 = (3/2, 0, \sqrt{3}/2)$. Vérifier que $m_0 \in S_1$ et donner :
   (a) l'équation du plan tangent T_0 à S en m_0.
   (b) le développement de Taylor à l'ordre 2 de φ en $(3/2, 0)$.
4. Étudier la position de la surface S par rapport au plan T_0, au voisinage de m_0.
5. Soit r une rotation d'axe Oz.
   (a) Montrer que $r(S) \subset S$.
   (b) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^3$ une application de classe C^1 telle que $\gamma(I) \subset S$, et soit $t_0 \in I$ pour lequel $\gamma(t_0)$ appartient à S_1. Le vecteur $\gamma'(t_0)$ appartient alors à la direction du plan tangent T à S en $\gamma(t_0)$. Montrer que $r(\gamma'(t_0))$ appartient à la direction du plan tangent T' à S en $r(\gamma(t_0))$.
   (c) Qu'en déduit-on sur T' et T ? (voir la feuille *différentiabilité*, exercice 8).

Exercice 6:

Soit S le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $S = \{(q, p, x) \in \mathbb{R}^3 \mid x^3 + px + q = 0\}$.

1. Soit $M \in S$. Montrer qu'au voisinage de M S est localement le graphe d'une fonction C^∞ de (q,p) si et seulement si le vecteur $(0,0,1)$ n'est pas tangent à S en M.
2. Soit C l'ensemble des points de S en lesquels le vecteur $(0,0,1)$ est tangent à S. Montrer qu'un point (q,p,x) appartient à C si et seulement si x est racine multiple du polynôme $P = X^3 + pX + q$.
3. On note $\pi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la projection $(q,p,x) \mapsto (q,p)$. Déterminer $\pi(C)$.
4. Montrer que si (q,p) n'appartient pas à $\pi(C)$, alors le polynôme $P = X^3 + pX + q$ a ses racines simples et chaque racine réelle de P dépend localement de façon C^∞ des coefficients de P.
5. Que se passe-t-il lorsque (q,p) appartient à $\pi(C)$?

Exercice 7:

On considère dans $\mathbb{R}^3$ la courbe $\mathcal{C} = S \cap Y$ où S est la sphère unité, et Y le cylindre vertical dont la base est le cercle de centre $(1/2, 0, 0)$ et de rayon $1/2$.

1. La courbe $\mathcal{C}$ contient-elle un point au voisinage duquel elle ne peut être paramétrée ni par x, ni par y ni par z ?
2. Quels sont les points de $\mathcal{C}$ au voisinage desquels la courbe $\mathcal{C}$ peut être paramétrée par la coordonnée z de façon C^1 ?
3. Donner un vecteur tangent à $\mathcal{C}$ en un tel point.

Extrema liés

Exercice 1.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = x^3 + y^3$. L'application f a-t-elle un maximum sur l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$? Si oui, en quel(s) point(s) ?

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = xy^2$. Caractériser tous les points critiques de f sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ puis déterminer ses extrema globaux s'ils existent.

Exercice 3.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$. L'application f a-t-elle un maximum sur l'ensemble $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^4 = 2\}$? Si oui, en quel(s) point(s) ?

Exercice 4.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y,z) = xyz$. L'application f a-t-elle un maximum sur l'ensemble $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} + z^2 \leq 1\right\}$? Si oui, en quel(s) point(s) ?

Exercice 5.

On considère un système physique à N particules, $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose que la j-ième particule est dans un état donné avec une probabilité $p_j \in [0,1]$. On rappelle que les probabilités vérifient $p_1 + \ldots + p_N = 1$. Le désordre du système est déterminé par la fonction d'entropie

$$S : [0,1]^N \ni (p_1, \ldots, p_n) \longmapsto -\sum_{j=1}^{N} p_j \ln(p_j) \in \mathbb{R}.$$

Déterminer les probabilités du système qui maximisent l'entropie.

Exercice 6.

Dans $\mathbb{R}^3$ on considère le cylindre Γ d'équation $x^2+y^2 = 1$, le plan P d'équation $x+y+z = 1$ et la courbe $C = \Gamma \cap P$. Quels sont les points de cote z maximale sur C ?

Exercice 7.

Soit $\mathcal{C}$ le rectangle de sommets $(-2,1)$, $(1,1)$, $(1,-1)$ et $(-2,-1)$. Calculer tous les extrema de la fonction $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) := |x+y|\mathrm{e}^{-y^2/2}$ et donner leur nature.

Exercice 8.

Considérons, pour tout $n \geq 2$ et tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, l'inégalité

$$|x_1 + \ldots + x_n| \leq \sqrt{n}\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

1. Montrer cette inégalité pour $n = 2$ et préciser le(s) cas d'égalité.
2. Montrer le cas général et préciser le(s) cas d'égalité.

Exercice 9.

Montrer pour tout $(x, y, z) \in (\mathbb{R}_+)^3$ l'inégalité

$$xy^2z^3 \leq 108\left(\frac{x+y+z}{6}\right)^6$$

et préciser le(s) cas d'égalité.

Exercice 10.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver la constante optimale $C(\alpha) > 0$ telle que

$$x^3 - \left(\frac{z}{\alpha}\right)^3 \leq C(\alpha)\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2} \qquad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

et préciser le(s) cas d'égalité en fonction de α.

Exercice 11.

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $\alpha \in [1, n]$. Trouver la constante optimale $C(n, \alpha) > 0$ telle que

$$x_1 \ldots x_n \leq C(n, \alpha)\left(x_1^\alpha + \ldots + x_n^\alpha\right)^{n/\alpha} \qquad \forall (x_1 \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$$

et préciser le(s) cas d'égalité.

Exercice 12.

On construit un parallélépipède rectangle dont les dimensions sont x,y et z. Son volume est alors $V(x, y, z) = xyz$ et sa surface $S(x, y, z) = 2(xy + xz + yz)$. Peut-on minimiser S sous la contrainte $V = 1$?

Exercice 13.

Parmi les rectangles de côtés parallèles aux axes de coordonnées qui peuvent être inscrits dans l'ellipse d'équation $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, déterminer celui ou ceux de périmètre maximal.

Exercice 14.

Soit ABC un triangle d'angles $\alpha := \angle CAB$, $\beta := \angle ABC$ et $\gamma := \angle BCA$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(\alpha, \beta, \gamma) := \sin(\alpha)\sin(\beta)\sin(\gamma)$.

Montrer que f est maximale si et seulement si ABC est équilatéral.

Exercice 15.

Soit ABC un triangle de côtés $a = \|\overrightarrow{AB}\|$, $b = \|\overrightarrow{BC}\|$, $c = \|\overrightarrow{CA}\|$. On note $\gamma = \angle BCA$ et $\mathscr{A} \geq 0$ l'aire de ABC.

1. Montrer que $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\gamma)$.
2. On fixe $a > 0$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(b, c, \gamma) := bc$. Montrer que f admet un minimum local ABC et le calculer sous la contrainte $\mathscr{A} = 1$. Que peut-on dire de ABC et de a lorsque le minimum est atteint ?

Exercice 16.

Soient A, B, C trois boules fermées dans $\mathbb{R}^3$ de rayons respectifs $R_A, R_B, R_C > 0$. Soit T le triangle joignant les centres de A, B et C. Déterminer les valeurs extrémales de l'aire de T sous la contrainte que les boules B et C sont en contact avec la boule A (*i.e.* les intersections de leurs adhérences avec A sont des singletons) ; on précisera dans chaque cas la nature du triangle T.

Équations différentielles

Exercice 1.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
   (a) $y' - 2ty = t^3$,
   (b) $y' + y \sin t = \sin(2t)$.
2. Pour chacune d'elles, quelles sont les solutions vérifiant $y(0) = 1$?

Exercice 2.

1. Résoudre les équations différentielles suivantes séparément sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$:
   (a) $ty' + y = 0$,
   (b) $ty' - 2y = t^3$,
   (c) $|t|y' + (t-1)y = t^3$,
   (d) $t^2y' - y = t^2 - t + 1$.
2. Pour chacune d'elles, quelles sont
   i) les solutions définies sur $\mathbb{R}$?
   ii) les solutions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ vérifiant $y(1) = 2$?
   iii) les solutions définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant $y(1) = 2$?

Exercice 3.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considère le système $Y' = AY$.

1. Si v est un vecteur propre de A, quelle solution du système peut-on lui associer ?
2. Soient Y_1 et Y_2 deux solutions du système. On suppose qu'il existe des réels t_1 et t_2 tels que $Y_1(t_1) = Y_2(t_2)$. Montrer qu'alors pour tout réel t on a $Y_1(t) = Y_2(t+t_2-t_1)$. En déduire que les trajectoires des solutions sont égales ou disjointes.
3. Montrer que si une courbe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^n$ est la trajectoire d'une solution alors toutes les courbes obtenues en prenant l'image de $\mathcal{C}$ par une homothétie de $\mathbb{R}^n$ de centre 0 sont aussi des trajectoires de solutions.
4. Donner la solution générale des systèmes obtenus pour les matrices A suivantes. Tracer l'allure des trajectoires dans le plan (et décrire le comportement quand $t \to \pm\infty$) :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
5. Donner la solution générale des systèmes obtenus et la matrice e^{At} pour les matrices A suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

1. Pour les équations suivantes, donner une base de l'espace vectoriel des solutions ; écrire le système $Y' = AY$ et la matrice wronskienne associés, et expliciter e^{At} :
   (a) $y'' - y' - 2y = 0$,
   (b) $9y'' - 6y' + y = 0$,
   (c) $y^{(3)} - 6y'' + 12y' - 8y = 0$,
   (d) $y^{(4)} - 4y^{(3)} - 2y'' + 12y' + 9y = 0$.
2. Résoudre c) resp. d) avec le second membre e^{2t}, resp. $e^{-t} + 1$.

Exercice 5.

Donner la solution générale des équations différentielles suivantes (et résoudre le problème de Cauchy correspondant, si demandé) :

1. $y'' - 4y' + 2y = b(t)$, successivement pour $b(t) = 0$, puis t puis e^{2t} ;
2. $y'' - 2y' + 2y = b(t)$, successivement pour $b(t) = 0$ puis $te^t \cos t$;
3. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2t}(2t + 1)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
4. $y'' + 2y = b(t)$, successivement pour $b(t) = 0$, puis $t + 4$, e^t, $\cos t$, puis $\cos \sqrt{2}t$.
5. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin t}$, sur l'intervalle $]0, \pi[$.

Exercice 6.

Pour les matrices A suivantes, donner la solution générale du système $Y' = AY$ (resp. $Y'(t) = AY(t) + B(t)$, si un vecteur $B(t)$ est donné), telle que $Y(0) = Y_0$; faire le lien avec e^{At}, décrire le comportement quand $t \to \pm\infty$:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$;

   $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $B(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

   $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Exercice 7.

Donner la solution générale du système $\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$, et tracer l'allure des trajectoires $(x(t), y(t))$ dans le plan (on pourra utiliser deux méthodes différentes, dont le passage à une équation d'ordre 2 à une seule fonction inconnue).

Exercice 8.

On considère l'équation (E) : $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$, où a et b sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une solution non nulle de (E) ne peut s'annuler qu'en des zéros simples et isolés.
2. Soient y_1 et y_2 deux solutions indépendantes de (E). Leur wronskien peut-il s'annuler ? Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y_1 il existe exactement un zéro de y_2.
3. Trouver deux fonctions y_1 et y_2 linéairement indépendantes et définies sur $\mathbb{R}$ qui sont solutions de
$$y'' - \frac{2}{t}y' + \frac{2}{t^2}y = 0.$$
Étudier les zéros de leur wronskien. Ce fait contredit-il le résultat de 2. ?

Exercice 9.

Pour les matrices $A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, puis $A(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} Y'(t) = A(t)Y(t), \\ Y(t_0) = Y_0 \,. \end{cases}$

Exercice 10.

Résoudre le système $Y'(t) = \begin{pmatrix} t & -2 \\ 2 & t \end{pmatrix} Y(t) + \begin{pmatrix} e^{\frac{t^2}{2}+t} \\ 3\,e^{\frac{t^2}{2}+t} \end{pmatrix}$.

Exercice 11.

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}\times E, E)$. On suppose que f *est localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable* : il existe $M > 0$ tel que, pour tout $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times E$, il existe $T > 0$ et $R > 0$ tels que

$$\|f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))\|_E \leq M\|y_1(t) - y_2(t)\|_E \qquad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T],\ \forall y_1, y_2 \in \overline{B}_E(y_0, R).$$

Le but de cet exercice est de donner une démonstration du théorème de Cauchy-Lipschitz : il existe une *unique solution* au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) &= f(t, y(t)) \qquad \forall t \in [t_0 - T, t_0 + T] \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases} \tag{E}$$

dès que T est assez petit.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|f(t, y)\|_E \leq C$ pour tout $(t, y) \in [t_0 - T, t_0 + T] \times \overline{B}_E(y_0, R)$.

On fixe désormais $T, R > 0$ de sorte que $CT \leq R$. On introduit l'espace $F = \mathcal{C}^0\left([t_0 - T, t_0 + T], \overline{B}_E(y_0, R)\right)$ que l'on munit de la norme du supremum $\|y\|_\infty := \sup\left\{\|y(t)\|_E \;\middle|\; t \in [t_0 - T, t_0 + T]\right\}$. On admettra que $(F, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach. On introduit finalement l'application ϕ définie par

$$\phi(y) : [t_0 - T, t_0 + T] \ni t \longmapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\mathrm{d}s \qquad \forall y \in F.$$

2. Montrer que $\phi(F) \subset F$.
3. Soient $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$ et $y_1, y_2 \in F$.
   (a) Montrer que

$$\|\phi(y_1)(t) - \phi(y_2)(t)\|_E \leq M|t - t_0|\|y_1 - y_2\|_\infty.$$

   (b) Montrer que

$$\|\phi^2(y_1)(t) - \phi^2(y_2)(t)\|_E \leq \frac{M^2|t - t_0|^2}{2}\|y_1 - y_2\|_\infty$$

   où $\phi^2 = \phi \circ \phi$.
   (c) Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ que

$$\|\phi^n(y_1)(t) - \phi^n(y_2)(t)\|_E \leq \frac{M^n|t - t_0|^n}{n!}\|y_1 - y_2\|_\infty.$$

4. En déduire qu'il existe $N \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que, pour tout $n \geq N$, l'itérée ϕ^n possède un unique point fixe.
5. En déduire que ϕ possède un unique point fixe.
6. Montrer que ce point fixe est la solution du problème de Cauchy (E).

Exercice 12.

Soient $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$ tel que $t_0 \leq t_1$ et $\phi, a, b \in \mathcal{C}^0([t_0, t_1], \mathbb{R})$. On suppose que $b \geq 0$ et que

$$\phi(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t b(s)\phi(s)\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

1. Montrer que la fonction $\psi : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\psi(t) = \int_{t_0}^t b(s)\phi(s)\mathrm{d}s$$

   est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa dérivée.
2. En déduire pour tout $t \in [t_0, t_1]$ l'inégalité $\psi'(t) - b(t)\psi(t) \leq a(t)b(t)$ puis

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t \mapsto \psi(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{d}s}\right) \leq a(t)b(t)\mathrm{e}^{-\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{d}s}.$$

3. Intégrer l'inégalité précédente sur $[t_0, t]$ en justifiant que cette opération est possible.
4. En utilisant que $\phi \leq a + \psi$, déduire *l'inégalité de Grönwall* :

$$\phi(t) \leq a(t) + \int_{t_0}^t a(s)b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t b(s')\mathrm{d}s'}\mathrm{d}s \qquad \forall t \in [t_0, t_1].$$

5. Applications : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ localement lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable. On considère le problème de Cauchy $\begin{cases} y(t) &= f(t, y(t)) \\ y(t_0) &= y_0 \end{cases}$.

(a) Retrouver le résultat d'unicité des solutions locales de l'exercice 11.

(b) Si y_1 et y_2 vérifient $y'(t) = f(t, y(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $|y_1(t) - y_2(t)| \leq C|y_1(t_0) - y_2(t_0)|$ pour une certaine constante $C > 0$.

(c) On suppose qu'il existe deux constantes $C, K > 0$ ainsi que $\gamma \geq 0$ tels que $|f(t, y(t))| \leq C + K|t|^\gamma |y(t)|$. Montrer que toute solution locale du problème de Cauchy y est définie sur un intervalle de la forme $]T_0, T_1[$, alors $\sup_{t \in]T_0, T_1[} |y(t)| < +\infty$.

Contre-exemple : Déterminer toutes les solutions de l'équation $y'(t) = y(t)^2$ puis pour tout $T \in \mathbb{R} \setminus \{t_0\}$, exhiber une solution y telle que $|y(t)| \to +\infty$ lorsque $t \to T$.

Courbes Paramétrées

Exercice 1. Soit Γ la courbe plane définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto (3t^2 - 2t^3, 5t^4 - 4t^5)$.
Déterminer les points singuliers de Γ, et donner leur nature.

Exercice 2. Tracer la tangente en 0, si elle existe, et l'allure de la courbe en 0, pour les courbes paramétrées suivantes :
(i) $x(t) = t^3$, $y(t) = t^5 + t^6$;
(ii) $x(t) = t^3 + t^4$, $y(t) = t^6 + t^7$;
(iii) $x(t) = t^2$, $y(t) = t^4 + t^5$.

Exercice 3. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère la courbe paramétrée définie par :
$t \mapsto \left(2t + \dfrac{a}{t^2}, t^2 + \dfrac{2b}{t}\right)$ $(t \neq 0)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a, b) pour que la courbe possède un point de rebroussement. Quelle est son espèce ?

Exercice 4. Soit A l'astroïde définie par $x(t) = \dfrac{1}{4}(3\cos t + \cos 3t)$, $y(t) = \dfrac{1}{4}(3\sin t - \sin 3t)$.
Déterminer les points singuliers de A, leur nature et la tangente à l'astroïde en ces points.

Exercice 5. Étudier et tracer la courbe définie par : $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t \cdot (1 + \cos t)$.
On précisera les points singuliers.

Exercice 6. Étudier et tracer la *néphroïde*, définie par les équations $x(t) = 3\cos t - \cos 3t$, $y(t) = 3\sin t - \sin 3t$. Calculer sa longueur.

Exercice 7. Soit la courbe plane Γ définie sur $\mathbb{R}$ par $x(t) = e^{-t}\cos t, y(t) = e^{-t}\sin t$.

a) Calculer la longueur de Γ entre les points de paramètre 0 et π ; puis 0 et $+\infty$.

b) Donner la paramétrisation de Γ par longueur d'arc.

Exercice 8. Soit $f\colon]a, b[\to \mathbb{R}$ de classe C^2. Partant de la formule du cours donnant la courbure $K(s(t))$ en fonction d'un paramétrage quelconque $t \mapsto \gamma(t)$, montrer que si $\gamma(t) = (t, f(t))$, on a

$$K(s(t_0)) = \frac{|f''(t_0)|}{\sqrt{(1 + f'(t_0)^2)^3}}.$$

Dans le cas où $f'(t_0) = 0$, montrer que $K(s(t_0)) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{2|f(t) - f(t_0)|}{(t - t_0)^2}$.

Exercice 9. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Utiliser l'exercice 8. pour calculer en tout point la courbure des courbes suivantes : (a) $y = ax$, (b) $y = ax^2$, (c) $y = e^{ax}$, (d) $x = \cos(ay)$, (e) $xy = a$.

Exercice 10. En quel(s) point(s) de la branche de l'hyperbole $y = \dfrac{1}{x}$ et $x > 0$, la courbure est-elle maximale ?

Exercice 11. Soit γ une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^n$ birégulière en t_0. Montrer que le cercle osculateur C à γ en t_0 est le cercle imitant le plus la courbe γ au voisinage de t_0. Si γ est de plus de classe C^3, montrer qu'en général la courbe traverse le cercle C au point $\gamma(t_0)$.

Exercice 12. Déterminer le rayon de courbure $R(x)$ et le centre de courbure $O(x)$ de la parabole $y = x^2/2$. Donner l'équation du cercle osculateur de plus petit rayon.

Exercice 13. Calculer la longueur d'arc, la courbure et la torsion de la cubique gauche $\gamma(t) = (t, t^2/2, t^3/6)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Calculer la courbure et la torsion de la courbe $\gamma(t) = (t^3, (t+1)^3, 3t)$ définie sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Soit $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ la courbe définie par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \cosh t)$.

a) Calculer la courbure et la torsion de γ en un point quelconque.

b) Déterminer le trièdre de Frenet en un point de paramètre t_0 quelconque, et donner une équation du plan osculateur à γ en ce point.